LAURENT SCHWARTZ

Sur un mémoire de Petrowsky : « Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen »

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 11, p. 65-69

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__65_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1949)

SUR UN MÉMOIRE DE PETROWSKY

"Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen" [1]

par Laurent SCHWARTZ

1. Préliminaires sur les distributions.

$(\mathcal{D})$ = espace des fonctions φ indéfiniment dérivables à support compact sur l'espace numérique R^n.

$(\mathcal{D}')$ = dual de $(\mathcal{D})$ = espace des distributions.

Le produit de composition de plusieurs distributions est associatif et commutatif dès que toutes, sauf une au plus, ont des supports compacts.

Une distribution T est bornée sur R^n si l'ensemble de ses translatées est un ensemble borné de l'espace vectoriel topologique $(\mathcal{D}')$; ou encore si, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, fixée, $T_x(\varphi(x-h))$ est borné quand $h \in R^n$. Pour que T soit bornée, il faut et il suffit qu'elle soit une somme finie de dérivées de fonctions continues bornées sur R^n au sens usuel.

$(\mathcal{S})$ = espace des fonctions φ indéfiniment dérivables, à décroissance rapide, c'est-à-dire décroissant, pour $x \to \infty$, plus vite que toute puissance <0 de la distance $|x|$, ainsi que chacune de leurs dérivées.

$(\mathcal{S}')$ = dual de $(\mathcal{S})$ = espace des distributions tempérées. Pour qu'une distribution $T \in (\mathcal{D}')$ soit dans $(\mathcal{S}')$, il faut et il suffit qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que la distribution $T/(1+|x|^2)^k$ soit bornée sur R^n.

La transformation de Fourier usuelle $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ sont 2 isomorphismes réciproques de $(\mathcal{S})$ sur lui-même :

$$(1) \qquad \begin{cases} u(x) \in (\mathcal{S}), \quad v(y) \in (\mathcal{S}), \\ v(y) = \iint \cdots \int \exp(-2i\pi x.y)\, u(x)\, dx, \; v = \mathcal{F} u \\ u(x) = \iint \cdots \int \exp(+2i\pi x.y)\, v(y)\, dy, \; u = \overline{\mathcal{F}} v \end{cases}$$

Ce sont aussi 2 isomorphismes réciproques de $(\mathcal{S}')$ sur lui-même, par la formule de définition :

$$(2)\quad \begin{cases} V = \mathcal{F}U\ , \quad U = \overline{\mathcal{F}}V \\ \mathcal{F}U(v) = U(\mathcal{F}v) \\ \overline{\mathcal{F}}V(u) = V(\overline{\mathcal{F}}u) \end{cases}$$

$(\mathcal{O}_M)$ = espace des facteurs de multiplication dans $(\mathcal{S}')$ = espace des fonctions indéfiniment dérivables, à croissance lente, c'est-à-dire croissant, pour $|x| \to \infty$, moins vite qu'une puissance ≥ 0 convenable de x , ainsi que chacune de leurs dérivées. Si $T \in (\mathcal{S}')$, $\alpha \in (\mathcal{O}_M)$, le produit αT est défini, et $\in (\mathcal{S}')$; la multiplication par α est une opération linéaire continue dans $(\mathcal{S}')$.

$(\mathcal{O}'_C)$ = espace des facteurs de composition dans $(\mathcal{S}')$ = espace des distributions S "à décroissance rapide", c'est-à-dire telles que, quel que soit l'entier $k \geq 0$, la distribution $S(1 + |x|^2)^k$ soit bornée sur R^n . Si $T \in (\mathcal{S}')$, $S \in (\mathcal{O}'_C)$, le produit de composition $S * T$ est défini, et $\in (\mathcal{S}')$; la composition avec S est une opération linéaire continue dans $(\mathcal{S}')$. Si T est bornée sur R^n , $S \in (\mathcal{O}'_C)$, $S * T$ est bornée sur R^n .

La transformation de Fourier échange isomorphiquement $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$, et échange le produit de multiplication avec le produit de composition.

2. Position du problème de Cauchy pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles étudiés par Petrowsky.

Système de N équations aux dérivées partielles d'ordre fini par rapport à N fonctions inconnues U_i :

$$(3)\qquad (i = 1\ , 2\ , \ldots\ , N)\ \frac{\partial^{p_i} U_i}{\partial t^{p_i}} = \sum_{j=1}^{j=N} L_j(U_j) + f_i(t\ , x)$$

a. t est une variable temps, x une variable d'espace représentant un point de R^n de coordonnées x_1 , $x_2 \ldots x_n$.

b. f_i est une fonction connue (= second membre).

c. L_j est un opérateur linéaire différentiel (en t et x) à coefficients fonctions du temps seul :

$$(4)\qquad L_j(U_j) = \sum_{k_o \ldots k_n} A_{i,j}^{(k_o, k_1 \ldots k_n)}(t)\ \frac{\partial^{k_o + k_1 + \ldots + k_n}}{\partial t^{k_o}\, \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} U_j$$

dans lequel la somme $k_o + k_1 + \ldots + k_n$ est finie (mais quelconque), $k_o < p_j$.

Le problème de Cauchy est dit bien posé pour un tel système dans un intervalle de temps $t_1 \leq t \leq t_2$, si, ℓ étant donné, on peut trouver L tel que, lorsqu'on se donne des conditions initiales :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^k U_i}{\partial t^k} = \varphi_i^{(k)}(x) \quad \text{pour} \quad t = t_0 \,, \quad t_1 \leq t_0 \leq t_2 \;; \\ 0 \leq k \leq p_i - 1 \;;\quad i = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, N \end{cases}$$

et des seconds membres $f_i(t\,,\,x)$, les fonctions f et φ étant bornées dans $(t_1\,,\,t_2) \times R^n$ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq L$, le problème admet une solution unique, pour laquelle les U_i sont continues et bornées dans $(t_1,t_2) \times R^n$ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq \ell$; si de plus les bornes des U_i et de leurs dérivées ne dépendent que de celles des φ, f et de leurs dérivées. En général, pour ℓ donné, il faut prendre $L > \ell$ (pour les dérivées en x) (et strictement plus grand que le degré des équations, même si ℓ ne dépasse pas ce degré).

Soit $(\mathcal{E})$ un espace vectoriel topologique de fonctions sur R^n ; il y aura avantage à considérer les f_i et u_i comme des éléments de $(\mathcal{E})$ dépendant du temps. Alors le système (3) devient un système <u>d'équations différentielles</u> où les fonctions inconnues de la variable t prennent leurs valeurs dans $(\mathcal{E})$. Au lieu de prendre pour $(\mathcal{E})$ un espace de fonctions bornées ainsi que leurs dérivées, on peut prendre des L^p, ou des espaces de distributions (la solution est alors formée de distributions sur R^n dépendant de t).

EXEMPLE. - Problème de Cauchy bien posé si, à tout système de distributions φ, f bornées sur R^n uniformément pour $t_1 \leq t \leq t_2$ (respectivement tempérées), correspond une solution unique pour laquelle les U_i sont bornées sur R^n (resp. tempérées) ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq p_i$ en t, et dépendent continûment des données.

3. <u>Condition pour que le problème de Cauchy soit bien posé.</u>

Une transformation de Fourier $\mathcal{F}$ (par rapport aux x <u>seuls</u>) donne un nouveau système

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{p_i} V_i}{\partial t^{p_i}} = \displaystyle\sum_{j=1}^{j=N} \mathcal{L}_j(V_j) + g_i(t\,,\,y) \\ \mathcal{L}_j(V_j) = \displaystyle\sum_{k_0,\ldots,k_n} A_{ij}^{(k_0,\ldots,k_n)}(t)\,(2i\pi y_1)^{k_1}\ldots(2i\pi y_n)^{k_n} \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} V_j \end{cases}$$

qu'on peut considérer comme système différentiel ordinaire dépendant des paramètres y. Ce système se résoud classiquement par une <u>matrice de Green</u> $\mathcal{M}(t_0, t; y)$ (dépendant des paramètres y), calculé sur le système homogène.

<u>Condition nécessaire et suffisante</u> (A) <u>pour que le problème de Cauchy soit bien posé dans</u> (t_1, t_2) :

THÉORÈME. - <u>Il faut et il suffit que</u> $\mathcal{M}(t_0, t; y)$ <u>soit majorée, uniformément pour</u> $t_1 \leq t_0 \leq t \leq t_2$, <u>par une puissance de</u> $|y|$ <u>quand</u> $|y| \to \infty$.

On montre alors que cette matrice $\mathcal{M}$ a aussi toutes ses dérivées en y à croissance lente, donc $\in (\mathcal{O}_M)$; elle est alors la transformée de Fourier $\mathcal{F}M$ d'une matrice $M(t_0, t; x)$ qui en réalité est une <u>distribution</u> sur R^n dépendant de t_0 et t ; cette distribution est à décroissance rapide $(\in (\mathcal{O}'_C))$. Ses composées avec des distributions bornées sur R^n sont bornées sur R^n et c'est ce qui montre le théorème.

4. Systèmes paraboliques.

Un système est parabolique si d'une part il existe un entier pair $s > 0$ tel que $k_0 S + k_1 + \dots + k_n \leq p_j S$ dans l'opérateur L_j, si d'autre part les racines en λ du déterminant de la matrice

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} (b_{ij}) - \begin{pmatrix} \lambda^{p_1} & & & \\ & \lambda^{p_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{p_N} \end{pmatrix} \\ b_{ij} = \sum_{k_0+k_1+\dots+k_n = p_j S} A_{ij}^{(k_0, k_1, \dots, k_n)}(t)\, \lambda^{k_0} (iy_1)^{k_1} \dots (iy_n)^{k_n} \end{array} \right.$$

sont, lorsque $|y| = 1$, de parties réelles majorées par $-\delta < 0$ fixe.

Alors, on peut voir que la condition (A) est remplie si $t_0 = t_1$. De plus la matrice de Green $E(t, t_0; x)$ est cette fois une fonction <u>analytique entière en</u> x <u>quel que soit</u> $t \geq t_0$. Il en résulte que le système homogène et le système non homogène à seconds membres analytiques en x n'ont que des solutions analytiques en x.

Dans un système parabolique, on ne peut pas changer le sens du temps ; parabolique pour t croissant, il ne l'est plus pour t décroissant.

5. Systèmes hyperboliques.

On suppose cette fois que dans L_j , $k_1 + \ldots + k_n \leq p_j$, (soit $\mathcal{S} = 1$, avec la notation du cas parabolique). Le système est alors hyperbolique si les racines en λ du déterminant de la matrice (7) sont purement imaginaires et deux à deux distinctes ; extension immédiate au cas d'un système formé de la réunion de plusieurs systèmes hyperboliques ne contenant pas 2 à 2 les mêmes fonctions inconnues.

Alors la condition (A) est encore remplie. Cette fois la matrice de Green $\underset{\sim}{M}$ est une distribution, mais son support est compact. Il en résulte que, sur un compact de R^n , la solution ne dépend que des données φ et f sur un compact. Il y a "propagation des ondes" avec vitesse finie. On peut inverser le sens du temps.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PETROWSKY (I.). - Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete dernnichtanalytischen Funktionen, Bull. Univ. Etat Moscou, Série intern., Sect. A, t. 1, 1938, n° 7, 74 p.

J'ai détaillé le présent exposé dans l'article suivant :

SCHWARTZ (Laurent). - Les équations d'évolution liées au produit de composition, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 2, 1950, p. 19-49.