SÉMINAIRE N. BOURBAKI

SAMUEL EILENBERG

Foncteurs de modules et leurs satellites

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 46, p. 379-381

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__379_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1951)

FONCTEURS DE MODULES ET LEURS SATELLITES

par Samuel EILENBERG.

1. Soit Λ un anneau (toujours avec élément unité). Un Λ-module (à gauche) P est appelé <u>projectif</u>, si pour tout homomorphisme $A \to B$ du module A sur le module B, tout homomorphisme $P \to B$ admet une factorisation en $P \to A \to B$. Les modules projectifs sont précisément les facteurs directs des modules libres. Tout module A peut être plongé dans une suite exacte $0 \to M \to P \to A \to 0$ où P est projectif.

Un Λ-module Q est appelé <u>injectif</u>, si, pour tout sous-module B de A, tout homomorphisme $B \to Q$ admet un prolongement $A \to Q$. Tout module A peut être plongé dans une suite exacte $0 \to A \to Q \to N \to 0$ où Q est injectif.

2. <u>Produits tensoriels</u>.

Soit B un Λ-module (à droite) fixe. Pour tout Λ-module (à gauche) A on considère le produit tensoriel

$$T(A) = B \otimes_{\Lambda} A$$

<u>sur</u> Λ (i.e. avec $a\lambda \otimes b$ et $a \otimes \lambda b$ identifiés). $T(A)$ est un groupe abélien (i.e. un module sur Z). Pour tout Λ-homomorphisme $\varphi : A \to A'$ on a un Z-homomorphisme $T(\varphi) : T(A) \to T(A')$. On a T (identité) = identité, $T(\varphi \circ \psi) = T(\varphi) \circ T(\psi)$, $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$.

En faisant une abstraction on arrive à la notion de foncteur covariant additif, dont T est un exemple.

3. <u>Satellites gauches</u>.

Soit T un foncteur covariant additif. Pour toute suite exacte

$$0 \to M \to P \to A \to 0 ,$$

P projectif, on considère

$$LT(A) = \text{Noyau } (T(M) \to T(P)) ,$$

et on démontre que ceci dépend seulement du module A et pas de la suite exacte. LT devient lui-même un foncteur covariant additif qu'on appelle <u>satellite gauche</u> de T. Par itération, on obtient les satellites successifs $L_n T$

(où $L_1\ T = LT$) .

Pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ on obtient un homomorphisme canonique $LT(A'') \to T(A')$ qui donne naissance à une suite

$$(S)\quad \begin{cases} \to L_n\ T(A') \to L_n\ T(A) \to L_n\ T(A'') \to L_{n-1}\ T(A') \to \cdots \\ \cdots \to LT(A'') \to T(A') \to T(A) \to T(A'') \end{cases}$$

THÉORÈME. - Si le foncteur T est tel que la suite $T(A') \to T(A) \to T(A'')$ soit exacte (pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$), alors la suite (S) est exacte.

4. Homomorphismes.

Soit B un Λ-module (à gauche) fixe. Pour tout Λ-module (à gauche) A on considère le groupe abélien

$$T(A) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}\ (A\ ,\ B)$$

de tous les Λ-homomorphismes $A \to B$. Pour tout Λ-homomorphisme $\varphi : A \to A'$, on a un Z-homomorphisme $T(\varphi) : T(A') \to T(A)$. On a T (identité) = identité, $T(\varphi \circ \psi) = T(\psi) \circ T(\varphi)$, $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$.

En faisant une abstraction on arrive à la notion de foncteur contravariant additif, dont T est un exemple.

5. Satellites droits.

Soit T un foncteur contravariant additif. Pour toute suite exacte $0 \to N \to P \to A \to 0$: P projectif, on considère

$$RT(A) = T(N)/\mathrm{Im}(T(P) \to T(N))$$

et on démontre que ceci dépend seulement de A . Le foncteur RT et ses itérés $R^n\ T$ sont les satellites droits de T .

Pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ on a un homomorphisme canonique $T(A') \to RT(A'')$ qui donne la suite

$$(S')\quad \begin{cases} T(A'') \to T(A) \to T(A') \to RT(A'') \to \cdots \\ \cdots \to R_{n-1}\ T(A') \to R_n\ T(A'') \to R_n\ T(A) \to R_n\ T(A') \to \cdots \end{cases}$$

THÉORÈME. - Si le foncteur T est tel que la suite $T(A'') \to T(A) \to T(A')$ soit toujours exacte, alors la suite (S') est exacte.

Pareillement, en considérant les suites exactes $0 \to A \to Q \to N \to 0$ avec Q injectif, on arrive à définir les satellites droits $R^n T$ d'un foncteur covariant, et les satellites gauches $L_n T$ d'un foncteur contravariant.

6. Foncteurs balancés.

Les expressions $B \otimes_\Lambda A$ et $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B)$ peuvent être aussi considérées comme foncteurs de la variable B. On démontre que les satellites par rapport à B comme variable sont les mêmes que par rapport à A.

Un foncteur de deux variables qui donne les mêmes foncteurs satellites par rapport à l'une ou l'autre des variables s'appelle foncteur balancé.

7. Homologie et cohomologie des groupes.

Soit π un groupe, et soit Λ son algèbre (sur Z). On regarde Z comme Λ-module d'une manière triviale.

THÉORÈME. - Pour tout Λ-module (à droite) A les satellites $L_n T(A)$ du foncteur

$$T(A) = A \otimes_\Lambda Z$$

coïncident avec les groupes d'homologie $H_n(\pi, A)$.

THÉORÈME. - Pour tout Λ-module (à gauche) A les satellites $R^n T(A)$ du foncteur

$$T(A) = \mathrm{Hom}_\Lambda(Z, A)$$

coïncident avec les groupes de cohomologie $H^n(\pi, A)$.

BIBLIOGRAPHIE

CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton math. Series, 19).

[Juillet 1958]