JACQUES-LOUIS LIONS

Les travaux de Deny en théorie du potentiel

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 52, p. 21-29

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__21_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1951)

LES TRAVAUX DE DENY EN THÉORIE DU POTENTIEL

par Jacques-Louis LIONS.

INTRODUCTION. - Considérons le noyau $K = \frac{1}{r^{n-2}}$ (noyau newtonien) pour $n \geqslant 3$. Si μ est une mesure positive, on appelle potentiel de μ le produit de composition $K * \mu$. Le problème essentiel est le balayage qui est en gros le suivant : E étant un ensemble fermé de R^n et μ une mesure positive, trouver une mesure positive $\overset{\circ}{\mu}$ (la balayée de μ sur E) portée par E et produisant le même potentiel que μ sur E. En particulier le balayage des masses ponctuelles résout le problème de Dirichlet.

Technique générale. - On ramène le balayage à une projection sur des ensembles convexes fermés complets d'espaces pré-hilbertiens (CARTAN). Mais si l'on reste dans le cadre des mesures de signe quelconque on obtient des espaces non complets. En complétant on tombe sur des distributions authentiques.

Le travail de DENY consiste à tout reprendre à la lumière des distributions. On peut alors faire une théorie du potentiel par rapport à des noyaux qui sont eux-mêmes des distributions et étudier parfaitement les cas classiques.

I. Espaces de distributions d'énergie finie.

1. Ainsi que l'a montré CARTAN un fait essentiel est de prendre un noyau (on se borne à des noyaux de composition) de type positif.

Soit donc K une distribution sur R^n de type positif, de la forme $K = H * H$ où H est de type positif, dans $\mathcal{D}'_{L^2}$.

(Ceci équivaut à supposer que la transformée de Fourier de K est une fonction).

On suppose H inversible dans $\mathcal{D}'_{L^r}$, c'est-à-dire :

(A) Il existe $L \in \mathcal{D}'_{L^2}$ avec $H * L = \delta$.

On munit alors $\mathcal{D}$ d'une structure pré-hilbertienne en posant :

$$(u\ ,\ v)_k = \iint K_{y-x}.u(x).\overline{v(y)}dx.dy = \mathrm{Tr}.K * u * \tilde{v} .$$

En complétant on voit que l'on obtient l'espace (W) des distributions T de la forme $T = L * F$ où $F \in L^2$, muni de la topologie définie par la norme $\|T\| = \|F\|_2$.

L'espace (W) est appelé <u>espace des distributions d'énergie finie</u>. On a $\mathcal{D}_{L^1} \subset (W) \subset \mathcal{D}'_{L^\infty}$. Si $T \in (W)$ l'énergie de T est le <u>carré</u> de sa norme :

$$\text{énergie de } T = \|T\|^2 = \|F\|_2^2 .$$

Soit $T = L * F$ et $S = L * G$ où F et G sont dans L^2. On appelle <u>énergie mutuelle</u> de T et S le produit scalaire de F et G dans L^2 :

$$(T\ ,\ S) = (F\ ,\ G) = \int F(x).\overline{G(x)}.dx .$$

Il est immédiat que l'on peut <u>translater</u> et <u>régulariser</u> ; par contre si $T \in (W)$ il n'y a pas de raison pour que $u.T \in (W)$, $u \in \mathcal{D}$.

<u>L'espace des potentiels</u>. - Si $u \in \mathcal{D}$, le potentiel de u (par rapport au noyau K) est $K * u$. Mais $u = L * f$ où $f \in L^2$ est donné par $f = H * u$. Or $K * u = H * H * u = H * f$. Si maintenant u converge vers T dans (W), f converge vers F dans L^2 $(T = L * F)$ et $H * f$ converge dans l'espace des distributions sur R^n (et même dans $\mathcal{D}'_{L^\infty}$) vers $H * F$. Finalement :

Si $T \in (W)$ c'est-à-dire $T = L * F$ où $F \in L^2$ le <u>potentiel de</u> T sera par définition $U^T = H * F$. L'ensemble de toutes les distributions $H * F$ avec la même topologie que pour (W) constitue l'espace (U) des potentiels.

REMARQUE. - Il vaut mieux ne pas écrire : $U^T = K * T$, parce que l'on ne peut pas multiplier (W) par $\mathcal{D}$.

<u>Une importante formule</u>.

Soit $T \in (W)$ donc $T = L * F$ et $\varphi \in \mathcal{D}$ donc $\in (W)$. On a $\varphi = L * \Psi$ où Ψ est donnée par $\Psi = H * \varphi$. Alors

$$(T\ ,\ \varphi) = (F\ ,\ \Psi)_2 = \mathrm{Tr}.F * \tilde{\Psi} = \mathrm{Tr}.F * H * \tilde{\varphi} = \mathrm{Tr}.U^T * \tilde{\varphi} .$$

Finalement :

$$(T\ ,\ \varphi) = U^T(\overline{\varphi}) . \tag{1}$$

<u>Distributions d'énergie finie portées par un fermé de</u> R^n. - Soit E un ensemble fermé de R^n et (W_E) l'ensemble des $T \in (W)$ de support contenu dans E.

Comme (W) est $\subset$ dans $\mathcal{D}'$ avec une topologie plus fine (et même $\mathring{\mathcal{D}}'_{L^\infty}$) le sous-espace vectoriel (W_E) est <u>fermé</u> dans (W).

2. Le D-Balayage.

Soit E un fermé de R^n, et considérons le sous-espace (W_E). A toute $T \in (W)$ on peut alors faire correspondre sa projection $E(T)$ sur (W_E). C'est la D-balayée sur E de T.

THÉORÈME 1. - $U^T = U^{E(T)}$ dans l'intérieur de E.

DÉMONSTRATION. - Conséquence immédiate de (1).

3. Distribution d'équilibre d'un compact.

C'est la distribution qui minimise $\|S\|^2 - 2\mathcal{R}S(1)$, $S \in (W_E)$. Si Γ est cette distribution, on a :

(2) $$(\Gamma, S) = \overline{S}(1) \text{ pour toute } S \in (W_E).$$

THÉORÈME 2. - $U^\Gamma = 1$ dans l'intérieur de E.

Il résulte de (2) que $\Gamma(1) = m \geqslant 0$, $= \|\Gamma\|^2$. C'est la mesure spectrale de E. On en déduit le théorème suivant : (car $|\mathcal{R}S(1)| \leqslant |S(1)| \leqslant (m.\|S\|^2)^{1/2}$).

THÉORÈME 3. - La mesure spectrale de E est l'inverse de la borne inférieure de l'énergie des $S \in (W_E)$ qui vérifient : $\mathcal{R}S(1) = 1$.

II. Cas d'un noyau positif

On suppose maintenant que K, outre les hypothèses faites jusqu'ici est positif, c'est-à-dire est une mesure positive. Mais il y a lieu alors d'introduire les ensembles suivants :

1° $\mathfrak{M}_1$ ensemble des mesures positives $\in (W)$. C'est un ensemble convexe fermé de (W).

2° $\mathfrak{M}$ mesures μ positives telles que $K * \mu * \check{\mu}$ (définition directe) soit une fonction continue.

THÉORÈME 1. - $\mathfrak{M}$ est identique à l'ensemble des mesures de $\mathfrak{M}_1$ qui sont limites fortes de mesures positives d'énergie finie à support compact. C'est donc un ensemble complet pour la norme énergie. Si λ et $\mu \in \mathfrak{M}$ le potentiel de λ est $U^\lambda = K * \lambda$; le produit scalaire $(\lambda, \mu) = \operatorname{Tr} K * \lambda * \check{\mu}$; et l'énergie de λ est $\|\lambda\|^2 = \operatorname{Tr} K * \lambda * \check{\lambda}$.

1. Le C-Balayage.

Soit E un fermé de R^n et $\mathcal{M}_E$ l'ensemble des mesures de $\mathcal{M}$ à support dans E. C'est un ensemble convexe fermé de $\mathcal{M}$. A toute $\lambda \in \mathcal{M}$ on peut donc faire correspondre sa projection sur $\mathcal{M}_E$ soit $\overset{\circ}{\lambda}$. C'est la C-balayée de λ, caractérisée par :

(3) $$(\lambda, \mu) \leq (\overset{\circ}{\lambda}, \mu) \qquad \text{pour toute } \mu \in \mathcal{M}_E .$$

(4) $$(\lambda, \overset{\circ}{\lambda}) = \|\overset{\circ}{\lambda}\|^2 .$$

On introduit aussi la mesure d'équilibre d'un compact E : c'est la mesure qui minimise l'intégrale de Gauss $\|\mu\|^2 - 2\mu(1)$. Elle est caractérisée par :

(5) $$\mu(1) \leq (\gamma, \mu) \qquad \text{pour toute } \mu \in \mathcal{M}_E$$

(6) $$\gamma(1) = \|\gamma\|^2 = \text{capacité de } E .$$

On a un critère analogue à celui du théorème 3 de I. La capacité de E est inférieure ou égale à sa mesure spectrale. On définit ensuite la capacité intérieure et extérieure d'un ensemble quelconque. Une propriété a lieu quasi-partout si elle a lieu sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle.

2. L'espace des potentiels.

Dans le paragraphe I, le potentiel de $T \in (W)$ pouvait être une distribution authentique ; mais ici les potentiels sont des distributions de densité une fonction. De façon précise :

THÉORÈME 2. -

a. A toute $T \in (W)$ est associée une classe de fonctions, $\Phi(T)$, 2 fonctions de la classe étant égales quasi-partout, et U^T étant égale (dans $\mathcal{D}'$) à l'une quelconque de ces fonctions.

b. Soit $T_n \to T$ dans (W) fort. On peut alors en extraire une suite telle que les fonctions des classes correspondantes convergent quasi-partout vers f^T de la classe $\Phi(T)$.

c. Soit $\lambda \in \mathcal{M}$ et f^T de la classe de $\Phi(T)$. Alors f est λ-sommable et

(7) $$\int f^T . d\lambda = (T, \lambda)$$

d. D-balayage :

Si T_o est la D-balayée de T ; $U^T = U^{T_o}$ quasi-partout sur E.

Si Γ est la distribution d'équilibre de E, $U^\Gamma = 1$ quasi-partout sur E.

e. C-balayage :

Si μ_o est la C-balayée de μ ; $U^\mu \leq U^{\mu_o}$ quasi-partout sur E et $U^\mu = U^{\mu_o}$ μ_o-presque partout.

Si γ est la mesure d'équilibre de E , $U^\gamma \geq 1$ quasi-partout sur E , et $U^\gamma = 1$ γ-presque partout.

Ce théorème permet de poser les importantes définitions :

1° K vérifie le premier principe du maximum si $\lambda \in \mathcal{M}_b$ et $U^\lambda \leq 1$ λ-presque partout entraîne $U^\lambda \leq 1$ quasi partout (principe restreint du maximum dans la thèse de Deny).

CONSÉQUENCE. - L'inégalité (5) est remplacée par une égalité.

2° K vérifie le deuxième principe du maximum si λ et $\mu \in \mathcal{M}_b'$ avec $U^\lambda \leq U^\mu$ λ-presque partout entraîne $U^\lambda \leq U^\mu$ quasi partout (principe du maximum dans la thèse de Deny).

CONSÉQUENCE. - L'inégalité (3) est remplacée par une égalité.

3° K vérifie le principe complet du maximum lorsqu'il vérifie les deux principes précédents.

THÉORÈME 3. - On suppose que K vérifie le 2e principe. Soit E un compact de R^n , et $\mathcal{R}_E$ le sous-espace fermé de (W) engendré par $\mathcal{M}_E$.

a. Si $\lambda \in \mathcal{M}_b$, sa D-balayée coïncide avec sa C-balayée.

b. $\mathcal{R}_E = (W_E)$.

La démonstration utilise essentiellement le fait suivant : si F parcourt les voisinages de E , la C-balayée de λ sur E = limite des C-balayées de λ sur F . Le b. résout un théorème de synthèse spectrale. Cette démonstration n'est valable que pour E compact. Si E est seulement fermé (hypothèse de Deny), la démonstration donnée est inexacte.

THÉORÈME 4. - On suppose que K vérifie le 1er principe du maximum. Soit E un compact de R^n . Il y a alors identité entre distribution et mesure d'équilibre (en particulier mesure spectrale = capacité).

Le cas E non compact n'est résolu que pour des cas particuliers. Il est important d'avoir des critères permettant d'affirmer qu'un noyau K vérifie le ou les principes du maximum. Le théorème suivant est parfois d'un usage commode.

THÉORÈME 5. -

$$\left\{\begin{array}{l}\inf\ (K*\lambda\ ,\ K*\mu)=K*\nu\\ \inf\ (K*\lambda,\ 1)=K*\nu\end{array}\right\}\Leftrightarrow \text{ principe complet du maximum}$$

$$(\lambda,\ \mu\ ,\ \nu\in\mathfrak{M})\ .$$

COROLLAIRE. - Le noyau newtonien vérifie le principe complet du maximum.

3. La condition d'Evans-Vasilesco.

On suppose (ce qui est très fréquent dans la pratique) que le noyau K est une fonction semi-continue inférieurement.

On introduit alors l'ensemble $\mathfrak{M}^*$ des mesures positives telles que

$$\iint K(x-y).d\mu(x).d\mu(y) < \infty\ .$$

Si μ est une mesure positive on peut lui associer la fonction semi-continue inférieurement $V^{\mu}(x) = \int K(x-y).d\mu(y)$. On dira que K vérifie la condition (B) si pour toute mesure μ à support compact et telle que la restriction de V^{μ} au support de μ soit continue, V^{μ} est continue dans tout l'espace. Cette condition est vérifiée pour $|x|^{\alpha-m}$ (EVANS-VASILESCO) et pour les noyaux "réguliers" de Cartan-Deny. Ceci posé, si K vérifie (B) on a le théorème :

THÉORÈME 6. - $\mathfrak{M}\equiv\mathfrak{M}^*$ et si $\mu\in\mathfrak{M}$, on a :

$$\text{énergie de }\ \mu = \|\mu\|^2 = \mathrm{Tr}.K*\mu*\check{\mu} = \iint K(x-y).d\mu(x).d\mu(y)\ .$$

III. Etude plus précise du cas newtonien.

Les résultats de ce paragraphe se généralisent au cas polyharmonique. Il s'introduit dans cette étude l'espace suivant :

Espace (B - L) dans un domaine ω de R^n . - Ce sont les fonctions absolument continues sur presque toutes les parallèles aux axes de coordonnées $\cap\ \omega$ et dont les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ (définies presque partout dans ω) sont $L^2(\omega)$. Plus simplement, les dérivées-distributions de F sont dans L^2 .

Topologie : elle est définie par la norme $\sqrt{D(F)}$ où

$$D(F) = \int\dots\iint\left[\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|^2+\dots+\left|\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|^2\right]dx_1\dots dx_n\ .$$

(On identifie deux fonctions différentes d'une constante).

Ainsi normé cet espace est complet. (NIKODYM).

1. Espace des potentiels newtoniens.

THÉORÈME 1. -

a. Tout potentiel newtonien d'énergie finie U^T est une fonction (B - L) dans tout l'espace. L'énergie de T est :

$$\|T\|^2 = \frac{1}{(n-2)S_n} \cdot \int |\overrightarrow{\text{Grad}}\, U^T|^2 \, dx .$$

b. Réciproquement toute fonction de la classe (B - L) dans tout l'espace est, à une constante additive près, un potentiel newtonien d'énergie finie. C'est exactement un potentiel si et seulement si elle est "nulle à l'infini" (i.e. $\in (\dot{\mathcal{D}}'_{L^\infty})$).

2. Espace des distributions d'énergie finie.

On appelle distribution magnétique toute somme de dérivées du 1er ordre de mesures de Radon. On démontre alors facilement le

THÉORÈME 2. -

a. Toute distribution d'énergie finie (par rapport au noyau newtonien) est une distribution magnétique définie par le vecteur intensité d'aimantation $\vec{I} = \frac{1}{(n-2)S_n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, U^T$ dont les composantes sont dans L^2.

b. Réciproquement toute distribution magnétique $T = -\operatorname{div} \vec{I}$, où $\vec{I}$ est dans L^2, est d'énergie finie :

$$\|T\|^2 \leq (n-2)\, s_n \int |\vec{I}|^2 . dx .$$

On a égalité, si et seulement si $\vec{I}$ est un gradient.

REMARQUES. -

1° On a donc obtenu la structure des éléments de l'espace complété pour la norme = racine carrée de l'énergie, des mesures de Radon de signe quelconque.

2° On peut préciser le théorème 1 b. de la façon suivante : introduisons dans R^n la topologie fine (i.e. la moins fine rendant continus les potentiels de $\mathfrak{M}_0$. Alors une fonction (B - L) dans un domaine ω est presque partout égale à une fonction finement continue sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle.

IV. Potentiels de Green d'énergie finie $(n > 2)$.

Soit ω un domaine de R^n de frontière compacte dont le complémentaire est de capacité positive, toujours pour le noyau newtonien. Soit $G(x , y)$ la fonction de Green de ω . On peut l'obtenir de la façon suivante : soit x un point de ω et $\delta(x)$ la masse 1 en ce point. Soit $\overset{o}{\delta}(x)$ la balayée de $\delta(x)$ sur le complémentaire de ω (ou encore sur la frontière de ω). Ce balayage est possible. Alors si l'on pose :

$$G(x , y) = U^{\delta(x)}(y) - U^{\overset{o}{\delta}(x)}(y)$$

on obtient le noyau de Green de ω .

Toutes les conditions sont faciles à vérifier sauf celle relative à l'annulation de G sur la frontière de ω . Pour cette dernière condition il faut démontrer que

a. Lorsque x tend vers x_o point régulier de la frontière, la balayée $\overset{o}{\delta}(x)$ tend vaguement vers $\delta(x_o)$.

b. Les points irréguliers forment un ensemble de capacité extérieure nulle. Voir [1] .

Ceci posé on considère les distributions sur la variété ω . On munit l'espace $\mathcal{D}_\omega$ d'une structure pré-hilbertienne en posant :

$$(u , v) = \iint G(x , y).u(y).\overline{v(x)}.dx.dy .$$

On complète : on obtient un espace $(\mathcal{H})$ qui est inclus dans $\mathcal{D}'_\omega$.

Si $u \in \mathcal{D}_\omega$ le potentiel de u sera $\int G(x , y).u(y).dy$. Si $T \in (\mathcal{H})$, on prend une suite $u_n \xrightarrow[(\mathcal{H})]{} T$. Les potentiels convergent dans $\mathcal{D}'_\omega$, ce qui définit le potentiel de Green de T . On montre même que le potentiel U_G^T est une fonction $(B - L)$ dans ω .

THÉORÈME 1. - L'espace de Hilbert $(B - L)$ est somme directe de l'espace des potentiels de Green d'énergie finie, et de l'espace des fonctions harmoniques $(B - L)$ dans ω . On peut écrire $F = U_G^T + H$, $F \in (B - L)$, $T \in (\mathcal{H})$, H harmonique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, N.S., t. 22, 1946, p. 221-280.

[2] CARTAN (H.) et DENY (J.). - Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, Acta scient. math., Szeged, t. 12, 1950, p. 81-100.

[3] DENY (Jacques). - Les potentiels d'énergie finie, Acta Math., t. 82, 1950, p. 107-183.

[4] DENY (Jacques). - Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 2, 1950, p. 83-99.

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, I (2e éd.) et II. - Paris, Hermann, 1951-1957 (Act. scient. et ind., n° 1091 = 1245 et 1122).

Voir les autres indications dans [3] .

[Juin 1958]