HENRI CARTAN

Mémoire de Gleason sur le 5e problème de Hilbert

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 73, p. 227-235

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__227_0>

Séminaire BOURBAKI
(Février 1953)

MÉMOIRE DE GLEASON SUR LE 5e PROBLÈME DE HILBERT

par Henri CARTAN.

1. Exposé des résultats.

DÉFINITION. - On dit qu'un groupe topologique G est sans sous-groupe arbitrairement petit (en abrégé : s.g.p) s'il existe un voisage V de l'élément neutre ε qui ne contienne pas d'autre sous-groupe que $\{\varepsilon\}$. Condition équivalente : pour tout $\sigma \in V$, $\sigma \neq \varepsilon$, il existe un entier n tel que $\sigma^n \notin V$.

GLEASON [5] démontre le

THÉORÈME FONDAMENTAL. - Tout groupe localement compact G, de dimension finie, s.g.p., est un groupe de Lie.

D'après des informations récentes, YAMABÉ [11] aurait réussi à se débarrasser de l'hypothèse relative à la dimension finie. Quoi qu'il en soit, le théorème de Gleason apporte un progrès décisif vers la solution du fameux 5e problème de Hilbert. En combinant le théorème de Gleason avec d'autres résultats, MONTGOMERY et ZIPPIN [9] obtiennent le théorème suivant : tout groupe localement compact, métrisable, localement connexe et de dimension finie est un groupe de Lie.

On s'occupera ici uniquement du théorème de Gleason. La presque totalité du mémoire est consacrée à la démonstration de ceci :

PROPOSITION 1. - Soit G un groupe localement compact, de dimension finie, s.g.p., connexe et non discret. Si le centre de G est discret, G possède une représentation linéaire non triviale (dans un espace vectoriel de dimension finie).

A partir de là, GLEASON prouve le théorème fondamental par des raisonnements récurrents sur la dimension qui utilisent, entre autres résultats "connus", un théorème de Montgomery dont la démonstration ne semble malheureusement pas très convaincante. Or on peut éviter l'emploi du théorème de Montgomery et tout raisonnement récurrent sur la dimension; d'une façon précise, en faisant rendre davantage à la méthode de Gleason, on démontre ceci :

PROPOSITION 2. - Soit G un groupe localement compact, de dimension finie, s.g.p. , engendré par un voisinage compact de l'élément neutre. Si en outre G est localement semi-simple (i.e : tout sous-groupe invariant abélien est discret), alors G possède une représentation linéaire localement fidèle (i.e : représentation linéaire dans un espace vectoriel de dimension finie, dont le noyau est un sous-groupe discret de G).

Sous les hypothèses de la proposition 2, G est donc un groupe de Lie.

Voici comment le théorème fondamental peut se déduire de la proposition 2 (au cas où la proposition 2 serait valable sans l'hypothèse sur la dimension finie, le raisonnement qu'on va faire prouverait le théorème fondamental sans hypothèse sur la dimension de G). Soit G un groupe localement compact, que nous supposerons d'abord connexe : d'après IWASAWA [7] et GLEASON [3] (1) G possède un plus grand sous-groupe invariant résoluble H , la composante connexe H_0 de ε dans H est de longueur finie, et H/H_0 est discret. Si en outre G est s.g.p. , il en est évidemment de même de H , qui est donc un groupe de Lie (2). Alors, d'après KURANISHI et GOTÔ-YAMABÉ (3), G/H est aussi s.g.p. Si G est de dimension finie, il en est de même de G/H : en effet, la dimension de G/H est au plus égale à celle de G , puisque, H étant un groupe de Lie, l'espace fibré G (de base G/H) possède une section locale (4). Ainsi G/H satisfait aux hypothèses de la proposition 2, et par suite est un groupe de Lie. Puisque H et G/H sont des groupes de Lie, G est un groupe de Lie (5).

---

(1) Cette Note ne contient pas de démonstrations. Consulter l'exposé de BOREL [1] où sont données les démonstrations : voir lemme 1 et théorème 7.

(2) Rappelons la définition d'un "groupe de Lie généralisé" (en abrégé : gLg) : groupe localement compact G qui possède un sous-groupe ouvert, limite projective de groupes de Lie. On sait (GLEASON) que toute extension d'un gLg par un gLg est un gLg (voir [1] théorème 5). Comme tout groupe localement compact abélien est un gLg (PONTRJAGIN a déterminé la structure de tous les groupes abéliens localement compacts), tout groupe localement compact, résoluble et de longueur finie, est un gLg. D'autre part il est immédiat que si un gLg est s.g.p. , c'est un groupe de Lie.

(3) KURANISHI [8] a démontré que si G est localement compact, s.g.p. , et si C désigne le centre de G , alors G/C est s.g.p. (ce résultat est démontré p. 74, mais ne fait l'objet d'aucun énoncé). A vrai dire, ce qu'a prouvé KURANISHI ne peut s'énoncer comme ci-dessus que si l'on sait que la condition, pour un G localement compact, d'être s.g.p., est équivalente à celle-ci : il existe un voisinage U de ε tel que, pour tout $\sigma \in U$, $\sigma \neq \varepsilon$, on ait $\sigma^{2^n} \notin U$ pour un entier n convenable. Cette équivalence est démontrée par M. GOTÔ et YAMABÉ [6] qui, en outre, étendent le théorème de Kuranishi au cas général que voici : soient G un groupe localement compact, s.g.p., et H un sous-groupe invariant fermé de G ; si H est un groupe de Lie, alors G/H est s.g.p.

(4) Tout espace fibré principal qui est un espace topologique complètement régulier, et dont la fibre est un groupe de Lie, est localement trivial [4] . Voir [10], théorème

(5) Toute extension d'un groupe de Lie par un groupe de Lie est un groupe de Lie. Ce théorème, dû à IWASAWA-GLEASON, est démontré dans SERRE [10] , théorème 3.

Si maintenant G n'est pas connexe, soit G_0 la composante connexe de ε dans G ; G/G_0 est totalement discontinu. Or G_0 est un groupe le Lie, d'après ce qui précède ; donc G/G_0 est s.g.p. (d'après GOTÔ-YAMABÉ), par suite est discret. Donc G_0 contient un voisinage de ε dans G, et G est un groupe de Lie.

Ainsi tout revient à prouver la proposition 2. La démonstration pourrait être adaptée au cas d'un germe de groupe ; néanmoins, pour ne pas alourdir l'exposition, nous ne parlerons que du cas d'un vrai groupe.

2. La méthode de Gleason.

Elle s'applique à tout groupe localement compact G, non discret, s.g.p., engendré par un voisinage compact de ε. Dans ce numéro, on ne fera pas d'autre hypothèse sur G, sauf à la fin où l'on introduira l'hypothèse que G est de dimension finie. Un point essentiel, chez GLEASON, consiste à prouver :

LEMME 1. – Il existe une application $s \to U(s)$ de la demi-droite réelle $\geqslant 0$ dans l'ensemble des parties compactes et symétriques de G, jouissant des propriétés suivantes :

a. pour tout $s \geqslant 0$, $\varepsilon \in U(s)$; $U(0) = \{\varepsilon\}$; $U(s) \neq \{\varepsilon\}$ pour $s > 0$;

b. $\lim\limits_{s \to 0} U(s) = \{\varepsilon\}$, ce qui revient à dire que $\bigcap\limits_{s>0} U(s) = \{\varepsilon\}$;

c. $U(s).U(t) = U(s + t)$;

d. $\sigma.U(s).\sigma^{-1} \subset U(ks)$ pour tout $\sigma \in A$, avec k fixe indépendant de s (A désigne un voisinage compact fixe de ε, tel que G soit engendré par A).

Dans c., la notation $U(s).U(t)$ désigne le produit $U'.U''$ de deux parties de G : ensemble des produits $\sigma'.\sigma''$, où $\sigma' \in U'$, $\sigma'' \in U''$.

On exprime la condition c. en disant que les $U(s)$ forment un semi-groupe de sous-ensembles (compacts et symétriques) de G.

Un sous-groupe à un paramètre de G est une application continue $t \to \gamma(t)$ de R dans G, telle que $\gamma(s + t) = \gamma(s).\gamma(t)$. A un semi-groupe U comme ci-dessus, on associe l'ensemble Γ_U des sous-groupes γ à un paramètre tels qu'il existe un $h = h(\gamma) > 0$ jouissant de la propriété :

$$\gamma(t) \in U(h|t|) \quad \text{pour tout } t \text{ réel ;}$$

il suffit d'ailleurs que cette condition soit vérifiée pour tout t assez petit. Le plus petit des h possibles se note $|\gamma|$. La condition d. implique que Γ_U est stable par les automorphismes intérieurs de G, et $|\sigma.\gamma.\sigma^{-1}| \leqslant k|\gamma|$ pour

$\sigma \in A$.

GLEASON montre que Γ_U contient au moins un sous-groupe γ non trivial (i.e : $\gamma(t)$ non égal à ε pour tout t). Dans Γ_U on définit la multiplication par un scalaire s (réel), en posant

$$(s.\gamma)(t) = \gamma(st).$$

On prouve ensuite que Γ_U possède une addition : la somme $\gamma_1 + \gamma_2$ de 2 éléments de Γ_U est un sous-groupe γ à un paramètre, défini par

$$\gamma(t) = \lim_{n\to\infty} (\gamma_1(t/n).\gamma_2(t/n))^n$$

(on prouve l'existence d'une telle limite). Il est immédiat que $\gamma \in \Gamma_U$, et $|\gamma| \leq |\gamma_1| + |\gamma_2|$. Ainsi Γ_U est muni d'une structure d'espace vectoriel sur les réels, et $|\gamma|$ est une norme.

Soit $\Phi : \gamma \to \gamma(1)$ l'application de Γ_U dans G . Elle est biunivoque pour $|\gamma|$ assez petit (supposons que ce soit pour $|\gamma| \leq 1$). Φ permet de transporter à la boule $|\gamma| \leqslant 1$ de Γ_U la topologie induite par celle de G sur l'image de cette boule par Φ . GLEASON démontre (c'est l'un des points délicats de la méthode) que cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de Γ_U . On ne sait malheureusement pas si cette topologie est celle de la norme $|\gamma|$. Quoi qu'il en soit, tout sous-espace vectoriel de Γ_U , de dimension finie n , rencontre la boule $|\gamma| \leq 1$ suivant un espace (topologique) de dimension (topologique) n , que Φ applique sur un sous-espace de G , de dimension (topologique) n .

Si on suppose maintenant que G est de dimension finie, alors l'espace vectoriel Γ_U est de dimension finie (au plus égale à celle de G).

D'autre part, les automorphismes intérieurs de G définissent une représentation linéaire de G dans l'espace vectoriel Γ_U ; l'automorphisme de Γ_U défini par un élément $\sigma \in G$ est évidemment une fonction continue de σ .

Tel est le résultat décisif démontré par GLEASON. Il entraîne évidemment la proposition 1. Il va de soi qu'il a été impossible d'entrer ici dans le détail technique des démonstrations. On trouvera des indications plus détaillées ci-dessous ("Quelques détails, etc").

3. Cas où G est localement semi-simple.

Nous allons maintenant établir la proposition 2 en nous basant sur les résultats du n°2. Tout d'abord, sans même supposer que G soit semi-simple, plaçons-nous toujours dans les hypothèses du n°2 (pas d'hypothèse sur la dimension de G) ; on a les 3 lemmes suivants, qui sont faciles :

LEMME 2. – Si U' et U'' sont deux semi-groupes satisfaisant aux conditions du lemme 1, il existe un semi-groupe U, satisfaisant aux mêmes conditions, et tel que, pour tout $s \geqslant 0$,

$$U'(s) \subset U(hs) \quad , \quad U''(s) \subset U(hs)$$

pour un h convenable (indépendant de s).

Ceci implique que l'espace vectoriel Γ_U contient $\Gamma_{U'}$ et $\Gamma_{U''}$ comme sous-espaces.

LEMME 3. – Pour tout sous-groupe invariant fermé N de G, non discret, il existe dans G un semi-groupe U, satisfaisant aux conditions du lemme 1, et tel que $U(s) \subset N$ pour tout $s \geqslant 0$.

LEMME 4. – Soit G localement compact et s.g.p. Si une famille filtrante décroissante de sous-groupes fermés N_α a une intersection discrète, l'un des N_α est discret.

(Démonstration immédiate : Soit V un voisinage compact de ε, ne contenant pas de sous-groupe $\neq \{\varepsilon\}$, et tel que la frontière $\dot{V}$ de V ne rencontre pas l'intersection des N_α. Alors l'un des N_α ne rencontre pas $\dot{V}$; un tel N_α est discret, en vertu d'un raisonnement classique).

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2. Outre les hypothèses du n°2, supposons que G soit localement semi-simple. Considérons tous les semi-groupes U qui satisfont aux conditions du lemme 1 ; d'après le lemme 2, les espaces vectoriels Γ_U forment une famille filtrante croissante. Pour chacun d'eux, soit N_U le centralisateur de $\Phi(\Gamma_U)$; N_U est aussi le noyau de la représentation de G dans Γ_U ; les N_U forment une famille filtrante décroissante. La proposition 2 sera prouvée si nous montrons qu'il y a un N_U discret. En vertu du lemme 4, il suffit de prouver que l'intersection N de tous les N_U est un sous-groupe discret. Raisonnons par l'absurde : si N (qui est invariant fermé dans G) n'était pas discret, le lemme 3 dit qu'il existerait un semi-groupe U tel que $U(s) \subset N$ pour tout s. Pour un tel U, on a $\Phi(\Gamma_U) \subset N \subset N_U$, donc deux éléments quelconques de $\Phi(\Gamma_U)$ commutent. Soient γ_1 et γ_2 dans Γ_U, et $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; on a alors $\gamma(t) = \gamma_1(t).\gamma_2(t)$ pour tout t. Ainsi $\Phi(\Gamma_U)$

est un sous-groupe abélien invariant de G , non discret, contrairement à l'hypothèse que G est localement semi-simple. Ceci achève de prouver la proposition 2.

QUELQUES DÉTAILS SUR LA MÉTHODE DE GLEASON (n°2 ci-dessus) ET SUR LA DÉMONSTRATION DES LEMMES 2 ET 3 (n°3 ci-dessus).

(i) Par des raisonnements élémentaires sur la compacité, GLEASON prouve d'abord les résultats suivants (cf. aussi CHEVALLEY [2]) :

Il existe un voisinage compact symétrique V de ε , ne contenant aucun sous-groupe $\neq \{\varepsilon\}$, et tel que $\sigma \in V$, $\tau \in V$, $\sigma^2 = \tau^2$ entraînent $\sigma = \tau$. En outre, V étant ainsi choisi une fois pour toutes : soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble de tous les sous-groupes γ à un paramètre, tels que $\gamma(t) \in V$ pour $-1 \leq t \leq +1$; on montre facilement que $\mathcal{Y}$ contient des sous-groupes non triviaux. De plus $\mathcal{Y}$, muni de la topologie de la convergence simple (comme espace d'applications linéaires continues de $[-1, +1]$ dans V), est compact, et la topologie de la convergence uniforme coïncide avec celle de la convergence simple. L'application continue $\Phi : \gamma \to \gamma(1)$ de $\mathcal{Y}$ dans V , qui est biunivoque, est donc homéomorphisme de $\mathcal{Y}$ sur le compact $\Phi(\mathcal{Y})$, désormais noté B .

(ii) Démonstration du lemme 1 : soit, pour $0 < t \leq 1$, $B(t)$ l'image de $\mathcal{Y}$ par l'application $\gamma \to \gamma(t)$ dans V . Alors $\varepsilon \in B(t)$, $B(t) \neq \{\varepsilon\}$; $s \leq t$ entraîne $B(s) \subset B(t)$, et l'intersection des $B(t)$ est $\{\varepsilon\}$. Quand σ parcourt le compact fixe A (qu'on peut supposer contenir V), l'intersection des $\sigma^{-1}.V.\sigma$ est un voisinage V' de ε , donc il existe $k > 0$ assez grand pour que $B(1/k) \subset V'$; ceci entraîne

$$\sigma.B(t).\sigma^{-1} \subset B(kt) \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in A .$$

D'une manière générale, supposons donnée une famille croissante de compacts symétriques $C(t)$ ($t > 0$ assez petit) tels que

(1) $$C(t) \neq \{\varepsilon\} \quad \text{pour} \quad t > 0 , \quad \bigcap_{t>0} C(t) = \{\varepsilon\} ;$$

(2) $$\sigma.C(t).\sigma^{-1} \subset C(kt) \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in A \quad (k > 0 \text{ fixe}).$$

On lui associe un semi-groupe U comme suit : soit $n(t)$ le plus grand entier n tel que $C(t)^n \subset V$, et soit, sur la demi-droite réelle $t > 0$, un ultrafiltre $\mathcal{F}$ plus fin que le filtre des voisinages de 0. On pose, pour $s > 0$,

(3) $$U(s) = \lim_{\mathcal{F}} C(t)\,[n(t)s] ,$$

la limite s'entendant au sens de la topologie de l'espace des parties compactes de V (le symbole $[u]$ désigne la partie entière du nombre positif u). Il est immédiat que $U(s).U(t) = U(s+t)$; l'intersection $\bigcap_{s>0} U(s)$ est un sous-groupe de G contenu dans V, donc est réduite à $\{\varepsilon\}$. Les $U(s)$ constituent un semi-groupe qui satisfait aux conditions a., b., c., d. du lemme 1 : pour d., cela résulte facilement de (2) ; on a $U(s) \neq \{\varepsilon\}$ pour $s > 0$, parce que $U(1)$ rencontre la frontière de V (par construction).

(iii) Démonstration du lemme 2 : soient U' et U'' deux semi-groupes. Considérons, pour $t > 0$, l'ensemble $C(t)$, réunion des produits $U'(t).U''(t)$ et $U''(t).U'(t)$. Les $C(t)$ sont compacts, symétriques, et satisfont à (1) et (2). Soit U le semi-groupe défini par (3) ; il reste à montrer que $U'(s) \subset U(hs)$, $U''(s) \subset U(hs)$ pour $h > 0$ convenable. Or soit k tel que

$$\sigma.U'(t).\sigma^{-1} \subset U'(kt) , \quad \sigma.U''(t).\sigma^{-1} \subset U''(kt) \qquad \text{pour tout } \sigma \in A ;$$

soient V_0 un voisinage de ε tel que $(V_0)^2 \subset V$, et $t_0 > 0$ tel que $U'(t_0) \subset V_0$, $U''(t_0) \subset V_0$. Si $n \leq (kt)^{-1}$, on a $(C(t))^n \subset V$. On en déduit que $U'(k^{-1}t_0 s) \subset U(s)$, $U''(k^{-1}t_0 s) \subset U(s)$.

(iv) Démonstration du lemme 3 : **soit** N un sous-groupe invariant fermé de G, non discret. Prenons, pour $t > 0$, $C(t) = N \cap B(t)$. Puisque N contient des sous-groupes à un paramètre non triviaux, on a $C(t) \neq \{\varepsilon\}$. La condition (2) est vérifiée. Définissons $U(s)$ par (3) ; puisque $C(t) \subset N$ et que N est un sous-groupe, on a $U(s) \subset N$.

(v) La méthode de Gleason pour étudier l'espace vectoriel Γ_U :
Soit donné un semi-groupe U satisfaisant aux conditions du lemme 1. On montre l'existence, dans G, d'une fonction numérique $\sigma \to x(\sigma)$, continue à support compact, telle que $x(\varepsilon) > x(\sigma)$ pour $\sigma \neq \varepsilon$, et que $\sigma \in U(s)$ entraîne $|x_\sigma(\tau) - x(\tau)| \leq s$. (On note x_σ la fonction définie par $x_\sigma(\tau) = x(\sigma^{-1}\tau)$). Cette fonction x est un élément de l'espace hilbertien $L_2(G)$ construit avec la mesure de Haar, et on a $\|x_\sigma - x\| \leq s$ dès que $\sigma \in U(s)$, du moins pour un choix convenable du facteur de la mesure de Haar. L'application $\sigma \to x_\sigma$ de G dans $L_2(G)$ est biunivoque, et c'est un homéomorphisme φ de G sur une partie de $L_2(G)$.

Considérons n'importe quelle fonction $t \to \beta(t)$, définie pour $t \geqslant 0$, à valeurs dans G, et telle qu'il existe $h > 0$ avec $\beta(t) \in U(ht)$ pour tout t. On va lui associer un groupe à un paramètre $\gamma \in \Gamma_U$. Pour cela, soit donné une fois pour toutes sur la demi-droite $t > 0$ un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ plus fin que le filtre des voisinages de 0 . Puisque $\frac{1}{t}\|x_{\beta(t)} - x\| \leq h$ pour tout t , $\frac{1}{t}(x_{\beta(t)} - x)$ a une limite faible z_β , suivant $\mathfrak{F}$.

Posons

$$(4) \qquad \gamma(s) = \lim_{\mathfrak{F}} \beta(t)^{[s/t]} .$$

Ceci définit un sous-groupe à un paramètre γ , et comme $\gamma(s) \in U(h|s|)$, γ appartient à Γ_U . On montre que, lorsque s tend vers 0 (par valeurs >0 ou <0), $\frac{1}{s}(x_{\gamma(s)} - x)$ tend fortement vers z_β , d'où en particulier $z_\gamma = z_\beta$. Ainsi l'image, par φ , du sous-groupe γ , est un arc différentiable de $L_2(G)$; pour que γ soit trivial, il faut et il suffit que $z_\beta = 0$. On observera que $\|z_\beta\| \leq |\gamma|$.

Pour prouver l'existence d'un sous-groupe γ non trivial, on choisit la fonction $\beta(t)$ de manière que $z_\beta \neq 0$. Pour cela, on commence par construire dans G un arc $t \to \alpha(t)$ tel que

$$(\alpha(u))^{-1}.\alpha(t+u) \in U(t) ,$$
$$\alpha(0) = \varepsilon \neq \alpha(1) \in U(1) .$$

La construction se fait par dichotomie. Prenons alors

$$\beta(t) = (\alpha(u))^{-1}.\alpha(t+u) \quad ;$$

du fait que $\alpha(0) \neq \alpha(1)$ on déduit qu'on peut choisir u de manière que la limite faible z_β , suivant $\mathfrak{F}$, de $\frac{1}{t}(x_{\beta(t)} - x)$ soit $\neq 0$.

Si une fonction $\beta(t)$ est de la forme $\beta'(t).\beta''(t)$, on a $z_\beta = z_{\beta'} + z_{\beta''}$. En particulier, si γ' et γ'' sont deux sous-groupes à un paramètre $(\gamma' \in \Gamma_U , \gamma'' \in \Gamma_U)$, soit γ le sous-groupe associé à la fonction $\beta(t) = \gamma'(t).\gamma''(t)$, à savoir

$$\gamma(s) = \lim_{\mathfrak{F}} (\gamma'(t)\gamma''(t))^{[s/t]} .$$

On a $z_\gamma = z_{\gamma'} + z_{\gamma''}$. La loi de composition (commutative) qui associe γ à γ' et γ'' définit sur Γ_U une structure de groupe abélien, et l'application $\gamma \to z_\gamma$ est une application additive de Γ_U sur un sous-groupe de $L_2(G)$. On prouve facilement qu'elle est biunivoque. Il en résulte que la loi de composition de Γ_U est indépendante du choix de l'ultrafiltre $\mathfrak{F}$, et donc

$$(5) \qquad \gamma(s) = \lim_{t\to 0} (\gamma'(t)\gamma''(t))^{[s/t]} \quad \text{(la limite existe).}$$

Ceci prouve que l'addition de Γ_U est compatible avec les homothéties ; on a ainsi sur Γ_U une structure d'espace vectoriel.

Revenons au voisinage V de $\mathcal{E}$ défini en (i) . Si $h > 0$ est assez petit, $|\gamma| \leq h$ entraîne que $\gamma(t) \in V$ pour $-1 \leq t \leq +1$; autrement dit, l'ensemble $\Gamma_U(h)$ des $\gamma \in \Gamma_U$ tels que $|\gamma| \leq h$, est contenu dans l'ensemble appelé $\mathcal{V}$ en (i) . On a vu en (i) que l'application $\Phi : \gamma \to \gamma(1)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{V}$ (muni de la topologie de la convergence simple, ou de la convergence compacte) sur un compact B de V . Il est clair que $\Gamma_U(h)$ est fermé dans $\mathcal{V}$, donc compact. On identifiera $\Gamma_U(h)$ au sous-ensemble compact de G que Φ lui associe.

On a dit que, quand s tend vers 0, $\frac{1}{s}(x_{\gamma(s)} - x)$ tend fortement vers z_γ ; on peut voir que la convergence est <u>uniforme</u> par rapport à $\gamma \in \Gamma_U(h)$. Il en résulte que l'application $\gamma \to z_\gamma$ de $\Gamma_U(h)$ dans $L_2(G)$ est continue quand on munit $L_2(G)$ de sa topologie forte (GLEASON le démontre seulement pour la topologie faible, ce qui d'ailleurs suffit pour le but qu'on se propose). Comme $\Gamma_U(h)$ est compact, cette application est un homéomorphisme ; en particulier, la topologie de $\Gamma_U(h)$ (qui est la boule $|\gamma| \leq h$ de l'espace vectoriel Γ_U) définit sur Γ_U une topologie compatible avec sa structure vectorielle. C'est le résultat dont on avait eu besoin au n°2 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (Armand). - Groupes localement compacts, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

[2] CHEVALLEY (Claude). - On a theorem of Gleason, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 122-125.

[3] GLEASON (A.M.). - On the structure of locally compact groups, Proc. nat. Acad. Sc., t. 35, 1949, p. 384-386.

[4] GLEASON (A.M.). - Spaces with a compact Lie group of transformations, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 35-43.

[5] GLEASON (A.M.). - Groups without small subgroups, Annals of Math., Series 2, t. 56, 1952, p. 193-212.

[6] GOTÔ (M.) and YAMABÉ (H.). - On some properties of locally compact groups with no small subgroup, Nagoya math. J., t. 2, 1951, p. 29-33.

[7] IWASAWA (K.). - On some types of topological groups, Annals of Math., Series 2, t. 50, 1949, p. 507-558.

[8] KURANISHI (M.). - On conditions of differentiability of locally compact groups, Nagoya math. J., t. 1, 1950, p. 71-81.

[9] MONTGOMERY (D.) and ZIPPIN (L.). - Small subgroups of finite-dimensional groups, Annals of Math., Series 2, t. 56, 1952, p. 213-241.

[10] SERRE (Jean-Pierre). - Extensions de groupes localement compacts, d'après Iwasawa, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

[11] YAMABÉ (H.). - A generalization of a theorem of Gleason, Annals of Math. t. 58, 1953, p. 351-365.