FRANÇOIS BRUHAT

Représentations induites des groupes localement compacts

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. n° 68, p. 185-192

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__185_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1952)

REPRÉSENTATIONS INDUITES DES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par François BRUHAT

1. Mesures quasi-invariantes.

On dit qu'une mesure positive μ sur un espace localement compact M est "quasi-invariante" (en abrégé q.i.) pour un groupe Γ d'homéomorphismes de M, si les transformées de μ par les éléments de Γ sont équivalentes entre elles.

Soient G un groupe localement compact séparable, g un sous-groupe fermé de G, M l'espace homogène G/g des classes à droite modulo g, h l'application canonique de G sur M : soit α (resp. ν) une mesure de Haar à droite sur G (resp. g), $\Delta(x)$ (resp. $\delta(\xi)$) la dérivée de Radon-Nikodym de la translatée à gauche de α (resp. ν) par l'élément x (resp. ξ) de G (resp. g) : on appellera "fonction ρ" (pour le couple G, g) une fonction $\rho(x)$ sur G, réelle >0, borélienne, bornée sur tout compact et telle que :

$$\rho(\xi x) = \frac{\delta(\xi)}{\Delta(\xi)}\rho(x) \tag{1}$$

LEMME 1. - a. Il existe des fonctions ρ. A l'une d'elles correspond une mesure μ q.i. pour G sur M, telle que, pour toute fonction f continue à support compact sur G on ait :

$$\int_G f(x)\,\rho(x)\,d\alpha(x) = \int_M d\mu \int_g f(\xi x)\,d\nu(\xi) \tag{2}$$

b. La dérivée de Radon-Nikodym par rapport à μ de la transformée de μ par un élément y de G est la fonction de $z \in M$, $\lambda(z\,;\,y)$ définie par :

$$\lambda(h(x)\,;\,y) = \rho(xy)/\rho(x) \qquad \text{pour } x, y \in G \tag{3}$$

c. Réciproquement, à toute mesure q.i. correspond une fonction ρ telle que (2) et (3) soient valables.

d. Deux mesures q.i. sont équivalentes entre elles, un sous-ensemble E de M étant de mesure nulle pour une mesure q.i. pour G si et seulement si $h^{-1}(E)$ est de mesure nulle pour α.

DÉMONSTRATION. - Soit Ψ une section borélienne de G fibré par g (existence par Federer-Morse) ; on pose :

$$\rho(x) = \delta(x(\Psi \circ h(x))^{-1})/\Delta(x(\Psi \circ h(x))^{-1}) \tag{4}$$

Il suffit ensuite d'adapter les raisonnements de WEIL sur les mesures relativement invariantes.

Décomposition d'une mesure q.i. Soient M un espace localement compact séparable, μ une mesure <u>finie</u> sur M, R une relation d'équivalence sur M, Y l'espace quotient M/R, k l'application canonique de M sur Y : on dit que R est "mesurable" pour μ, s'il existe une famille <u>dénombrable</u> de sous-ensembles E_i de Y, tels que $k^{-1}(E_i)$ soit μ-mesurable et que tout point y de Y soit l'intersection des E_i qui le contiennent. Soit $\tilde{\mu}$ la mesure quotient sur Y. On a le :

LEMME 2. - a. Pour tout $y \in Y$, il existe une mesure borélienne finie sur M, μ_y telle que $\mu_y(M - k^{-1}(y)) = 0$ et que, pour toute $f \in \mathcal{L}^1(Y, \tilde{\mu})$ et toute $g \in \mathcal{L}^\infty(M, \mu)$, on ait :

$$\int_Y f(y)\, d\tilde{\mu}(y) \int_M g(x)\, d\mu_y(x) = \int_M f(k(x))\, g(x)\, d\mu(x) \tag{5}$$

b. De plus, si Γ est un groupe localement compact séparable d'homéomorphismes de M, compatibles avec R et tel que μ soit q.i. pour Γ, les mesures μ_y sont, pour presque tout y, q.i. pour Γ.

2. <u>Représentations induites</u>.

On ne considère dans toute la suite que des représentations unitaires U $(x \longrightarrow U_x)$, continues, dans des espaces de Hilbert séparables notés $H(U)$.

Soit L une telle représentation de g, μ une mesure q.i. pour G sur M : on notera ${}^{\mu}H^{L}$ <u>l'espace des fonctions</u> $f(x)$, <u>définies sur</u> G, <u>à valeurs dans</u> $H(L)$, telles que :

a. pour tout $v \in H(L)$, $x \longrightarrow \langle f(x), v \rangle$ est une fonction numérique borélienne sur G (on dira que $f(x)$ est borélienne)

b. pour tout $\xi \in g$,

$$f(\xi x) = L_\xi f(x) \tag{6}$$

c. $\| f(x) \|^2$ qui, L_ξ étant unitaire, est définie sur M, est <u>intégrable pour</u> μ.

On montre facilement qu'après identification des fonctions égales α-presque partout, ${}^{\mu}H^{L}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(f(x) ; g(x)) = \int_M \langle f(x), g(x) \rangle\, d\mu(h(x)) \tag{7}$$

Soit $\rho(x)$ une fonction ρ associée à μ : pour $f \in {}^{\mu}H^L$ et $y \in G$, on pose :

(8) $$ {}^{\mu}U^L_y f(x) = (\rho(xy)/\rho(x))^{1/2} f(xy) = \lambda(h(x)\ ;\ y)^{1/2} f(xy) $$

$y \longrightarrow {}^{\mu}U^L_y$ est une représentation unitaire de G dans ${}^{\mu}H^L$, notée ${}^{\mu}U^L$, car $\rho(xy)/\rho(x)$ est un multiplicateur sur $M \times G$, donc (8) définit une représentation qui est unitaire puisque λ est la dérivée de la transformée de μ par y (cf. lemme 1).

PROPOSITION 1. - Soient μ et μ' deux mesures q.i. pour G sur M. Les représentations ${}^{\mu}U^L$ et ${}^{\mu'}U^L$ sont unitairement équivalentes.

Soit Ψ la dérivée de μ' par rapport à μ : $f \longrightarrow \sqrt{\Psi \circ h(x)\, f(x)}$ définit l'isomorphisme cherché grâce à l'égalité $\rho'(x) = \Psi \circ h(x)\ \rho(x)$.

On ne fera donc plus intervenir μ explicitement par la suite, on notera U^L et on appellera "représentation induite" par la représentation L la classe de représentations unitaires de G ainsi définie.

EXEMPLE. - Prenons $g = \{e\}$ et pour L la représentation triviale : alors U^L est la représentation régulière de G.

On a un certain nombre de théorème vraisemblables, mais pénibles à démontrer :

THÉORÈME 1. - Soient $g_1 \subset g_2$ deux sous-groupes fermés de G, L une représentation de g_1, M la représentation de g_2 induite par L. Les représentations de G induites par L et M sont unitairement équivalentes.

COROLLAIRE. - Si L est la représentation régulière de g, U^L est la représentation régulière de G.

On appelle "représentation conjuguée" (notée $\overline{U}$) de U la représentation $x \longrightarrow U^*_{x^{-1}}$. On a la :

PROPOSITION 2. - Les représentations $U^{\overline{L}}$ et $\overline{U^L}$ sont équivalentes.

THÉORÈME 2. - Soit M une représentation de g somme continue des représentations ${}^{y}L$ pour $y \in Y$ et une mesure borélienne m sur Y : U^M est équivalente à la somme continue des $U^{{}^yL}$ sur Y pour m.

3. Produits de Kronecker.

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert : on sait que l'espace des applications linéaires continues T de H_2 dans H_1 telles que T^*T soit un opérateur de trace finie dans H_2 , forme un espace de Hilbert pour la norme $\sqrt{Tr(T^*T)}$, appelé "produit de Kronecker" $H_1 \otimes H_2$ de H_1 et H_2 . Si U (resp. V) est une représentation de G_1 (resp. G_2) dans H_1 (resp. H_2) , $T \longrightarrow U_{x_1} T V^*_{x_2}$ définit $(x_1 , x_2) \in G_1 \times G_2$ un opérateur unitaire $(U \circ V)_{x_1,x_2}$ dans $H_1 \otimes H_2$ et $(x_1 , x_2) \longrightarrow (U \circ V)_{x_1,x_2}$ est une représentation $U \circ V$ de $G_1 \times G_2$.

THÉORÈME 3. - Soit L (resp. M) une représentation unitaire d'un sous-groupe fermé g_1 (resp. g_2) d'un groupe localement compact séparable G_1 (resp. G_2). Les représentations $U^{L \circ M}$ et $U^L \circ U^M$ de $G_1 \times G_2$ sont équivalentes.

Si $G_1 = G_2 = G$, le sous-groupe "diagonal" $\tilde{G}$ de $G \times G$ est isomorphe à G : en restreignant le représentation $U \circ V$ de $G \times G$ à $\tilde{G}$, on obtient une représentation notée $U \otimes V$ de G , appelée produit de Kronecker des représentations U et V de G .

4. Décomposition du produit de Kronecker de deux représentations induites.

On obtient $U^L \otimes U^M$ par restriction à $\tilde{G}$ de $U^L \circ U^M$ ou encore de $U^{L \circ M}$: on est donc amené à étudier la restriction à un sous-groupe fermé g_2 de la représentation U^L , induite par la représentation L d'un sous-groupe g_1 .

g_2 opère sur $M = G/g_1$, mais en général n'est pas transitif : les "orbites" (i.e. classes d'intransitivité) sont les images canoniques des doubles classes $g_1 x g_2$ pour tout $x \in G$. Si $G = S_1 \cup S_2$, S_1 étant borélien de mesure de Haar non nulle, réunion de telles doubles classes, les sous-espaces H_{S_1} de $H(U^L)$ formés des fonctions s'annulant en dehors de S_1 , sont orthogonaux, supplémentaires, et invariants par U^L restreinte à g_2 (notée $U^{L_1 G_2}$). D'où, si G se décompose en un ensemble de mesure nulle N et une réunion dénombrable de doubles classes $E_i = g_1 x_i g_2$, de mesure non nulle (autrement dit, si G/g_1 se décompose en un ensemble de μ-mesure nulle et une réunion dénombrable d'orbites de μ-mesure non nulle), nous dirons que g_1 et g_2 sont "en rapport discret", une décomposition de $U^{L_1 G_2}$ en somme discrète de représentations indécomposables par le même procédé dans les espaces H_{E_i} . Pour étudier ces représentations, nous allons transformer la définition de H_E : soit H'_E l'espace des fonctions $f(x)$ sur $E = g_1 x_0 g_2$, à valeurs dans $H(L)$, boréliennes, telles que $f(\xi x) = L_\xi f(x)$ pour tout $\xi \in g_1$ et tout $x \in E$, et que $\|f(x)\|^2$ (qui est défini sur $h(E)$) soit intégrable pour une mesure μ_E q.i. pour g_2 sur $h(E)$ (une telle mesure existe d'après le lemme 1 : $h(E)$ n'est pas un espace homogène de g_2 et n'est peut être même pas localement compact, mais l'application $x \longrightarrow h(x_0 , x)$ donne une application biunivoque conservant les boréliens de $g_2/g_2 \cap x_0^{-1} g_1 x_0$ sur $h(E)$ ...). H'_E

n'est jamais réduit à 0 (alors que H_E l'est, si $\alpha(E) = 0$) et si $\alpha(E) \neq 0$, H'_E est isomorphe à H_E (prendre pour μ_E la restriction de μ) .

On a une représentation de g_2 dans H'_E en posant :

$$^E U_s f(x) = (\rho_E(xs)/ \rho_E(x))^{1/2} f(xs)$$

pour $s \in g_2$ et ρ_E fonction ρ associée à μ_E . On vérifie que si $\alpha(E) \neq 0$ $^E U$ transportée de H_E est la représentation de g_2 introduite plus haut et on démontre le lemme :

LEMME 3. - $^E U$ <u>est équivalente à la représentation</u> $^x V$ <u>de</u> g_2 <u>induite par la représentation</u> $\eta \to L_{x_0 \eta x_0^{-1}}$ <u>du sous-groupe</u> $g_x = g_2 \cap x_0^{-1} g_1 x_0$ <u>de</u> g_2 .

D'où immédiatement le

THÉORÈME 4. - a. $^x V$ <u>ne dépend que de la double classe</u> $D = g_1 x g_2$ <u>à laquelle appartient</u> x <u>et on peut parler de</u> $^D V$.

b. <u>si</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>sont en rapport discret,</u> $U^{L_1 G_2}$ <u>est la somme directe discrète des</u> $^D V$ <u>correspondant aux doubles classes</u> D <u>de mesure non nulle pour la mesure de Haar sur</u> G .

On déduit du théorème 4 une décomposition de $U^L \otimes U^M$ (notations du paragraphe 3) : l'application $(x , y) \to xy^{-1}$ de $G \times G$ sur G établit une correspondance biunivoque entre les doubles classes $(g_1 \times g_2)(x , y) \tilde{G}$ et les doubles classes $g_1 z g_2$, qui conserve les classes de mesure nulle (car elle donne une correspondance biunivoque entre G et $G \times G/\tilde{G}$ ce qui permet d'appliquer le lemme 1 d. , la mesure de Haar devenant une mesure q.i.). Par suite $g_1 \times g_2$ et $\tilde{G}$ sont en rapport discret si g_1 et g_2 le sont. D'autre part, l'isomorphisme canonique de $\tilde{G}$ sur G transporte le sous-groupe $(x , y)^{-1}(g_1 \times g_2)(x , y) \cap \tilde{G}$ sur $g_{x,y} = (x^{-1} g_1 x) \cap (y^{-1} g_2 y)$ et transforme la représentation $(s , s) \to (L \circ M)_{(x,y)(s,s)(x,y)^{-1}}$ en $s \to {}^{x,y}N_s = L_{xsx^{-1}} \otimes M_{ysy^{-1}}$. D'où

THÉORÈME 5. - a. $U^{^{x,y}N}$ <u>ne dépend que de la double classe</u> $g_1 x y^{-1} g_2$.

b. <u>Si</u> g_1 <u>et</u> g_2 <u>sont en rapport discret,</u> $U^L \otimes U^M$ <u>est la somme directe des</u> $U^{^{x,y}N}$ <u>sur les doubles classes</u> $g_1 z g_2$ <u>de mesure non nulle pour la mesure de Haar.</u>

Dans le cas général, au lieu de décomposer μ en somme discrète, on va la décomposer en somme continue en utilisant le lemme 2, Il faut nous donner une suite e_i de réunions boréliennes d'orbites qui engendre la tribu des réunions boréliennes d'orbites : la relation d'équivalence R sera "x et y appartiennent aux mêmes e_i" et on obtiendra une décomposition en somme continue des représentations, mais on ne sait pas grand'chose des composantes si g_2 n'est pas transitif sur les classes suivant R .

DÉFINITION. - Nous dirons que les sous-groupes g_1 et g_2 sont "en rapport régulier" si l'on peut trouver dans G une suite e_0 , e_1 , ... de réunions mesurables de doubles classes $g_1 \times g_2$, telle que e_0 soit de mesure de Haar nulle et que toute double classe non contenue dans e_0 soit l'intersection des e_i qui la contiennent.

On peut alors démontrer :

THÉORÈME 4 bis. - Si g_1 et g_2 sont en rapport régulier, U^{L, g_2} est la somme continue sur l'ensemble $\mathcal{O}$ des orbites D de G/g_1 par g_2 des représentations ${}^{D}V$ par rapport à la mesure quotient $\tilde{\mu}$ d'une mesure q.i. finie sur G/g_1 (qui existe puisque G est séparable).

THÉORÈME 5 bis. - Comme le théorème 5 en remplaçant "en rapport discret" par "en rapport régulier" et "somme directe" par "somme continue par rapport à $\tilde{\mu}$ ".

5 Opérateurs et nombres d'entrelacement.

Soient U et V deux représentations de G , T un opérateur borné de H(V) dans H(U) : T sera dit opérateur d'entrelacement pour U et V si $T \circ V_x = U_x \circ T$ pour tout $x \in G$; opérateur d'entrelacement fort si T est de plus du type d'Hilbert-Schmidt. On appellera nombre d'entrelacement (resp. d'entrelacement fort) de U et V et on notera I(U , V) (resp. J(U , V)) la dimension de l'espace des opérateurs d'entrelacement (resp. d'entrelacement fort).

LEMME 4. - $J(U , V)$ = nombre de fois que $U \otimes \overline{V}$ contient la représentation unité comme composante directe discrète (noté $n_I(U \otimes \overline{V})$).

En effet : $T V_x = U_x T$ est équivalent à $U_x T V_x^* = T$, c'est-à-dire à $(U \otimes \overline{V})\, T = T$ si l'opérateur $T \in H(U) \otimes H(V)$, cf paragraphe 3. D'autre part, on peut montrer que $J(U , V) = J(U^0 , V^0) = I(U^0 , V^0)$, où U^0 désigne la restriction de U au sous-espace de H(U) engendré par les sous-espaces de dimension finie invariante par U : autrement dit, J ne fait intervenir que les "parties finies" de U et V .

LEMME 5. - $n_I(U^L)$ est égal à $n_I(L)$ ou à 0 suivant que G/g admet une mesure invariante finie ou non.

DÉMONSTRATION. - Soit $f \in H(U^L)$, invariant par U^L : on a

$$(\rho(xs)/\rho(x))^{1/2} f(xs) = f(x) \quad \text{pour tout } s ,$$

presque partout en x , donc $\rho(x)^{1/2} f(x)$ est presque partout égal à un élément fixe v de $H(L)$. De (5), on déduit que $\rho(\xi x) = \rho(x)$, donc que ρ est définie sur G/g et que la mesure $1/\rho \, d\mu$ est invariante, finie car $\int 1/\rho \, d\mu = \|f\|^2/\|v\|^2$. De plus, $L_\xi v = v$.

Réciproquement, si v est invariant par L et s'il existe une mesure invariante finie, la fonction $f(x) = v$ appartient à $H(U^L)$ et est invariante par U^L .

THÉORÈME 6 (hypothèses et notations du théorème 4 bis). - a. pour tout x et $y \in G$, le nombre d'entrelacement fort des représentations $s \to L_{xsx^{-1}}$ et $s \to N_{ysy^{-1}}$ de $g_{x,y}$ et l'existence d'une mesure invariante finie sur $G/g_{x,y}$, ne dépendent que de la double classe $D = g_1 \, x \, y^{-1} \, g_2$ d'où la notation $J(L , M , D)$).

b. Soit $\mathcal{D}_f$ (resp. $\mathcal{D}'_f$) l'ensemble des doubles classes D de mesure non nulle (resp. de mesure nulle et telles que $J(L , M , D) \neq 0$) pour lesquelles une telle mesure invariante existe : si $\alpha(\bigcup_{D \in \mathcal{D}'_f} D) = 0$, $J(U^L , U^M) = \sum_{D \in \mathcal{D}_f} J(L , M , D)$

Si $\alpha(\bigcup_{D \in \mathcal{D}'_f} D) \neq 0$, $J(U^L , U^M) = \infty$.

Le theorème 4 bis et les lemmes 4 et 5 donnent rapidement a. et ramènent b. au :

LEMME 6.n- Soit m une mesure borélienne sans masses ponctuelles sur Y ; soit $U = \int^Y U \, dm(y)$ une somme continue de représentations de G .

a. l'ensemble Z des $y \in Y$ tels que $n_I({}^yU) \neq 0$ est mesurable.

b. $n_I(U) = 0$ ou ∞ suivant que $m(Z) = 0$ ou non.

DÉMONSTRATION. - On se ramène au cas où les ${}^yU$ ont lieu dans le même Hilbert H . Soit ${}^yE$ le projecteur sur le sous-espace maximal de H sur lequel ${}^yU$ est l'identité : $n_I({}^yU) = \dim {}^yE(H)$. Soit s_j une suite partout dense dans G : d'après le théorème ergodique, $1 + {}^yU_{s_j} + \dots + {}^yU^n_{s_j} / n + 1 \to {}^yE_{s_j}$ projecteur sur le sous-espace maximal sur lequel ${}^{y}U_{s_j} = 1$: donc $y \longrightarrow {}^{y}E_{s_j}$ est mesurable et aussi $y \longrightarrow {}^{y}E = \prod {}^{y}E_{s_j}$: d'où a.

Si $m(Z) = 0$, soit $f \in H(U)$ invariante par U : on a ${}^{y}U_x f(y) = f(y)$ pour tout x presque partout en y, donc (séparabilité de G et continuité de U) presque partout en y pour tout x : d'où ${}^{y}E\, f(y) = f(y)$ presque partout $f(y) = 0$ presque partout et par suite $n_I(U) = 0$.

Si $m(Z) \neq 0$, on peut trouver (m sans masses ponctuelles) une infinité dénombrable d'ensembles mesurables disjoints $Z_j \subset Z$, avec $m(Z_j) \neq 0$; posons ${}^{y}E_j = {}^{y}E$ si $y \in Z_j$ et ${}^{y}E_j = 0$ si $y \notin Z_j$: les $E_j(H)$ forment une infinité dénombrable de sous-espaces linéairement indépendants sur lesquels U est l'identité : d'où $n_I(U) = \infty$.

Prenons $g_1 = g$ et $g_2 = G$: il y a une seule double classe, et on peut prendre dans le théorème 6, a., $x = y = e$. D'autre part, si L ou M est irréductible de dimension finie, $J(L, M) = I(L, M)$ = nombre de fois que M (resp. L) contient L (resp. M) comme composante directe discrète. D'où :

THÉORÈME 7 (Théorème de réciprocité de Frobenius). - Soient L une représentation irréductible de g, M une représentation irréductible de dimension finie de G. Si G/g admet une mesure invariante finie, U^L contient M comme composante directe discrète exactement autant de fois que la restriction de M à g contient L. Si G/g n'admet pas de mesure invariante finie, U^L ne contient aucune composante directe discrète de dimension finie.

COROLLAIRE. - Si G n'est pas compact, sa représentation régulière ne contient pas de composante directe de dimension finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MACKEY (George W.). - Imprimitivity for representations of locally compact groups, I., Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 35, 1949, p. 537-545.

[2] MACKEY (George W.). - On induced representations of groups, Amer. J. Math., t. 73, 1951, p. 576-592.

[3] MACKEY (George W.). - Induced representations of locally compact groups, I., Annals of Math., t. 55, 1952, p. 101-139.