PIERRE SAMUEL

La théorie des correspondances birationnelles selon Zariski

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 6, p. 33-37
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__33_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1948)

LA THÉORIE DES CORRESPONDANCES BIRATIONNELLES SELON ZARISKI

par Pierre SAMUEL

1. Soit K un corps. Une variété algébrique projective V est représentée par un idéal premier homogène $\mathfrak{p}$ de l'anneau de polynomes $K[Y_0, \dots, Y_n]$. L'anneau $\mathcal{O} = K[Y_0, \dots, Y_n]/\mathfrak{p} = K[\eta_0, \dots, \eta_n]$ (où η_i est la classe de Y_i mod $\mathfrak{p}$) sera appelé l'anneau de coordonnées homogènes de V. Par passage aux quotients il existe dans $\mathcal{O}$ une notion de degré ; tout élément de $\mathcal{O}$ est somme d'éléments homogènes, et ceci de façon unique.

Le corps des quotients $K(\eta_0, \dots, \eta_n)$ de $\mathcal{O}$ admet également une notion de degré. Ses éléments de degré zéro forment un sous-corps $\Sigma = K(\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_n}{\eta_0})$, appelé le corps des fractions rationnelles sur V ; son degré de transcendance r est appelé la dimension de V. Le corps $K(\eta_0, \dots, \eta_n)$ est une extension transcendante simple $\Sigma(\eta_0)$ de Σ.

Les sous-variétés de V correspondent aux idéaux premiers homogènes de $\mathcal{O}$ (inclusions inversées). L'idéal $(\eta_0, \dots, \eta_n)$ de $\mathcal{O}$, cependant, ne correspond à aucune sous-variété de V ; on l'appelle l'idéal irrelevant. Soit $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de la sous-variété W ; le sous-anneau $Q(W)$ de Σ composé des quotients $\frac{f(\eta)}{g(\eta)}$ où f et g sont des formes de même degré et où $g(\eta) \notin \mathfrak{q}$, s'appelle l'anneau des quotients de W. Si $\eta_0 \notin \mathfrak{q}$ (c'est-à-dire si W n'est pas "à l'infini"), $Q(W)$ est l'anneau des quotients de $\bar{\mathcal{O}} = K[\frac{\eta_1}{\eta_0}, \dots, \frac{\eta_n}{\eta_0}]$ ("anneau de coordonnées non homogènes") par l'idéal premier $\bar{\mathfrak{q}}$ engendré par les $F_s(\eta)/\eta_0^s$ (où $F_s(\eta) \in \mathfrak{q}$, et est une forme de degré s) ; l'idéal $\mathfrak{m}$ engendré par $\bar{\mathfrak{q}}$ dans $Q(W)$ est maximal, et contient tout idéal non trivial de $Q(W)$ ($Q(W)$ est donc un "anneau local"). La dimension de W est égale au degré de transcendance sur K du corps quotient $Q(W)/\mathfrak{m}$. Les relations "$Q(W) \subset Q(W_1)$" et "$W \subset W_1$" sont équivalentes.

2. Nous considérerons principalement les valuations v du corps Σ. Une valuation v de Σ (sur K) est une application v de Σ^* sur un groupe abélien totalement ordonné Γ, noté additivement, et appelé le groupe des valeurs de v,

application telle que

(1) $$v(xy) = v(x) + v(y)$$

(2) $$v(x+y) \geq \min(v(x)\ ,\ v(y))$$

(3) $$v(\alpha) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in K^*$$

On convient d'écrire $v(0) = +\infty$, $+\infty$ étant un élément qu'on adjoint à Γ en convenant que $\gamma < +\infty$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Les éléments $x \in \Sigma$ tels que $v(x) \geq 0$ forment un sous-anneau R_v , appelé l'anneau de valuation ; ceux tels que $v(x) > 0$ forment un idéal maximal $\mathfrak{v}$ de R_v , appelé l'idéal de valuation. $R_v/\mathfrak{v} = \Sigma_v$ est un corps appelé le corps résiduel de v ; d'après (3) Σ_v contient un corps isomorphe à K , que nous identifierons à K ; le degré de transcendance ρ de Σ_v sur K s'appelle la dimension de la valuation v ; on a évidemment $\rho \leqslant r-1$. Une valuation de dimension $r-1$ s'appelle un diviseur ; une valuation de dimension zéro s'appelle une place. On démontre que les diviseurs de Σ sont les valuations dont le groupe des valeurs est isomorphe à Z .

Il est clair que si R_v est un anneau de valuation, et si x est un élément quelconque de Σ , soit x , soit $1/x$ appartient à R_v . Cette propriété caractérise les anneaux de valuation R (si U est le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de R , Σ^*/U peut être muni d'une structure de groupe abélien totalement ordonné, et joue le rôle de Γ) .

Si v_1 est une valuation du corps résiduel Σ_v , de groupe des valeurs Γ_1 , le sous-anneau R de R_v composés des éléments x dont la classe $\bar{x}$ dans Σ_v appartient à R_{v_1} , est un anneau de valuation de Σ , donnant lieu à une valuation ω . On dit que ω est composée de v . Le groupe des valeurs de ω est isomorphe au produit $\Gamma \times \Gamma_1$ ordonné lexicographiquement.

3. Soit v une valuation de Σ . Parmi les $v(\frac{\eta_i}{\eta_s})$ choisissons un élément maximal, soit par exemple $v(\frac{\eta_n}{\eta_o})$; alors $v(\frac{\eta_i}{\eta_o}) \geq 0$ sinon $v(\frac{\eta_n}{\eta_i}) > v(\frac{\eta_n}{\eta_o})$. Ceci veut dire que l'anneau de coordonnées non homogènes $\bar{\mathfrak{O}} = K[\frac{\eta_1}{\eta_o}, \ldots, \frac{\eta_n}{\eta_o}]$ est contenu dans l'anneau de valuation R_v ; l'idéal de valuation $\mathfrak{v}$ induit sur $\bar{\mathfrak{O}}$ un idéal premier $\bar{\mathfrak{q}}$; $\bar{\mathfrak{q}}$ détermine dans $\mathfrak{O}$ un idéal premier homogène $\mathfrak{q}$; la sous-variété $W \subset V$ correspondant à $\mathfrak{q}$ est appelé le centre de la valuation v . Cette définition ne dépend pas du choix de $\frac{\eta_n}{\eta_o}$; elle veut dire en effet que

$Q(W) \subset R_U$ et que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{v}$; on peut aussi caractériser W comme étant la sous-variété maximale dont l'anneau des quotients soit contenu dans R_v . On déduit de ceci :

a) Si v_1 est composée de v , alors centre $v_1 \subset$ centre v .

b) La dimension du centre de v est inférieure à la dimension de la valuation v (un diviseur est dit de première ou de seconde espèce suivant que son centre est de dimension $r-1$ ou $< r-1$).

4. On démontre, au moyen du théorème de Zorn, que tout sous-anneau propre A de Σ (contenant K) est contenu dans au moins un anneau de valuation R_v tel que $\mathfrak{v} \cap A$ soit un idéal premier $\mathfrak{p}$ ($\neq \{0\}$) donné à l'avance de A . En particulier, toute sous-variété W de V est le centre d'au moins une valuation (prendre $t = Q(W)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$) . De plus, si $W \subset W_1 \subset V$, et si v_1 est une valuation de centre W_1 , il existe une valuation v , composée de v_1 , et de centre W .

On démontre également que l'intersection des anneaux de valuation contenant A est la <u>fermeture intégrale</u> A^* de A dans Σ .

5. On dit que deux variétés V et V' sont en <u>correspondance birationnelle</u> si leurs corps de fractions rationnelles Σ et Σ' sont isomorphes sur K . Nous identifierons alors Σ' à Σ .

<u>Nous dirons que deux sous-variétés</u> W <u>et</u> W' <u>de</u> V <u>et</u> V' <u>sont correspondantes, s'il existe une valuation</u> v <u>de</u> Σ <u>ayant</u> W <u>pour centre sur</u> V , <u>et</u> W' <u>pour centre sur</u> V' . Nous écrirons symboliquement $W \,T\, W'$.

W étant donnée, il existe au moins une W' telle que $W \,T\, W'$.

Si $W \subset W_1 \subset V$, et si $W_1 \,T\, W'_1$, il existe $W' \subset W'_1$ telle que $W \,T\, W'$.
Si W'_1 est un point P' , on a donc $W \,T\, P'$ pour toute $W \subset W_1$.

La correspondance T n'est en général ni biunivoque, ni même univoque sur V .
Mais, si $W \,T\, W'$ et si $Q(W') \subset Q(W)$, alors W' est la seule sous-variété de V' qui corresponde à W .

Nous dirons qu'une correspondance birationnelle est <u>régulière</u> si elle est biunivoque.

6. Les correspondances birationnelles prennent un aspect plus simple si on les applique à des variétés normales ou localement normales. Rappelons les faits principaux relatifs à ces variétés.

Une variété V est dite <u>localement normale</u> si tous les anneaux $Q(W)$ sont intégralement fermés (il suffit pour cela que tous les $Q(P)$, où les P sont des points, le soient). On dit que V est <u>localement normale le long de</u> W si $Q(W)$ est intégralement fermé.

Etant donnée une variété projective quelconque V, le fait que la fermeture intégrale de l'anneau de coordonnées homogènes $\mathfrak{O}$ de V est un $\mathfrak{O}$-module de type fini, permet d'associer à V une variété localement normale V', birationnellement équivalente à V, déterminée à une correspondance birégulière près, et dont nous décrirons tout à l'heure quelques propriétés. La variété V' est appelé le <u>modèle normal dérivé</u> de V.

On montre que les sous-variétés W le long desquelles V est localement normale sont celles dont l'idéal $\mathfrak{q}$ ne contient pas le conducteur $\mathfrak{c}$ de la fermeture intégrale de $\mathfrak{O}$. Une variété est donc localement normale si et seulement si $\mathfrak{c} = \mathfrak{O}$ ou si $\mathfrak{c}$ est un idéal irrelevant.

Les sous-variétés W_i' du modèle normal V' dérivé de V, qui correspondent à la sous-variété W de V sont en nombre fini, et de même dimension que W. Si $\mathfrak{S}^*$ est la fermeture intégrale de $\mathfrak{S} = Q(W)$, et si $\mathfrak{m}_1^* \dots \mathfrak{m}_v^*$ sont les idéaux premiers de $\mathfrak{S}^*$, tels que $\mathfrak{m}_i^* \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{m}$, on a $Q(W_i') = \mathfrak{S}^*_{\mathfrak{m}_i^*}$. Ceci montre que si V est localement normale le long de W, il correspond à W une seule sans variété W' et $Q(W) = Q(W')$; ainsi, en dehors de l'ensemble algébrique défini par le conducteur $\mathfrak{c}$, la correspondance birationnelle entre V et V' est biunivoque.

Dans l'autre sens, comme $Q(W') \supset Q(W)$ pour tout $W \subset V$, W est la <u>seule</u> variété qui corresponde à W' (cf : projection d'une courbe gauche sans points singuliers). Enfin deux modèles normaux dérivés de V sont en correspondance régulière.

7. Nous nous bornerons désormais aux correspondances birationnelles entre deux variétés <u>localement normales</u> V et V'.

Nous dirons que $W \subset V$ est $\left\{\begin{array}{l}\text{régulière}\\ \text{irrégulière}\\ \text{fondamentale}\end{array}\right.$ s'il existe $W' \subset V'$ telle

que $W \; T \; W'$ et que $\left\{\begin{array}{l} Q(W) = Q(W') \\ Q(W) \supset Q(W') \text{ et } Q(W) \neq Q(W') \\ Q(W) \not\supset Q(W') \end{array}\right.$

Les variétés régulières et irrégulières W sont celles auxquelles il ne correspond qu'<u>une seule</u> variété W'. A une variété fondamentale W correspond une infinité de variétés W' . La dimension d'une variété fondamentale ne peut excéder r-2 .

BIBLIOGRAPHIE

1°) Le présent exposé suppose connu l'ouvrage de

VAN DER WAERDEN (B.L.). - Algebra. - Berlin, Springer, 1955 (Grundlehren der Math. Wissenschaften, Bd 33 und 34 ; 3te Auflage der Modernen Algebra).

Pour les notations, voir :

BOURBAKI (Nicolas). - Eléments de Mathématique, Livre II : Algèbre. - Paris, Hermann, 1942-1955 (Act. scient. et ind. n° 934-1144, 1032-1236, 1044, 1102, 1179).

2°) Références aux ouvrages de Zariski :

ZARISKI (Oscar). - Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. math. Soc., t. 53, 1943, p. 490-542.

ZARISKI (Oscar). - Normal varieties and birational correspondences, Bull. Amer. math. Soc., t. 48, 1942, p. 402-413.

3°) Pour la théorie des valuations :

KRULL (W.). - Idealtheorie. - Berlin, Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, Vierter Band, n° 3).

MACLANE (S.) and SCHILLING (O.F.G.). - Zero-dimensional branches of rank one on algebraic varieties, Ann. of Math., t. 40, 1939, p. 507-520.

4°) Pour la normalisation des variétés :

ZARISKI (Oscar). - Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties, Amer. J. of Math., t. 61, 1939, p. 249-294.

WEIL (André). - Arithmétique et géométrie sur les variétés algébriques. - Paris, Hermann, 1935 (Act. scient. et ind. n° 205 ; exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand n° 11).

WEIL (André). - Foundations of algebraic geometry. - New York, Amer. math. Soc., 1946 (Amer. math. Soc. Coll. Publ. vol. 29).
