LÉO KALOUJNINE

Sur la structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis et de quelques généralisations infinies de ces groupes

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 5, p. 29-31
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__29_0>

SUR LA STRUCTURE DES p-GROUPES DE SYLOW DES GROUPES SYMÉTRIQUES FINIS ET DE QUELQUES GÉNÉRALISATIONS INFINIES DE CES GROUPES

par Léo KALOUJNINE

Cette thèse est consacrée à l'étude des p-groupes de Sylow des groupes symétriques dont le degré est une puissance p^m d'un nombre premier fixe p. Ces groupes, que je noterai $\mathfrak{P}_m$, jouent par rapport aux p-groupes un rôle analogue à celui joué par les groupes symétriques par rapport aux groupes finis généraux. (Le fait que je me borne au cas des groupes symétriques de degré p^m n'est pas une restriction artificielle. En effet, il est facile de montrer que les p-groupes de Sylow d'un groupe symétrique quelconque <u>sont des produits directs des groupes</u> $\mathfrak{P}_m$).

L'étude de la structure des groupes $\mathfrak{P}_m$ est basée sur une certaine représentation de ces groupes qui s'introduit comme suit :

Soit G_p le champ de Galois de p éléments. (Le corps des restes des entiers rationnels mod p). On appelle <u>tableau de rang</u> m une suite

$$A = [a\ ,\ a(x_1)\ ,\ a(x_1\ ,\ x_2)\ ,\ \ldots\ ,\ a(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_{m-1})]$$

où $a(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_{i-1})$, qui est dit la i-ième coordonnée du tableau A, est une fonction définie pour les $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_{i-1} \in G_p$ et à valeurs dans G_p. On sait qu'une telle fonction peut être mise (et sera toujours mise) sous la forme d'un polynôme à coefficients dans G_p et dont le degré par rapport à chacune des variables ne dépasse pas $p - 1$. Les calculs sur ces polynômes doivent être faits, en vertu du petit théorème de Fermat,

$$\mathrm{mod}\,(x_1^p - x_1\ ,\ x_2^p - x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_{i-1}^p - x_{i-1})\ .$$

On définit une loi de composition de ces tableaux en posant :

$$[a,a(x_1),a(x_1,x_2),\ldots,a(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})]\,[b,b(x_1),\ldots,b(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})] =$$
$$= [a+b,a(x_1)+b(x_1-a),\ldots,a(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1})+b(x_1-a,x_2-a(x_1),x_3-a(x_1,x_2),\ldots)]$$

Il est alors possible de montrer que l'ensemble des tableaux de rang m, organisé par cette loi de composition, forme un groupe isomorphe à $\mathfrak{P}_m$. Grâce à cette représentation les problèmes concernant la structure de $\mathfrak{P}_m$ se traduisent comme questions relatives aux polynômes dans G_p.

Par cette méthode, j'ai réussi à déterminer tous les sous-groupes caractéristiques des $\mathfrak{P}_m$. Voici les principaux résultats obtenus :

On appelle <u>hauteur</u> d'un monôme $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_i^{a_i}$ l'entier

$$1 + a_1 + a_2 p + \dots + a_i p^{i-1} .$$

La <u>hauteur d'un polynôme</u> sera par définition égale au maximum de la hauteur de ses monômes non nuls. La hauteur d'un polynôme réduit $a(x_1 , x_2 , \dots , x_i)$ est un entier h_i tel qu'on ait $0 \leqslant h_i \leqslant p^{i-1}$.

$h_1 , h_2 , \dots , h_m$ étant une suite des entiers $(0 \leqslant h_i \leqslant p^i)$, on démontre que <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{H}$ <u>des tableaux pour lesquels pour tout</u> i <u>la hauteur de la i-ième coordonnée ne dépasse pas</u> h_i <u>est</u> un sous-groupe de $\mathfrak{P}_m$.

De tels sous-groupes $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{P}_m$ sont dits des <u>sous-groupes parallélotopiques</u> . Un sous-groupe parallélotopique est, évidemment entièrement déterminé par la suite $\langle h_1 , h_2 , \dots , h_m \rangle$ qui est dite l'indicatrice de $\mathfrak{H}$.

Les sous-groupes parallélotopiques ne sont pas, en général, des sous-groupes invariants de $\mathfrak{P}_m$. Pour qu'ils le soient, il faut et il suffit que les entiers h_i satisfassent à certaines inégalités.

THÉORÈME. - (Si $p \neq 2$) . <u>L'ensemble des sous-groupes parallélotopiques et invariants de</u> $\mathfrak{P}_m$ <u>coïncide avec l'ensemble des sous-groupes caractéristiques de</u> $\mathfrak{P}_m$.

La seconde partie de la thèse est consacrée à l'étude du groupe $\mathfrak{P}_\infty$ des tableaux

$$A = [a , a(x_1) , a(x_1 , x_2) , \dots \text{ ad inf.}]$$

(où $a(x_1 , x_2 , \dots , x_{i-1})$ a le même sens que précédemment) à une suite dénombrable de coordonnées organisée par la loi de composition précédemment définie. Ce groupe paut être considéré comme un groupe topologique en prenant comme un système fondamental de voisinage de son unité celui des ensembles $\mathfrak{D}_s$ des tableaux dont les s premières coordonnées sont nulles.

Un groupe $\mathfrak{G}$ est dit un p_∞-groupe s'il possède une chaîne décroissante $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2 \dots$ de sous-groupes invariants telle que

1° Les indices $(\mathfrak{G}_i : \mathfrak{G}_{i+1})$ soient finis et puissances de p et que

2° $\bigcap_i \mathfrak{G}_i$ se réduise à l'unité de $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{P}_\infty$ est un p_∞-groupe et on démontre que : <u>tout</u> p_∞<u>-groupe est isomorphe à un certain sous-groupe de</u> $\mathfrak{P}_\infty$. Ainsi, en un certain sens, $\mathfrak{P}_\infty$ est un <u>groupe universel</u> pour les p_∞-groupes.

Les résultats relatifs aux sous-groupes caractéristiques de $\mathfrak{P}_m$ s'étendent sans difficulté aux sous-groupes caractéristiques de $\mathfrak{P}_\infty$ à condition de n'y considérer que des sous-groupes fermés au sens de la topologie définie plus haut.

BIBLIOGRAPHIE.

KALOUJNINE (Léo). - La structure des p-groupes de Sylow des groupes symétriques finis, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3° série, t. 65, 1948, p. 239-276 (Thèse Sc. math. Paris. 1948).