N. JACOBSON

Le problème de Kurosch

Séminaire N. Bourbaki, 1954, exp. nº 64, p. 145-154
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1951-1954__2__145_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1952)

LE PROBLÈME DE KUROSCH

par N. JACOBSON

1. Histoire.

Nous considérons dans la suite des algèbres $\mathfrak{A}$ sur un corps commutatif Φ. On dit que $\mathfrak{A}$ est algébrique si la sous-algèbre engendrée par chaque élément de $\mathfrak{A}$ est de dimension finie. On dit que $\mathfrak{A}$ est localement finie si chaque sous-ensemble fini de $\mathfrak{A}$ engendre une sous-algèbre de dimension finie. En 1941, KUROSCH a posé la question : est-il vrai que toute algèbre algébrique est localement finie ? En 1948, KAPLANSKY a introduit la notion d'une algèbre qui satisfait à une identité polynomiale (les PI algèbres). En 1950, KAPLANSKY a démontré que toute PI algèbre algébrique est localement finie. La méthode de Kaplansky est basée sur la notion de l'espace des idéaux primitifs dans un anneau. Récemment, LEVITZKI a donné une démonstration du résultat de Kaplansky qui est plus simple que celle de Kaplansky. C'est la démonstration de Levitzki [10] que je donnerai ici.

2. Préliminaires.

Rappelons d'abord les notions de la théorie des anneaux arbitraires. On dit qu'un anneau $\mathfrak{A}$ est primitif s'il possède une représentation irréductible fidèle. Si $I = \{\mathfrak{M}\}$ est l'ensemble des modules irréductibles pour un anneau quelconque $\mathfrak{A}$, on définit le radical $\mathfrak{R}$ comme l'ensemble des éléments z tels que $xz = 0$ pour tout x de tout $\mathfrak{M}$ de I. $\mathfrak{R}$ est un idéal bilatère. $\mathfrak{A}$ est semi-simple si $\mathfrak{R} = 0$. On obtient le même radical si on considère des modules à gauche et les anti-représentations au lieu de modules (à droite) et les représentations. Aussi on peut donner la caractérisation suivante : $\mathfrak{R}$ est le plus grand idéal à droite (à gauche) quasi-régulier dans le sens que pour chaque $z \in \mathfrak{R}$ il existe un z' tel que $z \circ z' = z + z' - zz' = 0$. Un idempotent $e \neq 0$ ne peut être quasi-régulier. Alors $\mathfrak{R}$ ne contient pas d'idempotents $\neq 0$. Tout élément nilpotent est quasi-régulier et ceci entraîne que $\mathfrak{R}$ contient tous les nilidéaux de l'anneau. On dit qu'un idéal bilatère $\mathfrak{P}$ est primitif (dans $\mathfrak{A}$) si $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ est un anneau primitif. Par définition (à peu près) $\mathfrak{A}$ est semi-simple si et seulement si $\cap \mathfrak{P} = 0$ pour l'ensemble $\{\mathfrak{P}\}$ des idéaux primitifs. Rappelons aussi que tout idéal bilatère dans un anneau semi-simple est un anneau semi-simple. On a le même résultat pour $e\mathfrak{A}e$, e un idempotent dans l'anneau semi-simple $\mathfrak{A}$.

Ensuite supposons que $\mathfrak{A}$ est primitif et $\mathfrak{M}$ est un $\mathfrak{A}$-module irréductible fidèle. Soit $\mathfrak{C}$ le commutant de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire, l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec les opérateurs correspondant aux éléments de $\mathfrak{A}$. On a le lemme de Schur : $\mathfrak{C}$ est un corps (non-commutatif). Si Γ est un anneau anti-isomorphe à $\mathfrak{C}$ on peut traiter $\mathfrak{M}$ comme un espace vectoriel (à gauche) sur Γ. Alors on a le théorème de Burnside généralisé ou théorème de densité : Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des éléments de $\mathfrak{M}$ linéairement indépendants par rapport à Γ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont quelconques dans $\mathfrak{M}$, il existe un $a \in \mathfrak{A}$ tel que $x_i a = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Anneaux matriciels.

Je suppose connues les notions des décompositions de Peirce à droite, à gauche et bilatère par rapport à un ensemble fini d'idempotents. Rappelons seulement à ce sujet quelques résultats qui sont fondamentaux pour la suite.

Soient e_1, e_2 deux idempotents dans $\mathfrak{A}$. Alors les idéaux à droite $e_1\mathfrak{A}$, $a_2\mathfrak{A}$ sont $\mathfrak{A}$-isomorphes si et seulement s'il existe des éléments e_{12}, e_{21} tels que $e_{12}e_{21} = e_1$, $e_{21}e_{12} = e_2$. Supposons que $\mathfrak{A}$ possède un élément unité 1 et que $\mathfrak{A} = \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{I}_n$ où les $\mathfrak{I}_j$ sont des idéaux à droite isomorphes deux à deux. On a $1 = \sum_1^n e_j$, $e_j \in \mathfrak{I}_j$, les e_j sont des idempotents orthogonaux et $\mathfrak{A} = e_j \mathfrak{A}$. On peut démontrer qu'il existe des unités matricielles e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ telles que $e_{ii} = e_i$ et

$$e_{ij} e_{k\ell} = \delta_{jk} e_{i\ell}, \quad \sum e_{ii} = 1 .$$

Si $\mathfrak{B}$ est le sous-anneau des éléments commutant avec les e_{ij}, tout $a \in \mathfrak{A}$ peut s'écrire dans la forme $a = \sum b_{ij} c_{ij}$, $b_{ij} \in \mathfrak{B}$. Alors $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}_n$, l'anneau des matrices d'ordre n sur $\mathfrak{B}$. On a aussi $\mathfrak{B} \cong e_{11} \mathfrak{A} e_{11}$.

4. Algèbres algébriques.

Tous les résultats de 2 et 3 sont valables pour des algèbres. Désormais nous considèrerons des algèbres sur un corps commutatif Φ.

On dit qu'un élément $a \in \mathfrak{A}$ est algébrique si la sous-algèbre A engendrée par a est de dimension finie. On appelle $\dim A + 1$ le degré de a et si $A \supset aA \supset \ldots \supset a^{k-1}A = a^k A = \ldots$, k est l'indice de a. On a $\deg a = \operatorname{ind} a$ si et seulement si a est nilpotent.

PROPOSITION 1. - <u>Si</u> a <u>est algébrique d'indice</u> k, <u>il existe un</u> x (<u>dans</u> A) <u>tel que</u>

$$a^k x a^k = a^k .$$

On a $a^k \in a^{k-1} A = a^k A = a^{k+1} A$. Alors

$$a^k = a^{k+1} b = a^{k+2} b^2 = \dots = a^{2k} b^k = a^k b^k a^k$$

et

$$x = b^k .$$

Remarquons que $e = a^k x$ est idempotent et $ea^k = a^k$. Par conséquent, si a n'est pas nilpotent, $e \neq 0$. Ceci entraîne

THÉORÈME 1. - <u>Si</u> $\mathfrak{A}$ <u>est algébrique, ou bien</u> $\mathfrak{A}$ <u>est une nilalgèbre, ou bien</u> $\mathfrak{A}$ <u>contient un élément idempotent.</u>

Puisque le radical $\mathfrak{R}$ ne contient aucun idempotent, il est clair que $\mathfrak{R}$ est une nilalgèbre.

On dit que $\mathfrak{A}$ est de <u>degré borné</u> (<u>indice borné</u>) s'il existe une borne finie pour les degrés (indices) des éléments de $\mathfrak{A}$. Evidemment toute sous-algèbre et toute image homomorphe d'une algèbre algébrique de degré (indice) borné est de la même sorte.

PROPOSITION 2. - <u>Une algèbre</u> $\mathfrak{A}$ <u>est d'indice borné si et seulement si les indices de tous les éléments nilpotents sont bornés.</u>

Soit $\varphi(\lambda)$ le polynôme de degré minimal (sans terme constant) tel que $\varphi(a) = 0$, $a \in \mathfrak{A}$. Soit λ^k la plus grande puissance de λ divisant $\varphi(\lambda)$. On voit que k est l'indice de a. Posons $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda)\lambda^{-(k-1)}$, $b = \psi(a)$. On vérifie que b est nilpotent d'indice k.

THÉORÈME 2. - <u>Soit</u> $\mathfrak{A}$ <u>une algèbre algébrique sans éléments nilpotents</u> (<u>sauf</u> 0) <u>et soit</u> $a \in \mathfrak{A}$. <u>Alors l'idéal bilatère</u> (a) <u>engendré par</u> a <u>est de la forme</u> (e) <u>où</u> e <u>est un indempotent contenu dans le centre de</u> $\mathfrak{A}$.

D'après la proposition 1 on a un idempotent e tel que $(a) = (e)$. Ensuite nous démontrons que si $\mathfrak{A}$ est un anneau sans éléments nilpotents, tout idempotent dans $\mathfrak{A}$ est contenu dans le centre. Pour cela considérons la décomposition bilatère de Peirce $\mathfrak{A} = e\mathfrak{A}e + (1-e)\mathfrak{A}e + e\mathfrak{A}(1-e) + (1-e)\mathfrak{A}(1-e)$. Les éléments de $e\mathfrak{A}(1-e)$ et $(1-e)\mathfrak{A}e$ sont nilpotents. Alors $e\mathfrak{A}(1-e) = 0 = (1-e)\mathfrak{A}e$, $\mathfrak{A} = e\mathfrak{A}e + (1-e)\mathfrak{A}(1-e)$ ce qui entraîne que e est dans le centre.

COROLLAIRE. - Soit $\mathfrak{A}$ comme dans le théorème 2. Alors pour chaque sous-ensemble fini $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ il existe un idempotent e dans le centre tel que $ea_i = a_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Soit e_i un idempotent tel que $e_i a_i = a_i$; on prend

$$e = e_1 \circ e_2 \circ \dots \circ e_k \quad (a \circ b = a + b - ab) .$$

5. PI-algèbres.

On dit qu'une algèbre $\mathfrak{A}$ (pas nécessairement algébrique) satisfait à une identité polynomiale ou que $\mathfrak{A}$ est une PI-algèbre, s'il existe un élément $p(x_1, \dots, x_r) \neq 0$ dans l'algèbre libre tel que $p(a_1, \dots, a_r) = 0$ pour tout choix des a_i dans $\mathfrak{A}$. Nous verrons que la classe des PI-algèbres contient celle des algébriques de degré borné.

THÉORÈME 3 (JACOBSON). - Toute algèbre algébrique de degré borné est une PI-algèbre.

Soit N la borne supérieure des degrés des éléments de $\mathfrak{A}$. Alors on a une équation $a^N + \alpha_1 a^{N-1} + \dots + \alpha_{N-1} a = 0$ pour chaque $a \in \mathfrak{A}$. Soit b un autre élément de $\mathfrak{A}$. On a $[a^N b] + \alpha_1[a^{N-1} b] + \dots + \alpha_{N-1}[ab] = 0$, où généralement $[xy] = xy - yx$. Ensuite on a

$$[[a^N b], [ab]] + \alpha_1[[a^{N-1} b],[ab]] + \dots + \alpha_{N-2}[[a^2 b],[ab]] = 0 .$$

Après ça on prend le commutateur avec $[[a^2 b],[ab]]$, etc. Cela donne une identité

$$[[[[a^N b],[ab]] ; [[a^2 b],[ab]] ; [[[a^3 b],[ab]] ; [a^2 b] , [ab]]]] \dots = 0$$

valable pour tout $a, b \in \mathfrak{A}$. Cette identité n'est pas triviale car le terme $a^N baba^2 baba^3 baba^2 bab \dots$ ne paraît qu'une fois.

Ensuite nous considèrerons la structure des PI-algèbres primitives.

PROPOSITION 4. - Si $\mathfrak{A}$ satisfait à une identité polynomiale de degré m, $\mathfrak{A}$ satisfait à une identité multilinéaire de degré $\leqslant m$.

On entend par un élément multilinéaire un élément de la forme

$$\sum \rho_{i_1, \dots, i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}$$

où la somme est prise sur toutes les permutations des chiffres $1, 2, \dots, n$.

On obtient la démonstration par le procédé usuel de linéarisation.

Une conséquence immédiate de la proposition 4 est la

PROPOSITION 5. - Si $\mathfrak{A}$ est une PI-algèbre et P est un corps commutatif contenant le corps de base Φ , $\mathfrak{A}_P$ est PI .

Le théorème 2 montre que l'algèbre Φ_n de toutes les matrices sur Φ est une PI-algèbre. D'autre part le degré des identités pour Φ_n ne peut pas être trop petit. En effet, on a la

PROPOSITION 6. - L'algèbre Φ_n ne satisfait à aucune identité de degré $< 2n$.

Autrement il existerait une identité de la forme

$$a_1 a_2 \cdots a_m = \sum{}'' \rho_{i_1 \cdots i_m} a_{i_1} \cdots a_{i_m} ,$$

$m < 2n$, la somme prise sur les permutations $\neq$ l'identité. Posons $a_1 = e_{11}$, $a_2 = e_{12}$, $a_3 = e_{22}$, $a_4 = a_{23}$, ... , ce qui donne $a_1 \cdots a_m \neq 0$, $a_{i_1} \cdots a_{i_m} = 0$ ce qui contredit l'identité.

PROPOSITION 7. (AZUMAYA et NAKAYAMA). - Soit Γ un corps, Σ son centre et P un sous-corps commutatif maximal. Alors $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ considéré comme une algèbre sur P est isomorphe à une algèbre dense (c'est-à-dire, ayant la propriété donnée dans le théorème de densité) des transformations linéaires d'un espace vectoriel sur P .

On voit facilement que $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ est simple. Nous pouvons identifier Γ avec l'ensemble des multiplications à droite $\xi \to \xi\gamma$ dans Γ et P avec l'ensemble des multiplications à gauche par les éléments de P . On a un homomorphisme naturel de $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ sur l'ensemble d'endormorphismes ΓP dans Γ . Puisque $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ est simple cela donne un isomorphisme. Puisque Γ est un corps l'ensemble de multiplications à droite est irréductible. Par conséquent ΓP est irréductible, le commutant de cet ensemble est d'après la maximalité de P , P lui-même. Alors on obtient le résultat par utilisation du théorème de densité.

THÉORÈME 4 (KAPLANSKY). - Supposons que $\mathfrak{A}$ soit une algèbre qui satisfait à une identité du degré d . Alors le centre Σ de $\mathfrak{A}$ est un corps et $\mathfrak{A}$ est une algèbre simple de dimension $\leq [\frac{d}{2}]^2$ sur Σ .

D'après le théorème de densité on peut considérer $\mathfrak{A}$ comme une algèbre dense de transformations linéaires d'un espace vectoriel $\mathfrak{M}$ sur un corps Γ. Soit $\mathfrak{M}_k$ un sous-espace de $\mathfrak{M}$ de dimension finie k et soit $\mathfrak{b}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{A}$ appliquant $\mathfrak{M}_k$ dans lui-même. En tenant compte du théorème de densité on voit que toute transformation linéaire de $\mathfrak{M}_k$ dans $\mathfrak{M}_k$ est induite par un élément convenable appartement à $\mathfrak{b}$. Alors l'algèbre Γ_k de toutes les matrices d'ordre k sur Γ, qui est isomorphe à l'algèbre des transformations linéaires de $\mathfrak{M}_k$, est une image homomorphe de $\mathfrak{b}$. Il suit que Γ_k et par conséquent Φ_k satisfait à une identité de degré d. D'après la Proposition 6, $d \geqslant 2k$. Alors $\dim \mathfrak{M} \leq [\frac{d}{2}]$ et $\mathfrak{A} \cong \Gamma_k$, $k \leq [\frac{d}{2}]$ et $\mathfrak{A}$ est simple. Le centre de Γ_k est le centre Σ de Γ. Evidemment Γ satisfait à l'identité donnée pour $\mathfrak{A}$. Cela est le cas aussi pour $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$, P un sous-corps commutatif maximal.

Si l'on emploie la proposition 7 et le raisonnement donné dans la première partie de la démonstration on voit que la dimension de $\Gamma \otimes_{\Sigma} P$ sur P est finie.

Par conséquent la dimension de Γ sur Σ est finie et celle de $\mathfrak{A}$ est finie. On voit maintenant que $\mathfrak{A} \otimes_{\Sigma} P \cong P_h$ où $h^2 = \dim \mathfrak{A}$ sur Σ. La proposition 6 s'applique encore pour montrer que $h \leq [\frac{d}{2}]$.

6. Idéaux matriciels.

PROPOSITION 8 (LEVITZKI). - Soit a un élément nilpotent d'indice n dans une algèbre algébrique semi-simple. Alors l'idéal (a) contient un système de n^2 unités matricielles.

On a $a^{n-1} \mathfrak{A} \neq 0$ et par conséquent il existe un élément b tel que $a^{n-1} b = e = e^2 \neq 0$. Posons $e_i = a^{n-i} b a^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. On trouve que $e_i^2 = e_i$ et $e_i \neq 0$ puisque $e_1 = e \neq 0$. De plus $e_i e_j = 0$ si $j < i$ ce qui entraîne que $u = e_1 \circ e_2 \circ \dots \circ e_n$ est idempotent et $e_i u = e_i = u e_i$. Alors $\mathfrak{b} = u \mathfrak{A} u \subsetneq (a)$ et u est un élément unité pour $\mathfrak{b}$. On voit que $\mathfrak{b} = \sum_{\oplus} e_i \mathfrak{b}$. Puisque $(a^{n-1} b) a^{i-1} = e_i$ et $a^{i-1}(a^{n-i} b) = e_1$, $e_1 \mathfrak{b} \cong e_i \mathfrak{b}$. D'après le résultat cité en paragraphe 3, $\mathfrak{c}$ contient un système de n^2 unités matricielles.

PROPOSITION 9. – Soit $\mathfrak{a}$ algébrique et semi-simple, $\{e_{ij}\}$ un système de n^2 unités matricielles $u = \sum_{1}^{n} e_{ii}$. Supposons ou bien

1° $e_{11}\,\mathfrak{a}\,e_{11}$ contient un élément nilpotent $\neq 0$, ou bien

2° u n'est pas dans le centre. Alors il existe un système $\{f_{k\ell}\}$ de au moins $(n+1)^2$ unités matricielles tel que $f_{11} \in e_{11}\,\mathfrak{a}\,e_{11}$.

(1) $$\mathfrak{b} = u\,\mathfrak{a}\,u = \mathfrak{c}_n \ , \quad \mathfrak{c}_n \cong e_{11}\,\mathfrak{b}\,e_{11} = e_{11}\,\mathfrak{a}\,e_{11} \ .$$

D'après la proposition 8, $\mathfrak{c}$ contient un système de $r^2 > 1$ unités matricielles. Cela entraîne que $\mathfrak{a}$ possède un système de $n^2 r^2$ unités matricielles.

(2) On obtient la démonstration facilement par la considération de la décomposition de Peirce $\mathfrak{a} = u\,\mathfrak{a}\,u + u\,\mathfrak{a}(1-u) + (1-u)\,\mathfrak{a}\,u + (1-u)\,\mathfrak{a}\,(1-u)$.

PROPOSITION 10 (KAPLANSKY). – Soit $e_1, e_2, \ldots$ une suite d'idempotents $\neq 0$ tels que $e_{i+1} \in e_i\,\mathfrak{a}\,e_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Alors il existe un idéal primitif $\mathfrak{p}$ tel que $e_i \notin \mathfrak{p}$, $i = 1, 2, \ldots$

On voit facilement que l'idéal à droite $\mathfrak{J} = \sum (1 - e_i)\,\mathfrak{a}$ ne contient pas e_1. Soit $\mathfrak{J}'$ un idéal à droite maximal contenant $\mathfrak{J}$ et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal de tous les éléments b tels que $\mathfrak{a}\,b \subseteq \mathfrak{J}'$. On voit que $\mathfrak{p}$ est primitif et $e_i \notin \mathfrak{p}$, $i = 1, 2, \ldots$, puisque $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{J}'$.

THÉORÈME 4 (LEVITZKI). – Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre algébrique semi-simple ayant la propriété que pour chaque idéal primitif $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ est d'indice borné. Alors tout idéal $\mathfrak{b} \neq 0$ de $\mathfrak{a}$ contient un idéal $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}_n$ où $\mathfrak{d}$ est une algèbre avec élément unité u appartenant au centre de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{d}$ est sans éléments nilpotents $\neq 0$.

La démonstration est assez facile d'après les propositions 8, 10.

7. Le problème de Kurosch.

PROPOSITION 11. – Une algèbre $\mathfrak{a}$ est localement finie (l.f.) si elle contient un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ sont l.f.

Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ une partie finie de $\mathfrak{a}$ et X la sous-algèbre engendrée. Puisque $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ est l.f. on peut trouver $x_{r+1}, \ldots, x_n \in X$ tel que $\sum_1^n \Phi \bar{x}_i$, $\bar{x}_i = x_i + \mathfrak{b}$, est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$. On a $x_i x_j = \sum \gamma_{ijk} x_k + z_{ij}$, $\gamma_{ijk} \in \Phi$, $z_{ij} \in X \cap \mathfrak{b}$. Soit M la sous-algèbre engendrée par les éléments z_{ij} , $x_k z_{ij}$, $z_{ij} x_k$, $x_k z_{ij} x_\ell$. Puisque $M \subseteq \mathfrak{b}$, $\dim M < \infty$. On vérifie que M est un idéal dans X . Puisque $x_i x_j - \sum \gamma_{ijk} x_k \in M$ X/M est de dimension finie. Par conséquent $\dim X < \infty$.

Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ des idéaux l.f. de $\mathfrak{a}$. Puisque $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})/\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})$ est l.f., $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ est l.f.. Il suit que la somme $\mathfrak{F}$ de tous les idéaux l.f. de $\mathfrak{a}$ est l.f. On appelle $\mathfrak{F}$ le <u>noyau localement fini</u> de $\mathfrak{a}$. D'après la proposition 11, il est clair que le noyau l.f. de $\mathfrak{a}/\mathfrak{F}$ est nul. Nous avons besoin aussi de la proposition suivante :

PROPOSITION 12. - <u>Le noyau l.f. contient tout idéal à droite (à gauche) l.f.</u>

Soit $\mathfrak{I}$ un idéal à droite l.f. et posons $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{I} + \mathfrak{I}$, l'idéal engendré par $\mathfrak{I}$. Soit $\{x_i\}$ une partie finie de $\mathfrak{b}$. Alors

$$x_i = \sum a_{ij} u_{ij} + u_i , \quad a_{ij} \in \mathfrak{a} , \quad u_i , u_{ij} \in \mathfrak{I} .$$

Posons $u_{ijk} = u_i a_{jk}$, $u_{ijk\ell} = u_{ij} a_{k\ell} \in \mathfrak{I}$. Les éléments u_i , u_{ij} , u_{ijk} , $u_{ijk\ell}$ engendrent une sous-algèbre avec une base finie $y_1 , y_2 , \dots , y_m$. On voit que la sous-algèbre X engendrée par les x_i est contenue dans l'espace engendré par les y_ℓ et les $a_{ij} y_\ell$. Alors $\dim X < \infty$.

THÉORÈME 5 (KAPLANSKY). - <u>Toute PI-algèbre qui est algébrique est localement finie</u>.

On voit facilement qu'il suffit de démontrer que le noyau l.f., $\mathfrak{F}$, est $\neq 0$. Considérons d'abord le cas où $\mathfrak{a}$ est une nilalgèbre. Soit a un élément de $\mathfrak{a}$ tel que $a \neq 0$, $a^2 = 0$ et considérons l'idéal $a\mathfrak{a}$. Si $a\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{a}$ contient un idéal nilpotent $\neq 0$ et $\mathfrak{F}$ est $\neq 0$. Supposons ensuite que $a\mathfrak{a} \neq 0$. On a une identité de la forme $f(x_2 , \dots , x_d)x_1 + g(x_1 , x_2 , \dots , x_d) = 0$ pour $\mathfrak{a}$ tel que tout terme de g contient x_1 avant la dernière place. Alors si on pose $x_1 = a_1 = a$, $x_i = a_i \in a\mathfrak{a}$, $i > 1$ on obtient $g(a_1 , \dots , a_d) = 0$ et par conséquent $f(a_2 , \dots , a_d)a = 0$. Soit $\mathfrak{d}$ l'annulateur à gauche de $a\mathfrak{a}$. Alors on voit que $a\mathfrak{a}/\mathfrak{d}$ satisfait à une identité de degré $\leq d - 1$. Par induction sur d , on voit que $a\mathfrak{a}/\mathfrak{d}$ est l.f. Puisque $\mathfrak{d}^2 = 0$, $a\mathfrak{a}$ est l.f. et le noyau l.f. de $\mathfrak{a}$ est $\neq 0$. Considérons ensuite le cas où $\mathfrak{a}$ ne contient aucun élément nilpotent $\neq 0$. Nous pouvons supposer aussi que $\mathfrak{a}$ possède un nombre fini de générateurs $x_1, x_2, \dots, x_r$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal primitif dans $\mathfrak{a}$. L'algèbre $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ est de dimension finie sur le centre Σ et puisque elle a un nombre fini de générateurs $\dim \mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ (sur Φ) $< \infty$. On peut trouver alors des éléments $y_1, y_2, \dots y_m$ tels que,

$$x_i = \sum \alpha_{ij} y_j + z_i , \quad \alpha_{ij} \in \Phi , \quad z_i \in \mathfrak{p}$$

et

$$y_i y_j = \sum \gamma_{ijk} y_k + z_{ij} , \quad \gamma_{ijk} \in \Phi , \quad z_{ij} \in \mathfrak{p} .$$

On voit facilement que l'idéal $(z_i , z_{ij}) = \mathfrak{p}$. D'après le corollaire au théorème 2 il existe un élément unité u dans $\mathfrak{p}$. Par conséquent $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d} \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ est de dimension finie. Ainsi on voit dans ce cas aussi que le noyau l.f. est $\neq 0$. Supposons finalement que $\mathfrak{a}$ est arbitraire. Le premier résultat donne une réduction au cas où $\mathfrak{a}$ est semi-simple. D'après le théorème 4, $\mathfrak{a}$ contient un idéal matriciel $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}_n$ où $\mathfrak{d}$ est sans éléments nilpotents. Alors $\mathfrak{d}$ est l.f. Il suit que $\mathfrak{b}$ est l.f. Le noyau l.f. est donc encore $\neq 0$.

Le même raisonnement donne le résultat suivant :

THÉORÈME 6. - Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre algébrique d'indice fini tel que $\mathfrak{a}/\mathfrak{p}$ soit une PI-algèbre pour tout idéal primitif de $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{a}$ est l.f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMITSUR (A.S) and LEVITZKI (J.). - Minimal identities for algebras, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 449-463.

[2] JACOBSON (Nathan). - Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, Annals of Math., Series 2, t. 46, 1945, p. 695-707.

[3] KAPLANSKY (Irving). - On a problem of Kurosch and Jacobson, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 496-500.

[4] KAPLANSKY (Irving). - Rings with a polynomial identity, Bull. Amer. math. Soc., t. 54, 1948, p. 575-580.

[5] KAPLANSKY (Irving). - Groups with representations of bounded degree, Canadian J. of Math., t. 1, 1949, p. 105-112.

[6] KAPLANSKY (Irving). - Topological representation of algebras, II., Trans. Amer. math. Soc., t. 68, 1950, p. 62-75.

[7] KAPLANSKY (Irving). - The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. math. Soc., t. 70, 1951, p. 219-255.

[8] KUROSCH (A.). - Ringtheoretische Probleme, die mit dem Burnsideschen Problem über periodische Gruppen in Zusammenhang stehen, Bull. Acad. Sc. URSS, Série mathématique, t. 5, 1941, p. 233-240.

[9] LEVITZKI (Jakob). - On a problem of A. Kurosch, Bull. Amer. math. Soc., t. 52, 1946, p. 1033-1035.

[10] LEVITZKI (Jakob). - On the structure of algebraic algebras and related rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 74, 1953, p. 384-409.

[11] MALČEV (A. I.). - O predstavlenijakh beskonečnykh algebr, Recueil math. Acad. Sc. Moscou (Mat. Sbornik), N.S., t. 13, 1943, p. 263-286.

[Juin 1958]