A. GROTHENDIECK

Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 69, p. 193-200
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__193_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1952)

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET ESPACES NUCLÉAIRES

par A. GROTHENDIECK

Les espaces vectoriels topologiques envisagés sont localement convexes et séparés. Si E est un tel espace, E_s (resp. E'_s) désigne E (resp. E') muni de la topologie faible, E' désigne le dual fort de E. Si E et F sont des espaces localement convexes, $B(E, F)$ est l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$, $\mathfrak{B}(E, F)$ l'espace des formes bilinéaires séparément continues.

Soit A une partie bornée convexe cerclée de E, E_A désigne l'espace engendré par A, muni de la norme $\|x\| = \inf_{x \in \lambda A} |\lambda|$. Soit V un voisinage convexe cerclé de 0 dans E, E_V désigne l'espace normé qui se déduit par passage au quotient de la semi-norme qui correspond à V.

1. Produits tensoriels topologiques.

1. Définitions générales. – (La définition qui suit est due à R. SCHATTEN). Soient E et F deux espaces de Banach. Il existe sur $E \otimes F$ une norme $u \to \|u\|_1$ et une seule telle que pour tout espace de Banach G, les applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G correspondent exactement aux applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G, avec conservation des normes. On a pour $u \in E \otimes F$

$$\|u\|_1 = \inf_{(x_i),(y_i)} \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \, \|y_i\| \qquad \text{pour} \quad u = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \otimes y_i$$

Le complété de $E \otimes F$ pour cette norme sera appelé produit tensoriel normé complété de E et F, noté $E \hat{\otimes} F$. Le dual de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie donc, avec sa norme, à l'espace $B(E, F)$.

On peut aussi condidérer sur $E \otimes F$ la norme induite par l'espace $B(E', F')$ des formes bilinéaires continues sur $E' \times F'$, norme plus petite donc topologie moins fine ; le complété pour cette norme est noté $E \hat{\hat{\otimes}} F$. Toute topologie localement convexe raisonnable sur $E \otimes F$ sera comprise entre les deux topologies précédentes.

Soient E, F deux espaces localement convexes, il existe sur $E \otimes F$ une topologie localement convexe unique T telle que pour tout espace localement convexe G, les applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G correspondent exactement aux applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans G. Alors aux ensembles équicontinus d'applications bilinéaires correspondent les ensembles équicontinus d'applications linéaires. Si (U_i) (resp. (V_j)) est une famille fondamentale de voisinage de 0 dans E (resp. F), les ensembles $\Gamma(U_i \otimes V_j)$ (enveloppe convexe cerclée de l'ensemble des $x \otimes y$, avec $x \in U_i$, $y \in V_j$) forment un système fondamental de voisinage de 0 dans $E \otimes F$. T est appelé le <u>produit tensoriel projectif</u> des topologies données sur E, F, et le complété de $E \otimes F$ pour T, noté $E \hat{\otimes} F$, est appelé <u>produit tensoriel topologique projectif complété de</u> E <u>et de</u> F. Le dual de $E \hat{\otimes} F$ est donc l'espace $B(E, F)$, les parties équicontinues du dual correspondent aux ensembles équicontinus de formes bilinéaires.

Sur $E \otimes F$, on peut aussi considérer la topologie induite par l'espace $\mathfrak{B}(E'_s, F'_s)$ des formes bilinéaires séparément faiblement continues sur $E' \times F'$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie équicontinue de E' par une partie équicontinue de F' ("<u>convergence</u> équicontinue"), le complété est noté $E \hat{\hat{\otimes}} F$. On a une application linéaire continue canonique $E \hat{\otimes} F \to E \hat{\hat{\otimes}} F$, et si E et F sont complets, un isomorphisme topologique dans : $E \hat{\hat{\otimes}} F \to \mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s)$

Soient E et F deux espaces localement convexes, on appelle <u>application de Fredholm</u> de E dans F une application linéaire définie par un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F_B$, où A est une partie bornée convexe cerclée complète de E' fort, B une partie bornée convexe cerclée de F telle que F_B soit complet (alors on peut même supposer A et B compacts). Si E et F sont des Banachs, les applications de Fredholm de E dans F sont celles définies par les éléments de $E' \hat{\otimes} F$. Les applications de Fredholm de E dans E forment le champ naturel de la <u>théorie de Fredholm</u>. Le théorème qui suit donne une représentation concrète de ces opérateurs.

2. <u>Cas particuliers</u>.

THÉORÈME 1. – <u>Si</u> E <u>et</u> F <u>sont du type</u> $(\mathcal{F})$, $E \hat{\otimes} F$ <u>est du type</u> $(\mathcal{F})$, <u>et les éléments de</u> $E \hat{\otimes} F$ <u>sont ceux qui sont de la forme</u> $u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$ (x_i), (y_i) <u>suites bornées dans</u> E, F, <u>et</u> $\sum|\lambda_i| < +\infty$. <u>Si</u> u <u>parcourt un compact de</u> $E \hat{\otimes} F$, <u>on peut prendre</u> (x_i), (y_i) <u>fixes et</u> (λ_i) <u>parcourant un compact de</u> ℓ^1.

Par suite, $E \hat{\otimes} F$ s'identifie au dual de $B(E, F)$ pour la topologie de la convergence compacte, ou pour la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'un compact de E par un faiblement compact de F, ou d'un faiblement compact de E par un compact de F.

THÉORÈME 2. – <u>Soit</u> $L^1(\mu)$ <u>construit sur une mesure</u> μ <u>sur un espace localement compact, et soit</u> E <u>un espace de Banach. Alors</u> $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ <u>est isomorphe avec sa norme à l'espace</u> $L^1_E(\mu)$ <u>des fonctions</u> μ<u>-sommables à valeurs dans</u> E. <u>Généralisation</u>

évidente quand E est un espace localement convexe quelconque. (Théorème de Dunford-Pettis).

L'analogue pour les espaces $L^p (1 < p \leq +\infty)$ est faux.

Si E est un espace de Hilbert, les éléments de $E' \hat{\hat{\otimes}} E$, ou opérateurs de Fredholm dans E, sont les opérateurs de la forme UH, U partiellement isométrique, H hermitien positif complètement continu avec une suite de valeurs propres sommable (opérateurs étudiés par DIXMIER, SCHATTEN).

Les exemples les plus importants portent sur les espaces nucléaires (voir paragraphe 2). Par exemple, on a $\mathcal{E}(V) \hat{\otimes} E = \mathcal{E}(V, E)$ (théorème des noyaux) (V, variété indéfiniment différentiable), $\mathcal{H}(V) \hat{\otimes} E = \mathcal{H}(V, E)$ (V, variété holomorphe), $(\mathcal{S}) \hat{\otimes} E = (\mathcal{S})_E ((\mathcal{S})$, espace des fonctions indéfiniment différentiable sur R^n à décroissance rapide, $(\mathcal{S})_E$ espace de telles fonctions à valeurs dans E), etc.

3. **Produit** tensoriel d'applications linéaires. - Soient E_i, F_i des espaces localement convexes, $(i = 1, 2)$, u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i. On définit de façon évidente $u_1 \otimes u_2$ comme une application linéaire continue de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} E_2$ ou aussi de $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ dans $F_1 \hat{\hat{\otimes}} F_2$. Si u_i est un homomorphisme topologique de E_i sur un sous-espace vectoriel dense de F_i (pour $i = 1, 2$), alors $u_1 \otimes u_2$ est un homomorphisme topologique de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur un sous-espace vectoriel dense de $F_1 \hat{\otimes} F_2$, donc un homomorphisme sur si E_1 et E_2 sont du type $(\mathfrak{F})$, ce qui est souvent utile (voir alinéa suivant). Le produit tensoriel de deux isomorphismes topologiques n'est en général pas un isomorphisme topologique de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$. Pour $E_1 \hat{\hat{\otimes}} E_2$ et $F_1 \hat{\hat{\otimes}} F_2$, c'est l'inverse : le produit tensoriel de deux isomorphismes est un isomorphisme, le produit tensoriel de deux homomorphismes sur n'est pas un homomorphisme. Cela nous amène à distinguer au paragraphe 2 le cas où $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$.

APPLICATIONS. - Une fonction vectorielle indéfiniment différentiable, ou holoporphe, ou sommable ... prenant ses valeurs dans un espace quotient d'un espace E du type $(\mathfrak{F})$, provient d'une fonction analogue, à valeurs dans E.

Si D est un opérateur différentiel dans $\mathcal{E}(V)$ (resp. $\mathcal{H}(V)$) où V est une variété indéfiniment différentiable (resp. holomorphe), qui est un homomorphisme topologique, ou un isomorphisme topologique, il en est de même de l'opérateur différentiel $D \otimes 1$ dans l'espace $\mathcal{E}(V, E)$ (resp. $\mathcal{H}(V, E)$) des fonctions vectorielles indéfiniment différentiable (resp. holomorphes) sur V, à valeurs dans un espace localement convexe E quelconque ; si D est un homomorphisme sur, et si E est du type $(\mathfrak{F})$, $D \otimes 1$ est un homomorphisme sur.

Soit f une application d'une partie fermée K de V dans un espace E du type $(\mathfrak{F})$, telle que pout tout $x' \in E'$, la fonction $t \to \langle f(t) , x' \rangle$ soit la restriction d'une fonction scalaire indéfiniment différentiable (resp. holomorphe) définie sur tout V ; alors f est la restriction d'une fonction vectorielle indéfiniment différentiable (resp. holomorphe) définie sur tout V , etc.

2. Espaces nucléaires.

1. Caractérisations des espaces nucléaires.

DÉFINITION 1. - *Un espace localement convexe* E *est dit nucléaire si pour tout espace localement connexe* E , *on a* $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ *(isomorphisme topologique) i.e. si la topologie de produit tensoriel projectif sur* $E \otimes F$ *est identique à la topologie de la convergence équicontinue sur* $E' \times F'$.

E est nucléaire si et seulement si son complété l'est.

THÉORÈME 3. - *Les conditions suivantes sur* E *sont équivalentes* :

a. E *est nucléaire.*

b. *La condition de la définition ci-dessus est vérifiée pour tout espace de Banach* F . *Il suffit même de prendre pour* F *un seul espace de Banach convenablement choisi, par exemple* $F = \ell^1$, *et il suffit de supposer dans chaque cas que l'application* $E \hat{\otimes} F \to E \hat{\hat{\otimes}} F$ *est un isomorphisme faible.*

c. *Pour toute partie équicontinue convexe cerclée* A *de* E' , *en existe une autre* $B \supset A$ *telle que l'application canonique de* E'_A *dans* E'_B *soit un opérateur de Fredholm.*

d. *Toute application linéaire continue* u *de* E *dans un espace de Banach* G , *provient d'une application de Fredholm d'un espace* E_V , *où* V *est un voisinage convexe cerclé convenable de* 0 *dans* E .

Sous ces conditions, $E \otimes F$ *est dense dans* $\mathfrak{B}_e(E'_s , F'_s)$, *donc si* E *et* F *sont complets, on a aussi* $E \hat{\otimes} F = \mathfrak{B}_e(E'_s , F'_s)$.

c. et d. prennent, quand E est quasi-tonnelé, la forme plus simple : *toute application linéaire continue de* E *dans un espace de Banach est une application de Fredholm. Toute application linéaire continue d'un espace de Banach dans* E' *est une application de Fredholm.*

COROLLAIRE 1. – Si E est nucléaire, E est un "espace de Schwartz" (i.e. toute partie équicontinue A de E' est relativement compacte dans un espace E'_B, où B est une partie équicontinue convexe cerclée de E'), en particulier toute partie bornée de E est précompacte. Si donc E est quasi-complet, E est réflexif, et même du type $(\mathfrak{M})$.

En particulier, un espace de Banach nucléaire est de dimension finie.

COROLLAIRE 2. – Si E est nucléaire, F quelconque, toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ provient d'un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$ où A (resp. B) est une partie équicontinue convexe cerclée de E' (resp. F'). Si E' est nucléaire, F quasi-complet, alors toute application linéaire bornée de E dans F (i.e. transformant un voisinage de 0 en une partie bornée de F) est une application de Fredholm.

COROLLAIRE 3. – Si E est un espace du type $(\mathfrak{F})$ tel que toute suite commutativement convergente dans E soit absolument convergente, alors E est nucléaire (et réciproquement). En particulier, si E est supposé normable, il est de dimension finie (théorème de Dvoratzky-Rogers).

Je ne connais pas d'exemple de cas où on ait $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ sans que E ou F soit nucléaire.

Variante du corollaire 3 (en remplaçant ℓ^1 par L^p) : Si M est un espace localement compact muni d'une mesure μ, toute application de M dans E (espace nucléaire du type $(\mathfrak{F})$) qui est scalairement dans L^p, est $\in L^p_E$; si $1 \leq p < +\infty$ toute application linéaire continue de L^p dans E provient d'un élément de l'espace $L^{p'}_E$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

2. Théorèmes de permanence et exemples.

THÉORÈME 4. – Soit E un espace du type $(\mathfrak{F})$. Alors E est nucléaire si et seulement si son dual fort est nucléaire.

D'ailleurs pour tous les espaces nucléaires qu'on rencontre en analyse, les duals forts sont aussi nucléaires.

THÉORÈME 5. – 1. Soit E un espace nucléaire, F un sous-espace vectoriel. Alors, F est nucléaire, et si F est fermé, E/F est nucléaire.

2. Le produit vectoriel topologique d'une famille quelconque d'espaces nucléaires est nucléaire, ainsi que la somme directe topologique d'une famille dénombrable d'espaces

nucléaires.

3. Si E et F sont nucléaires, $E \hat{\otimes} F$ est nucléaire.

4. Soit E un espace nucléaire du type $(\mathfrak{F})$, F un espace nucléaire quasi-tonnelé et complet, alors le dual fort $B(E , F')$ de $E \hat{\otimes} F'$ est nucléaire.

COROLLAIRE 1. - Un espace séparé limite inductive d'une suite d'espaces nucléaires est nucléaire. Un espace localement convexe E dont la topologie est définie comme la moins fine de celles qui rendent continues des applications linéaires f_i de E dans des espaces E_i nucléaires, est nucléaire.

COROLLAIRE 2. - Soit E un espace nucléaire du type $(\mathfrak{F})$, F un espace nucléaire, alors $L_b(E , F)$ est nucléaire, et si par exemple F est aussi du type $(\mathfrak{F})$, le dual fort de $L_b(E , F)$ est aussi nucléaire.

Ces résultats permettent de voir facilement que les espaces $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}')$, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{D}')$, $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{S}')$, $(\mathcal{O}_M)$, $(\mathcal{O}'_C)$ et les duals forts de ces derniers sont nucléaires. Il en est donc de même de leurs sous-espaces, quotients etc. Par exemple, l'espace $\mathcal{H}(V)$ des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe V est nucléaire.

3. Propriétés de relèvement.

PROPOSITION 1. - Soient E_1 , E_2 deux espaces localement convexes, soit F_1 (resp. F_2) un sous-espace vectoriel de E_1 (resp. E_2) , supposons F_1 nucléaire. Alors toute forme bilinéaire continue sur $F_1 \times F_2$ est la restriction d'une forme bilinéaire continue sur $E_1 \times E_2$. Toute application linéaire bornée de F_1 dans un espace quasi-complet G est la restriction d'une application linéaire bornée de E_1 dans G . Soit H un sous-espace vectoriel fermé de G , supposons que toute partie bornée de G/H soit l'image canonique d'une partie bornée de G ; alors toute application linéaire bornée de F_1 dans G/H provient d'une application linéaire bornée de E_1 dans G .

On a un énoncé plus général pour un ensemble équicontinu de formes bilinéaires, ou un ensemble "équiborné" d'applications linéaires.

PROPOSITION 2. - Soient E , F deux espaces qui sont tous deux du type $(\mathfrak{F})$ ou tous deux des duals forts d'espaces du type $(\mathfrak{F})$, E nucléaire.

1. Toute partie bornée M de $E \hat{\otimes} F$ est contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble $A \otimes B$, où A (resp. B) est une partie bornée de E (resp. F). Donc sur $B(E , F)$ la topologie de la convergence bornée est identique à la topologie de dual fort de $E \hat{\otimes} F$.

2. De façon plus précise, si on suppose H convexe cerclé, il existe une suite bornée (x_i) dans E, une suite $(\lambda_i) \in \ell^1$, et une suite équicontinue d'applications linéaires $u \to y_i(u)$ de $(E \hat{\otimes} F)_M$ dans F, tels que pour tout $u \in M$ on ait $u = \sum_i \lambda_i \; x_i \otimes y_i(u)$.

COROLLAIRE. - Si G est un espace de Banach, alors $L(G, E \hat{\otimes} F)$ est isomorphe à $E \hat{\otimes} L(G, F)$.

4. Compléments sur les produits $E \hat{\otimes} F$ (E nucléaire).

PROPOSITION 3. - Supposons E et F tous deux du type $(\mathfrak{F})$ ou tous deux des duals forts d'espaces du type $(\mathfrak{F})$, E nucléaire. Alors le dual fort de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à $E' \hat{\otimes} F'$.

PROPOSITION 4. - Si E est nucléaire, F complet, pour que $E \hat{\otimes} F$ soit reflexif (resp. du type $(\mathfrak{M})$, ou un espace de Schwartz, ou un espace nucléaire, ou quasi-normable), il faut et il suffit que F le soit.
(Pour la définition des espaces de Schwartz et des espaces quasi-normables voir Grothendieck. Sur les espaces du type $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{DF})$ [2]).

La détermination concrète de $E \hat{\otimes} F$ (avec E nucléaire) est à peu près toujours immédiate, grâce à $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F =$ (si E, F sont complets) espace des applications linéaires continues de E'_s dans F_s, ou de F'_s dans E_s. On peut souvent s'aider du

LEMME. - Soit E un espace localement convexe nucléaire et complet formé de fonctions sur un ensemble T, avec une topologie plus fine que la topologie de la convergence simple, et soit F un espace localement convexe complet quelconque. Alors $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à l'espace des applications f de T dans F telles que pour tout $y' \in F'$, la fonction $f_{y'}(t) = \langle f(t), y' \rangle$ sur T soit $\in E$, et que $f_{y'}$ parcourt une partie bornée de E quand y' parcourt une partie équicontinue de F'. Cette dernière condition est vérifiée d'elle-même si E est du type $(\mathfrak{F})$ ou la limite inductive (au sens général) d'une suite d'espaces du type $(\mathfrak{F})$ (et dans bien d'autres cas encore, grâce à une utilisation convenable du théorème du graphe fermé).

Par exemple, si E est l'un des espaces $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{O}_M)$, $(\mathcal{O}_C)$ (dual fort de $(\mathcal{O}'_C)$), $\mathcal{H}(V)$, l'interprétation de $E \hat{\otimes} F$ est immédiate, et laissée au lecteur.

5. Propriétés de décroissance rapide. - En composant un nombre suffisant d'opérateurs de Fredholm, i.e. d'opérateurs qui peuvent s'obtenir par des séries comme dans l'énoncé du théorème 1, on obtient un opérateur pour lequel on a une représentation comme dans le théorème 1, mais avec une suite (λ_i) majorée par $1/i^n$, où n est donné à l'avance. Cela donne, grâce au théorème 3, des précisions sur la structure des parties équicontinues du dual d'un espace nucléaire. On en déduit par exemple que dans la proposition 2, on peut supposer la suite (λ_i) majorée par $1/i^n$, et même à décroissance rapide si E et F sont du type $(\mathfrak{F})$. On en conclut aussi le

THÉORÈME 6. - Soit E un espace nucléaire quasi-complet, u un opérateur borné dans E . Alors u est un opérateur de Fredholm (théorème 3, corollaire 2) et son "déterminant de Fredholm" $\det(1 + zu)$ est une fonction entière d'ordre 0 . En particulier, la suite des valeurs propres de u est à décroissance rapide.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexandre). - Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, Ann. Inst. Fourier, t. 4, 1952, p. 73-112.

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{DF})$, Summa Brasil. Math., t. 3, 1954, p. 57-123.

[3] GROTHENDIECK (Alexandre). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American Mathematical Society, 1955 (Mem. Amer. math. Soc., n°16).

[Juin 1957]