LUC GAUTHIER

Quelques variétés usuelles en géométrie algébrique

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 37, p. 307-311

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__307_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1950)

QUELQUES VARIÉTÉS USUELLES EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par Luc GAUTHIER

N. B. - Pour les notations et définitions, il sera utile de se reporter à CHEVALLEY [2], p. 1 et 2, et [3], p. 1 : courbe algébrique, place, diviseur, classe de diviseurs, théorème de Riemann-Roch, classe canonique ; variété algébrique, cycle, cycle positif, diviseur, équivalence.

1. Variétés de Veronese et Bordiga.

Soient S_r/K un espace projectif à r dimensions défini sur le corps K, et (X) un ensemble de $r+1$ indéterminées ; soit $P_n(X)$ un polynôme homogène en (X) de degré n, défini à un facteur $\neq 0$ près, les rapports de coefficients étant dans K. La variété $P_n(\xi) = 0$ du dual S_r^*/K est appelée forme tangentielle de classe n.

L'ensemble des formes tangentielles de classe n constitue un espace projectif S_N/K de dimension $N = \binom{n+r}{r} - 1$, un point de cet espace ayant pour coordonnées les coefficients de $P_n(X)$.

Dualement, une forme ponctuelle de degré n : $P_n(X) = 0$ de S_r/K est représentée par un point de S_N^*/K c'est-à-dire par un hyperplan de S_N/K.

Un cycle positif de dimension 0 et de degré n de S_r/K, constitué des points $M_k(x_{i,k})$ affectés des coefficients a_k, soit $\sum a_k M_k$ avec $\sum a_k = n$ et $a_k \geqslant 0$, est associé dans S_r^*/K à la forme tangentielle $\prod_k (\sum_i \xi_i x_{i,k})^{a_k} = 0$. Cette forme étant représentée dans S_N/K, on obtient un modèle projectif sur le corps K, de l'ensemble des cycles positifs de S_r/K ayant une signature (a_k) donnée.

Toutes ces variétés sont des sous-variétés de celle qui correspond à la signature $(1, 1, 1, 1, \ldots)$, dite variété de Bordiga B_{nr}, qui est aussi un modèle projectif du produit symétrique $[S_r/K]^n$. Celle qui correspond à la signature (n) est dite variété de Veronese $V_{n,r}$.

Toutes ces variétés sont rationnelles, $V_{n,r}$ est linéaire, B_{nr} est un modèle minimum.

B_{nr} admet un groupe continu G, à $r(r + 2)$ paramètres, d'automorphismes projectifs, qui correspond au groupe projectif de S_r/K. Ce groupe G n'est pas transitif : il laisse invariantes toutes les sous-variétés correspondant aux diverses signatures, sous-variétés qui sont singulières sur B_{nr}. G est transitif sur $V_{n,r}$.

Si a est le coefficient d'un point M dans un cycle positif de S_r, M admet un transformé M' sur $V_{n,r}$ auquel on associe l'espace projectif de dimension $d(a) = \binom{a+r}{r} - 1$ osculateur à $V_{n,r}$ (notion indépendante de M' vu la transitivité de G). Avec cette convention, les espaces osculateurs à $V_{n,r}$ aux points M'_k images des points M_k d'un cycle se coupent toujours en un point unique, qui appartient à B_{nr} et est l'image du cycle. Cette construction permet réciproquement, connaissant un point de B_{nr}, de construire le cycle dont il est l'image.

Si W est une variété algébrique de S_r/K, il suffit alors de prendre sa transformée sur $V_{n,r}$ et de lui appliquer la construction ci-dessus pour obtenir une représentation sur le corps K, au moyen d'une sous-variété de B_{nr}, de l'ensemble des cycles positifs de dimension zéro et de degré n appartenant à W.

2. Variétés de Grassmann.

Soit encore S_r/K un espace projectif à r dimensions défini sur le corps K, par la relation d'équivalence classique, à partir de l'espace vectoriel E_{r+1}/K privé de son vecteur nul.

Soit $\mathcal{L}_{p+1}(X, Y, \ldots)$ une forme $(p + 1)$-linéaire alternée, définie à un facteur différent de zéro près, les rapports des coefficients étant dans K. L'équation $\mathcal{L}_{p+1}(x, y, \ldots) = 0$ définit sur S_r/K un $(r - p)$-complexe linéaire.

L'ensemble des complexes linéaires de S_r/K constitue un espace projectif S_R/K de dimension $R = \binom{r+1}{p+1} - 1$, un point de cet espace ayant pour coordonnées les coefficients de $\mathcal{L}_{p+1}$.

Un $(p + 1)$-vecteur décomposable de $\bigwedge^{p+1} E^*_{r+1}/K$ définit un sous-espace projectif S_p de S_r, qui est ainsi représenté par un point de S^*_R/K. La variété qui dans S^*_R/K représente ainsi d'une manière biunivoque sans exception les S_p/K de S_r/K est dite grassmannienne $G_{r,p}$.

La variété $G_{r,p}$ a pour dimension $(p + 1)(r - p)$; elle est rationnelle et c'est un modèle minimum. $G_{r,p}$ admet un groupe continu transitif, à $r(r + 2)$

paramètres, d'automorphismes projectifs qui correspond au groupe projectif de S_r/K. Il en résulte, en particulier, que $G_{r,p}$ est dépourvue de points singuliers.

KLEIN a démontré, pour $r = 3$, $p = 1$, et SEVERI, dans le cas général, la propriété importante suivante : $G_{r,p}$ ne contient comme diviseurs positifs que ses intersections avec les formes de $S^{\star}_R/K$. La démonstration est ainsi conçue :

1° Il est possible de définir sur $G_{r,p}$ privée d'une sous-variété non maximale une fibration F rectiligne rationnelle.

2° Un diviseur positif $\mathfrak{a}$ de $G_{r,p}$ découpe sur une droite appartenant à $G_{r,p}$ qu'il ne contient pas, un diviseur de degré strictement positif ; pour F, ce degré ne dépend pas de la fibre choisie : on l'appelle l'ordre de $\mathfrak{a}$.

3° Si deux diviseurs positifs $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ de $G_{r,p}$ ont même ordre, ils sont équivalents.

Il suffit alors de prendre pour $\mathfrak{a}_1$ un diviseur quelconque et pour $\mathfrak{a}_2$ une section hyperplane de $G_{r,p}$ affectée d'un coefficient égal à l'ordre de $\mathfrak{a}_1$ pour que le théorème en résulte.

La même propriété est valable aussi pour la variété de Bordiga B_{nr}.

3. Coordonnées de Chow.

Le théorème de Severi assure la possibilité de représenter un complexe algébrique de S_r/K d'ordre n au moyen d'une forme de S_R/K de degré n, définie modulo $G_{r,p}$. En appliquant aux formes de degré n de S_R/K la représentation de Veronese, dans $S^{\star}_N/K$, les formes contenant $G_{r,p}$ sont représentées par les points d'un espace projectif Γ/K et une forme définie modulo $G_{r,p}$ est représentée par un point pris dans $S_{\bar{N}}/K$ supplémentaire de Γ/K dans $S^{\star}_N/K$.

Etant donnée une variété algébrique irréductible W de S_r/K de dimension d et de degré n, l'ensemble des S_p où $p = r - d - 1$, qui ont avec W un cycle de dimension zéro commun, est un complexe algébrique d'ordre n, représenté dans S_R/K par une forme irréductible de degré n, $f = 0$.

Tout cycle positif de dimension donnée d et de degré n de S_r/K, $\sum a_k W_k$ avec $\sum a_k \deg W_k = n$, associé dans S_R/K à la forme $\prod_k f_k^{a_k} = 0 \pmod{G_{r,p}}$ est ainsi associé à un point de $S_{\bar{N}}/K$ dont les coordonnées projectives sont dites coordonnées de Chow du cycle.

Si le point associé à un cycle de S_r/K décrit dans $S_{\overline{N}}/K$ une variété algébrique, on dit que le cycle engendre dans S_r/K un système algébrique.

Soit dans S_r/K une variété algébrique U qui admet une fibration G au moyen de sous-variétés algébriques de dimension d et de degré n. En considérant ces fibres comme des cycles de S_r/K on peut associer à chaque fibre d'une manière biunivoque un point de $S_{\overline{N}}/K$, dont le lieu V, dit "variété associée" est une représentation sur K de la transversalle à la fibration. La correspondance entre un point (x) de U et le point (y) associé à la fibre G(y) qui passe en (x) est une transformation rationnelle T dite "transformation associée" et CHOW démontre dans son mémoire de 1950 que, si G' est une composante simple de G(y), et si T est régulière au point (x) générique de G', U et la variété produit $V \times G'$ sont analytiquement équivalentes en (x) et (y, x), c'est-à-dire ont des anneaux locaux complétés isomorphes.

4. Variétés de Jacobi.

Soit une courbe algébrique C définie dans S_r/K par un modèle sans singularité (clôture éventuelle de K).

L'ensemble des diviseurs positifs $\mathfrak{a}$ de degré $d > 2g - 2$ est représenté par la sous-variété C^d/K de B_{dr}. D'après le théorème de Riemann-Roch, un diviseur canonique n'est jamais multiple d'un diviseur $\mathfrak{a}$: la dimension (projective) de la classe de $\mathfrak{a}$ est donc $d - g$, et les classes des diviseurs positifs de degré d définissent sur C^d/K une fibration au moyen de variétés linéaires L de dimension $d - g$, et de degré d.

La variété associée J à cette fibration, C^d/K et L étant dépourvues de singularités, est elle-même sans singularités. On l'appelle la Jacobienne de C.

Si $\mathfrak{b}$ est un diviseur positif de degré $d - g$ de C, l'ensemble des diviseurs $\mathfrak{c}$ positifs de degré g de C a les propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ est un diviseur positif de degré d, soit $\mathfrak{a}$.

2° La condition nécessaire et suffisante pour que deux diviseurs $\mathfrak{c}$ soient équivalents est que les diviseurs $\mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ le soient.

La variété J représente donc biunivoquement les classes de diviseurs positifs de degré g, ce qui est la définition classique de la jacobienne.

Choisissons $d = 2g$ et fixons une classe $(\mathfrak{a})$: la relation entre classes $(\mathfrak{c}_1) + (\mathfrak{c}_2) = (\mathfrak{a})$ définit un automorphisme birationnel involutif de J.

En faisant varier $(\mathfrak{a})$ arbitrairement, on engendre un groupe G abélien continu, à g paramètres, d'automorphismes de J, et la variété du groupe est la variété des classes $(\mathfrak{a})$ c'est-à-dire J elle-même.

Nous avons ainsi donné une construction sur le corps K de la jacobienne J (modèle sans singularité) d'une courbe algébrique C donnée par un modèle projectif sans singularité. On comparera utilement cette construction avec celle proposée par W. L. CHOW.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORDIGA (Giovanni). - Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano, Ann. di Mat. pura ed appl., Seria 3, t. 27, 1918, p. 1-40.

[2] CHEVALLEY (Claude). - L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p, I., Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49, exposé n° 3.

[3] CHEVALLEY (Claude). - L'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions algébriques de caractéristique p, II., Séminaire Bourbaki, t. 1, 1948/49, exposé n° 9.

[4] CHOW (Wei-Liang). - The jacobian variety of an algebraic curve, Amer. J. of Math., t. 76, 1954, p. 453-476.

[5] CHOW (W. L.) and VAN DER WAERDEN (B. L.). - Zur algebraischen Geometrie, IX : Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen, t. 113, 1937, p. 692-704.

[6] EHRESMANN (Charles). - Sur la topologie de certains espaces homogènes, Annals of Math., t. 35, 1934, p. 396-443 (Thèse Sc. math. Paris. 1934).

[7] SEVERI (Francesco). - Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare, Ann. di Mat. pura ed appl., Seria 3, t. 24, 1915, p. 89-120.

[8] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Einführung in die algebraische Geometrie. - Berlin, Springer, 1939 (Die Grundlehren der math. Wiss., 51).

[Février 1959]