

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

SAMUEL EILENBERG

## **Exposition des théories de Morse et Lusternik-Schnirelmann**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1952, exp. n° 36, p. 301-306

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1948-1951\\_\\_1\\_\\_301\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__301_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXPOSITION DES THÉORIES DE MORSE ET LUSTERNIK-SCHNIRELMANN

par Samuel EILENBERG

1. Niveaux critiques.

Soient  $\Omega$  un espace topologique et  $J$  une fonction réelle définie sur  $\Omega$ , telle que  $-\infty < J(\omega) \leq +\infty$  pour tout  $\omega \in \Omega$ . Nous définissons les ensembles  $(J \leq a)$ ,  $(J < a)$  par les conditions  $J(\omega) \leq a$  et  $J(\omega) < a$  respectivement.

Nous supposons que l'on s'est donné une théorie de l'homologie  $H$  dans laquelle les groupes d'homologie  $H_q(X, A)$  (de l'espace  $X$  modulo un sous-ensemble  $A$ ) sont des modules sur un anneau d'intégrité fixé  $D$ . Nous entendons par "nombre de Betti"  $R_q(X, A)$  le rang du module  $H_q(X, A)$  sur  $D$ .

Axiomes portant sur  $\Omega$ ,  $J$  et  $H$ .

Axiome  $H_1$ . - Pour tout  $x \in H_q(\Omega)$ ,  $x \neq 0$ , il y a un nombre réel  $c < +\infty$  tel que  $x$  est dans l'image de

$$H_q(J \leq c) \longrightarrow H_q(\Omega)$$

mais pas dans l'image de

$$H_q(J < c) \longrightarrow H_q(\Omega).$$

Axiome  $H_2$ . - Pour tout  $x \in H_q(J < a)$ ,  $x \neq 0$ ,  $a \leq +\infty$ , il y a un nombre  $c < a$  tel que  $x$  est dans l'image de

$$H_q(J \leq c) \longrightarrow H_q(J < a)$$

mais pas dans l'image de

$$H_q(J < c) \longrightarrow H_q(J < a).$$

Axiome  $H_3$ . - Pour tout  $x \in H_q(J \leq a)$ ,  $x \neq 0$ , qui est dans le noyau de

$$H_q(J \leq a) \longrightarrow H_q(\Omega),$$

il y a un nombre  $c$  tel que  $a < c < +\infty$ , et que  $x$  est dans le noyau de

$$H_q(J \leq a) \longrightarrow H_q(J \leq c),$$

mais pas dans le noyau de

$$H_q(J \leq a) \longrightarrow H_q(J < c).$$

Un nombre  $c$  est dit niveau-critique si :

$$H_q(J \leq c, J < c) \neq 0.$$

On définit alors les nombre typiques :

$$m_q(c) = R_q(J \leq c, J < c)$$

$$M_q = \sum m_q(c).$$

Sous ces hypothèses, on obtient plusieurs théorèmes dont voici des exemples :

THÉORÈME 1. - Si pour tout  $a < +\infty$ , il existe seulement un nombre fini de valeurs  $q$ -critiques  $c < a$ , alors :

$$R_q(\Omega) \leq M_q.$$

THÉORÈME 2. - Supposons que, pour  $i = 0, 1, \dots, q+1$ , il n'y ait qu'un nombre fini de valeurs  $i$ -critiques. Supposons en outre que les nombres  $M_0, \dots, M_{q+1}$  soient finis. Alors les nombres  $R_0, \dots, R_q$  sont finis, et l'on a

$$\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^{q-i} M_i \leq \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} R_i(\Omega) \leq \sum_{i=0}^q (-1)^{q-i} M_i.$$

On peut obtenir des théorèmes plus précis en introduisant la décomposition :

$$m_q(c) = \ell_q(c) + n_q(c),$$

où  $\ell_q(c)$  et  $n_q(c)$  désignent les rangs des applications :

$$H_q(J \leq c) \longrightarrow H_q(J \leq c, J < c),$$

$$H_q(J \leq c, J < c) \longrightarrow H_{q-1}(J < c).$$

2. Points stationnaires.

Nous supposons dans toute la suite que  $J$  est continue et que  $(J \leq a)$  est compact pour tout  $a < +\infty$ . Nous supposons en outre que l'on s'est donné un ensemble  $G \subset \Omega$ , appelé ensemble des points stationnaires.

Une déformation  $D$  d'un sous-ensemble  $X$  de  $\Omega$  est une application continue  $D : X \times I \rightarrow \Omega$  ( $I = [0, 1]$ ) telle que  $D(x, 0) = x$  pour tout  $x \in X$ . Nous dirons que  $D$  est une  $J$ -déformation si  $J(D(x, t)) \leq J(x)$  pour tout  $x \in X$  et  $t \in I$ .

Axiomes portant sur  $\Omega$ ,  $J$  et  $G$ .

Axiome  $D_1$ . - Pour tout  $a < +\infty$ , il y a une  $J$ -déformation  $D$  de  $(J \leq a)$  telle que :

$$D(g, t) = g \text{ pour tout } g \in G \cap (J \leq a), t \in I, \text{ et}$$

$$J(D(\omega, 1)) < J(\omega) \text{ pour tout } \omega \in (J \leq a) \cap \{G\}.$$

Axiome  $D_2$ . - L'ensemble  $G$  est discret.

Axiome  $D_3$ . - Pour tout  $g \in G$ , il y a un voisinage  $W$  de  $g$  et une  $J$ -déformation de  $W$  telle que :

$$D(g, t) = g \text{ pour tout } t \in I$$

$$D(W, 1) \subset (J < J(g)) \cup \{g\}$$

En ce qui concerne la théorie de l'homologie, nous supposerons qu'elle est à supports compacts, c'est-à-dire que l'axiome suivant est rempli :

Axiome SC. - Pour tout  $x \in H_q(X, A)$  il y a une paire formée d'ensembles compacts  $(X', A') \subset (X, A)$  telle que  $x$  est dans l'image de

$$H_q(X', A') \rightarrow H_q(X, A).$$

THÉORÈME 3. - Si les axiomes  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et SC sont vérifiés, alors les axiomes  $H_1, H_2, H_3$  le sont aussi.

Pour tout point  $\omega \in \Omega$ , on définit  $\Omega_\omega = (J < J(\omega))$  et l'on considère les nombres typiques

$$m_q(\omega) = R_q(\Omega \cup \{\omega\}, \Omega \cup \omega) .$$

On montre alors  $m_q(\omega) \neq 0$  entraîne  $\omega \in G$  et que, pour tout niveau  $c$ ,

$$m_q(c) = \sum m_q(g) , \quad g \in G , J(g) = c .$$

### 3. Catégories.

Soit  $\Omega$  un espace localement compact. Une fonction  $c$ , associant à tout sous-ensemble compact  $A$  de  $\Omega$  un entier  $c(A) > 0$ , est dite une catégorie si les axiomes suivants sont remplis :

(C.1) Si  $A$  est réduit à un point,  $c(A) = 1$ .

(C.2)  $A \subset B$  entraîne  $c(A) \leq c(B)$ .

(C.3.)  $c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$ .

(C.4)  $A \cap B = \emptyset$  entraîne  $c(A \cup B) = \sup [c(A), c(B)]$ .

(C.5) Si  $D$  est une déformation de  $\Omega$ , alors  $c(A) \leq c(D(A, 1))$ .

(C.6) Pour tout  $A$  compact, il existe un voisinage compact  $U$  de  $A$  tel que  $c(U) = c(A)$ .

On définit alors  $c'(\Omega)$  par

$$c'(\Omega) = \sup c(A) ,$$

où  $A$  parcourt tous les sous-ensembles compacts de  $\Omega$ .

Premier exemple : la catégorie  $k$ . - Supposons  $\Omega$  localement contractile. Un ensemble  $A \subset \Omega$  sera appelé homotope à zéro s'il existe une déformation  $D$  de  $\Omega$  telle que  $D(A, 1)$  soit un ensemble fini. Définissons  $k(A)$  comme le plus petit entier  $n$  tel que  $A$  soit la réunion de  $n$  ensembles homotopes à zéro. On peut montrer que  $k$  est la plus grande de toutes les catégories possibles sur  $\Omega$ .

Second exemple : la hauteur  $h$ . - Pour un anneau donné  $R$ , considérons l'anneau de cohomologie de Čech  $H(X)$  à coefficients dans  $R$ , et notons  $H^+(X)$  l'idéal de tous les éléments de degré strictement positif. Si  $A$  est une partie compacte de  $\Omega$ , nous noterons par  $[A]$  l'image de  $H^+(\Omega) \rightarrow H^+(A)$ , et nous supposons que  $[A]$  admet un nombre fini de générateurs. Alors  $[A]$  est nilpotent, et nous noterons  $h(A)$  le plus petit entier  $h$  tel que  $[A]^h = 0$ . On montre alors que  $h$  est une catégorie.

Nous supposons maintenant que  $J$  est continue, que  $(J \leq a)$  est compact et que l'axiome  $D_1$  est vérifié. Soit  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \dots$  la suite (finie ou infinie) de tous les  $\gamma_i$  tels que

$$\gamma_0 = \min J, \quad c(J \leq a) < c(J \leq \gamma_i) \quad \text{pour } a < \gamma_i, \quad i > 0.$$

THÉORÈME 4. - Les ensembles  $G_i = G \cap (J = \gamma_i)$  ne sont pas vides et

$$c'(\Omega) \leq \sum c(G_i).$$

#### 4. Fonctions sur les variétés.

Soit  $\Omega$  une variété à  $n$  dimensions (compacte ou non), de classe  $C^2$ , et soit  $J$  une fonction réelle de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ , telle que  $(J \leq a)$  soit compact pour tout  $a$ . Définissons  $G$  comme l'ensemble des points où la différentielle de  $J$  est nulle. En déformant chaque point suivant le gradient de  $J$  (ce qui a un sens, si l'on a muni la variété d'une structure d'espace de Riemann), on démontre l'axiome  $D_1$ . Ainsi, on peut appliquer la théorie de Lusternik-Schnirelmann.

Si l'on suppose en outre que  $G$  est discret (axiome  $D_2$ ), alors on démontre l'axiome  $D_3$  et les résultats additionnels suivants sur les nombres typiques  $m_q(g)$  d'un point stationnaire  $g$  :

- (1)  $m_q(g) = 0$  pour  $q > n$ .
- (2)  $m_q(g)$  est fini.
- (3) Si  $g$  est minimum relatif, alors  $m_0(g) = 1$  et  $m_q(g) = 0$  pour tout  $q \neq 0$ .
- (4) Si  $g$  est un maximum relatif, alors  $m_n(g) = 1$  et  $m_q(g) = 0$  pour tout  $q \neq n$ .
- (5) Si  $g$  n'est pas singulier (c'est-à-dire, si le déterminant  $\det(\partial^2 J / \partial x_i \partial x_j)$  n'est pas nul) et si  $J$  a l'indice d'inertie  $k$  au point  $g$ , alors  $m_k(g) = 1$  et  $m_q(g) = 0$  pour  $q \neq k$ .

#### 5. Espaces de chemins.

Soit  $M$  une variété de Riemann de classe  $C^3$  dans laquelle tout ensemble borné

est relativement compact. Nous dirons qu'une courbe est gentille si elle est continûment différentiable et si sa différentielle n'est nulle en aucun point. Nous désignerons par  $\hat{\Omega}$ , l'espace des courbes gentilles par morceaux, muni de la distance

$$(f, g) = \sup(f(t), g(t)) + |J(f) - J(g)|,$$

où  $f$  et  $g : I \rightarrow M$  sont dans  $\hat{\Omega}$ , et  $J(f)$  désigne la longueur de la courbe  $f$ .

Etant donnés deux points  $P$  et  $Q$  de  $M$ , nous considérons le sous-espace  $\Omega$  de  $\hat{\Omega}$  qui est formé des courbes d'origine  $P$  et d'extrémité  $Q$ . Alors  $J$  est continue sur  $\Omega$  et  $(J \leq a)$  est compact pour tout  $a < +\infty$ . Nous prendrons pour  $G$  l'ensemble des géodésiques de  $\Omega$ . L'axiome  $D_1$  est vérifié par un procédé de régularisation convenable.

L'axiome  $D_2$  dit que les géodésiques sont isolées; on est obligé de le postuler. Pour toute géodésique isolée  $g$ , on démontre l'axiome  $D_3$  et on établit la finitude des nombres typiques  $m_q(g)$ .

A côté de l'espace  $\Omega$ , nous pouvons aussi considérer l'espace  $\Omega^*$  de toutes les courbes  $f : I \rightarrow M$  commençant en  $P$  et finissant en  $Q$ , cet espace étant muni de la topologie de la convergence compacte. On a une application continue canonique  $\Omega \rightarrow \Omega^*$ . Si la théorie de l'homologie  $H$  vérifie l'axiome SC, on montre que l'homomorphisme induit  $H_q(\Omega) \rightarrow H_q(\Omega^*)$  est un isomorphisme sur.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] FROLOFF (S.) et ELSHOLZ (L.). - Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction donnée sur une variété, Recueil math. Soc. math. Moscou (Mat. Sbornik), t. 42, 1935, p. 637-642.
- [2] LUSTERNIK (L.) et SCHNIRELMANN (L.). - Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, 1 : Espaces à un nombre fini de dimensions. - Paris, Hermann, 1934 (Act. scient. et ind., 188, Exposés sur l'analyse mathématique et ses applications, 3).
- [3] MORSE (Marston). - The calculus of variations in the large. - New-York, American mathematical Society, 1934 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 18).
- [4] MORSE (Marston). - Functional topology and abstract variational theory. - Paris, Gauthier-Villars, 1939 (Mémoires des Sciences mathématiques, 92).
- [5] MORSE (Marston). - A positive, lower semi-continuous, non-degenerate function on a metric space, Fund. Math., t. 35, 1948, p. 47-78.
- [6] SEIFERT (H.) und THREFFALL (W.). - Variationsrechnung im Grossen (Theorie von Marston Morse). - Reprinted New-York, Chelsea, 1951.