LAURENT SCHWARTZ

Sur un mémoire de Kodaira : « Harmonic fields in riemannian manifolds (generalized potential theory) », II

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. n° 32, p. 257-268
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__257_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1950)

SUR UN MÉMOIRE DE KODAIRA : "HARMONIC FIELDS IN RIEMANNIAN MANIFOLDS (GENERALIZED POTENTIAL THEORY)", II. ([1])

par Laurent SCHWARTZ

Nous nous placerons toujours sur un espace de Riemann compact V^n. Nous dirons dans cet exposé qu'un courant T est d-fermé (resp. ∂-fermé) si $dT = 0$ (resp. $\partial T = 0$). Nous dirons que $T \overset{d}{\sim} 0$ (resp. $\overset{\partial}{\sim} 0$ s'il existe S tel que $T = dS$ (resp. ∂S).

1. Nombre algébrique d'intersections (de RHAM).

On peut définir $((A , B))$ non seulement si les ensembles de points singuliers de A et de B ne se coupent pas, mais plus généralement si les ensembles de points singuliers de dA et B ne se coupent pas ni les ensembles de points singuliers de A et ∂B. On le définira en effet par

$$(1) \quad \begin{cases} A = H_1 A + d(\partial G A) + \partial G(dA) \\ ((A , B)) = ((H_1 A , B)) + ((\partial G.A , \partial B)) + ((dA , d G B)) \end{cases}$$

où chaque terme du 2e membre a un sens.

Il y a bien d'autres procédés ; ils donnent tous le même résultat, comme on peut le voir par continuité ((1) étant vrai pour $A \in (\mathcal{D})$).

Si A et B sont des chaînes, et si $\partial A \cap B = A \cap \partial B = \emptyset$, on voit aisément que

$$(2) \quad ((\overset{*}{A} , B)) = \text{nombre algébrique d'intersections } I(A , B) .$$

2. Formes différentielles de singularités données.

THÉORÈME 1. - *Soient A et B deux courants donnés, il existe un courant T (défini à une forme harmonique près) vérifiant*

([1]) Pour d'autres exposés du théorème de Riemann-Roch, consulter [3] , [4] et [5] . Nous ne signalerons pas ici les généralisations à plusieurs dimensions complexes, dues à KODAIRA et surtout à HIRZEBRUCH.

(3) $$dT = dA \qquad \partial T = \partial B$$

C'est en effet

(4) $$T = H_3 . A + H_2 . B$$

COROLLAIRE. - Soit F un ensemble fermé de V^n , S une distribution définie dans un voisinage U de F , à la fois d-fermée et ∂-fermée dans $U - F$; il existe une distribution T définie sur V^n , d-fermée et ∂-fermée dans $V^n - F$, et telle que $T - S$ soit d-fermée et ∂-fermée dans U (donc telle que T ait les mêmes singularités que S) à condition toutefois que $dS \overset{d}{\sim} 0$ et $\partial S \overset{\partial}{\sim} 0$ dans V^n .

Il suffit en effet de poser $dA = dS$, $\partial B = \partial S$, et d'appliquer le théorème 1 .

REMARQUE. - On peut choisir T telle que

(3') $$dT = dA \qquad T \overset{\partial}{\sim} B$$

par

(4') $$T = H_3 . A + (H_1 + H_2) . B$$

et c'est la seule à posséder cette propriété.

Pour qu'il existe une solution de

(3") $$T \overset{d}{\sim} A \qquad T \overset{\partial}{\sim} B$$

il fait et il suffit que $A - B$ soit orthogonale aux formes harmoniques.

3. Variété compacte connexe holomorphe à 1 dimension complexe.

Sur une telle variété V^2 (toujours orientée), on peut définir un ds^2 indéfiniment différentiable qui soit, sur chaque carte locale conforme, de la forme $\lambda^2(dx^2 + dy^2)$. Nous ne considèrerons que des cartes locales "conformes" ; sur une telle carte on aura

(5) $$\begin{cases} * \, dx = dy & * \, dy = - dx \quad \text{ou} \\ * \, dz = - i \, dz & * \, d\bar{z} = i \, d\bar{z} \quad \text{si} \quad z = x + iy . \end{cases}$$

Donc l'$*$ pour les formes de degré 1 est indépendant du ds^2 , c'est une rotation de $+ \frac{\pi}{2}$ en chaque point.

Nous étendrons les espaces vectoriels réels considérés jusqu'ici en espaces vectoriels complexes.

4. Différentielles holomorphes de degré 1 ou différentielles abéliennes de 1re espèce.

F = différentielle holomorphe si

(6) $F = f(z)\,dz$ sur chaque carte, f = fonction holomorphe.

(7) $\begin{cases} T = \text{distribution (de degré 1) conforme si} \\ T = \Omega + i\overset{*}{\Omega} \Longleftrightarrow \overset{*}{T} = -\,iT \Longleftrightarrow T = A\,dz \quad \text{sur chaque carte} \end{cases}$

(8) $\begin{cases} T = \text{distribution (de degré 1) anticonforme si} \\ T = \Omega - i\overset{*}{\Omega} \Longleftrightarrow \overset{*}{T} = +\,iT \Longleftrightarrow T = B\,d\bar{z} \quad \text{sur chaque carte.} \end{cases}$

T anticonforme $\Longleftrightarrow \bar{T}$ conforme ([2]).

Toute distribution est somme d'une conforme et d'une anticonforme, d'une seule manière :

(9) $$T = \underbrace{\frac{1}{2}\,(T + i\overset{*}{T})}_{\text{conforme}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,(T - i\overset{*}{T})}_{\text{anticonforme}}$$

Pour que T soit conforme (resp. anticonforme) il faut et il suffit que $((T\,,\,\varphi)) = 0$ pour toute φ conforme (resp. anticonforme).

THÉORÈME 2. - Pour que T de degré 1 soit une différentielle holomorphe dans un ouvert, il faut et il suffit qu'elle y soit conforme, et d-fermée (ou ∂-fermée).

Pour T conforme $= A\,dz$, $dT = 0 \Longleftrightarrow \partial T = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial A}{\partial \bar{z}} = 0$, condition classique d'holomorphie de Cauchy, compte tenu de ce que ces conditions impliquent que $\Delta T = 0$, donc que T soit une forme indéfiniment différentiable.

Réciproquement, sur tout espace de Riemann orienté indéfiniment différentiable, ce théorème définit les différentielles holomorphes locales, d'où les fonctions holomorphes et la représentation conforme, et définit sur V^2 une structure holomorphe à 1 dimension complexe.

REMARQUE. - Sur une variété holomorphe V^2, les différentielles harmoniques réelles Ω sont les parties réelles des différentielles holomorphes $\Omega + i\,\Omega^*$, donc indépendantes du ds^2.

([2]) On dit aujourd'hui que T est de bidegré $(1\,,\,0)$ ou de type $(1\,,\,0)$ si elle est conforme, $(0\,,\,1)$ si elle est anticonforme.

THÉORÈME 3. - <u>Les différentielles</u> F <u>holomorphes sur</u> V^2 <u>forment un espace vectoriel à</u> g <u>dimensions complexes</u> (g = genre).

En effet $F = \Omega + i\overset{*}{\Omega}$, les Ω forment un espace vectoriel à $2g$ dimensions réelles ; donc aussi les F, et comme elles forment un espace vectoriel complexe, il a g dimensions complexes. Nous appellerons dans la suite φ_α ($\alpha = 1,2,\dots,g$) une base de cet espace.

5. <u>Différentielles méromorphes de degré</u> 1 .

Définition évidente. Sur une carte locale au voisinage de p, une différentielle méromorphe, F a un développement

$$F = \sum_\nu \frac{a_\nu \, dz}{(z-p)^\nu} + \text{différentielle holomorphe.} \tag{10}$$

a_1 = résidu a une signification intrinsèque classique.

F est dite différentielle abélienne de 2e espèce si tous ses résidus sont nuls, de 3e espèce dans le cas général.

Soit F une différentielle méromorphe ; elle définit une distribution de degré 1 sur chaque carte locale où elle est holomorphe ou méromorphe avec un pôle simple. Pour lui associer une distribution sur toute la variété, choisissons autour de chaque pôle multiple p une carte locale, et appelons $T = \mathrm{vp}\, F$ la distribution définie par

$$((T, \varphi)) = \mathrm{vp}\int (F, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-p| \geq \varepsilon} (F, \varphi) . \tag{11}$$

La distribution T ainsi associée à F dépend a priori des cartes locales choisies au voisinage des pôles multiples ; on montre qu'en fait elle n'en dépend pas ([3]).

T est conforme et vérifie au voisinage de p sur la carte locale utilisée

$$\partial T = 2\pi \sum_\nu a_{\nu;p} \, D_{\nu;p} \tag{12}$$

$$\begin{cases} D_{\nu;p} = \text{la distribution ponctuelle de degré } 0 \\ ((D_{\nu;p}, \varphi)) = \dfrac{1}{(\nu-1)!} \left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^{\nu - i} \varphi(p) . \end{cases} \tag{13}$$

([3]) Voir [2] . On trouvera une autre définition de vp F dans [1] , chap. 4 .

Réciproquement, si T est une distribution de degré 1, conforme, et vérifiant (13), alors la différence $T - \sum_\nu a_\nu \mathrm{vp} \frac{dz}{(z-p)^\nu}$ est conforme et ∂-fermée donc holomorphe, et $T = \mathrm{vp}\, F$, où F est une différentielle méromorphe de la forme (10).

Remarquons que, pour $\nu \geqslant 2$.

$$D_{\nu;p} = \partial E_{\nu-1;p} \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} &E_{\lambda;p} = \text{distribution ponctuelle anticonforme de degré 1} \\ &((E_{\lambda;p}, A\,dx + B\,dy)) = \frac{1}{2\lambda!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda-1}(A - iB)(p) \end{aligned}\right. \tag{15}$$

THÉORÈME 4. - Pour qu'il existe une différentielle méromorphe F de pôles donnés p_j, avec des développements polaires donnés au voisinage de chacun d'eux, il faut et il suffit que la somme des résidus soit nulle.

Condition trivialement nécessaire (CAUCHY-STOKES). - D'ailleurs cela revient à écrire $\partial T \overset{\partial}{\sim} 0$, compte tenu de ce que les $D_{\nu;p}$ sont $\overset{\partial}{\sim} 0$ pour $\nu \geqslant 2$.

Condition suffisante. - Supposons-la en effet réalisée. L'équation (12), compte tenu de la conformité de T, de l'anticonformité des E_λ et de l'hypothèse relative à la somme des résidus, permet, si C_j $(j \geqslant 2)$ est n'importe quelle chaîne de bord $p_j - p_1$, d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \partial T &= -2\pi \sum_{j \geqslant 2} a_{1;p_j}\, \partial C_j - 2\pi \sum_{j;\nu \geqslant 2} a_{\nu;p_j}\, \partial E_{\nu-1;p_j} \\ dT &= -2i\pi \sum_{j \geqslant 2} a_{1;p_j}\, d\overset{*}{C}_j + 2\pi \sum_{j;\nu \geqslant 2} a_{\nu;p_j}\, dE_{\nu-1;p_j} \end{aligned}\right. . \tag{16}$$

La formule (4) donne une solution particulière de ce système

$$T = -2\pi \sum_{j \geqslant 2} a_{1;p_j} (H_2 C_j + iH_3 \overset{*}{C}_j) - 2\pi \sum_{j;\nu \geqslant 2} a_{\nu;p_j} (H_2 - H_3) E_{\nu-1;p_j} . \tag{17}$$

La distribtion trouvée est justement conforme donc de la forme $T = \mathrm{vp}\, F$ où F est une différentielle méromorphe répondant à la question. On peut évidemment lui ajouter n'importe quelle différentielle holomorphe.

6. Fonctions holomorphes, méromorphes.

THÉORÈME 5. - 1° Pour qu'une fonction soit holomorphe, il faut et il suffit que sa différentielle soit holomorphe.

2° Toute fonction holomorphe sur toute la variété est constante.

En effet, sa différentielle est holomorphe et $\overset{d}{\sim} 0$ donc $\doteq 0$.

3° Une fonction méromorphe prend le même nombre de fois toutes les valeurs.

Il suffit de le montrer pour les valeurs 0 et ∞.

Or si G est méromorphe, $\frac{dG}{G}$ est une différentielle méromorphe de résidus ± 1, et le théorème de la somme des résidus donne le résultat voulu. (Ou bien : cas particulier du degré topologique).

THÉORÈME 6. - Pour toute différentielle méromorphe, le nombre des zéros excède de $2g - 2$ le nombre des pôles.

Le quotient de 2 différentielles méromorphes est en effet une fonction méromorphe, donc ayant autant de zéros que de pôles ; cela prouve que l'excès du nombre des zéros sur le nombre des pôles est fixe. Il suffit donc de montrer que toute différentielle holomorphe a $2g - 2$ zéros.

Or $2 - 2g$, caractéristique d'Euler-Poincaré, est le nombre algébrique des zéros d'un champ de vecteurs réels, donc aussi d'une forme différentielle réelle, et pour la partie réelle d'une différentielle holomorphe, l'indice d'un zéro est l'opposé de son ordre de multiplicité, comme on le voit aisément. Ce raisonnement n'est pas valable pour $g = 0$ (sphère de Riemann !). Mais de toute façon on peut raisonner dans tous les cas directement sur une forme méromorphe, où ce qui est dit ci-dessus vaut, en considérant les pôles comme zéros d'ordre négatif.

Soit G une fonction méromorphe. En choisissant une carte au voisinage de chaque pôle multiple, on peut lui associer une distribution S de degré 0, appelée vp G, définie par [4]

$$(18) \qquad ((S\,,\varphi)) = \mathrm{vp}\int (G\,,\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-p| \geq \varepsilon} (G\,,\varphi)\,.$$

Soit, au voisinage de q, sur une carte locale

$$(19) \qquad G = \sum_{\mu} \frac{b_{\mu;q}}{(z-q)^{\mu}} + \text{fonction holomorphe.}$$

On a alors, avec $S = \mathrm{vp}\ G$, $T = \mathrm{vp}\ (dG)$

---

(4) Voir note (1).

(20) $$dS = \underbrace{T}_{\text{conforme}} + \underbrace{2\pi \sum_{\mu} b_{\mu;q}\, E_{\mu;q}}_{\text{anticonforme}}$$

Réciproquement si T est une distribution conforme telle que le 2e membre de (2°) soit d-fermé, ce qui entraîne

(21) $$\begin{cases} \partial T = + 2\pi \sum_{\mu} b_{\mu;q}\, \partial E_{\mu;q} \\ dT = - 2\pi \sum b_{\mu;q}\, dE_{\mu;q} \end{cases}$$

il existe, au voisinage de q, une distribution S vérifiant (20).

La différence $S - \sum_{\mu} b_{\mu;q}\, vp \left(\frac{1}{z - q}\right)^{\mu}$ a une différentielle conforme et d-fermée donc holomorphe, elle est par suite elle-même une fonction holomorphe. Alors S est de la forme $vp\ G$, où G est une fonction méromorphe de la forme (19), et $T = vp\ (dG)$.

THÉORÈME 7. - Pour qu'il exista une fonction méromorphe G non constante ayant des pôles donnés q_k et des développements polaires donnés au voisinage de chacun d'eux, il faut et il suffit que les coefficients donnés $b_{\mu;q_k}$ satisfassent à g relations linéaires homogènes convenables.

COROLLAIRE. - Si $m \geqslant g$, il existe au moins $m - g + 1$ fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant au plus m pôles donnés à l'avance (chacun compté suivant sa multiplicité) ; il existe au moins une fonction méromorphe non constante ayant $g + 1$ pôles donnés à l'avance.

Soient en effet donnés les q_k et $b_{\mu;q_k}$. Pour connaître G, cherchons $S = vp\ G$. S sera déterminée à une constante additive près si $T = vp\ (dG)$ est connue, à cause de (20). T doit vérifier (21) ; une solution particulière de ces équations est

(22) $$T_0 = 2\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} (H_2 - H_3)\, E_{\mu;q_k}$$

qui est conforme ; la solution générale conforme est $T = T_0$ + différentielle holomorphe F_1. Alors S peut être déterminée localement par dS, et a toutes les propriétés voulues, mais on ne peut pas en général la déterminer globalement ; pour cela il faudra que la quantité qui doit être dS soit $\overset{d}{\sim} 0$, soit

(23) $$\Big(2\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} (H_2 - H_3)\, E_{\mu;q_k} + F_1\Big) + 2\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k}\, E_{\mu;q_k} \overset{d}{\sim} 0$$

(24) ou $\underbrace{F_1}_{\text{conforme}} + \underbrace{\sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} H_1 E_{\mu;q_k}}_{\text{anticonforme}} = 0$

équivalent à

$$(25)\quad \begin{cases} F_1 = 0 \quad \text{ou} \quad T = T_o \\ \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} H_1 E_{\mu;q_k} = 0 \end{cases} .$$

Les $b_{\mu;q_k}$ sont donc astreints à g conditions linéaires qui expriment que

$$\sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} E_{\mu;q_k} \quad \text{(anticonforme)}$$

est orthogonale aux différentielles holomorphes φ_α $(\alpha = 1 , 2 , \ldots , g)$. Si ces g conditions (non nécessairement indépendantes !) sont vérifiées, alors

$$(26)\qquad dS = 4\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} H_2 E_{\mu;q_k}$$

s'exprime uniquement à l'aide des $b_{\mu;q_k}$ donnés ; si G est le noyau de Green,

$$(27)\qquad S = 4\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} (\partial \circ G \circ H_2) E_{\mu;q_k} + \text{constante.}$$

7. Théorème de Riemann-Roch.

Soit Λ un "diviseur" $\dfrac{q_1^{m_1} q_2^{m_2} \cdots}{p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \cdots}$. On dit qu'une fonction G ou différentielle F méromorphe admet Λ comme diviseur si les q_k sont des zéros multiples d'ordres $\geqslant m_k$ et les p_j des pôles d'ordres $\leqslant \ell_i$. Le degré d du diviseur Λ est $d = \sum m_k - \sum \ell_j$.

THÉORÈME 8 (Riemann-Roch). - Si A est la dimension de l'espace vectoriel des fonctions méromorphes G admettant le diviseur $1/\Lambda$, B la dimension de l'espace vectoriel des différentielles méromorphes F admettant le diviseur Λ , on a la relation suivante, où d est le degré de Λ :

$$A - B = d - g + 1 . \tag{28}$$

1° Si une différentielle méromorphe F a le diviseur Λ, elle est définie, d'après la formule (17), par

$$\left\{\begin{aligned} T =& -2\pi \sum_{j\geq 2} a_{1;p_j}\,(H_2\,C_j + iH_3\,C_j^*) \\ &- 2\pi \sum_{j;\nu\geq 2} a_{\nu;p_j}\,(H_2 - H_3)\,E_{\nu-1;p_j} + \sum_{\alpha} c_\alpha\,\varphi_\alpha \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Les $a_{\nu;p_j}$ et c_α sont astreints alors à vérifier un système d'équations homogènes, qui expriment que les $(\frac{\partial}{\partial z})^{\mu-1}$ T sont nuls aux points q_k $(\mu \leq m_k)$ ou $((E_{\mu;q_k}, T)) = 0$:

$$\left\{\begin{aligned} &- 4\pi \sum_{j\geq 2} a_{1;p_j}\,((C_j\,,\,H_2\,E_{\mu;q_k})) \\ &+ 4\pi \sum_{j;\nu\geq 2} a_{\nu;p_j}\,((E_{\nu-1;p_j}\,,\,H_2\,E_{\mu;q_k})) \\ &+ \sum_{\alpha} c_\alpha\,((\varphi_\alpha\,,\,E_{\mu;q_k})) = 0 \end{aligned}\right. \quad \left|\begin{aligned} &\mu\,;\,q_k \\ &\mu \leq m_k \end{aligned}\right. \tag{30}$$

(à cause de l'anticonformité des E).

2° Si une fonction méromorphe G a le diviseur $1/\Lambda$, elle est définie à une constante additive près par $dS = d(\mathrm{vp}\ G)$, qui est de la forme (26). Les inconnues $b_{\mu;q_k}$ doivent d'abord vérifier les g équations homogènes de possibilité (25)

$$\sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k}\,((\varphi_\alpha\,,\,E_{\mu;q_k})) = 0 \qquad \alpha = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,g\,. \tag{31}$$

et d'autre part des équations homogènes qui expriment que les $(\frac{\partial}{\partial z})^{\nu-1}$ S sont nuls aux points p_j, $\nu \leq \ell_j$, ou $((D_{\nu;p_j}, S)) = 0$. Prenons d'abord $\nu \geq 2$;

alors $((D_{\nu;p_j}, S)) = ((E_{\nu-1;p_j}, dS))$, d'où les équations

$$\left\{\begin{aligned} &4\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k}\,((E_{\nu-1;p_j}\,,\,H_2\,E_{\mu;q_k})) = 0 \\ &\nu\,;\,p_j \quad 2 \leq \nu \leq \ell_j \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Prenons ensuite $\nu = 1$. Les C_j étant toujours les courbes $\overset{\frown}{p_1 p_j}$, $j \geqslant 2$, il suffira d'exprimer que $((C_j , dS)) = \int_{C_j} dS = 0$, puisque S est déterminée à une constante additive près. D'où les équations

$$(33) \qquad - 4\pi \sum_{\mu;q_k} b_{\mu;q_k} ((C_j , H_2 E_{\mu;q_k})) = 0 \quad j \geqslant 2 .$$

Alors le système (31), (32), (33), et le système (30) sont transposés l'un de l'autre, donc ils ont le même rang, et

$$(34) \qquad \underbrace{(\sum_j \ell_j + g - 1)}_{\text{nombre d'inconnues}} - \underbrace{B}_{\text{degré d'indétermination}} = \underbrace{(\sum_k , m_k)}_{\text{nombre d'inconnues}} - \underbrace{A}_{\text{degré d'indétermination}}$$

(si tous les ℓ_j sont nuls, $g - 1$ doit être remplacé par g , mais A par $A - 1$, ce qui ne change rien) d'où la relation cherchée.

8. Théorème d'Abel.

Soient (p_ν , q_ν) $(\nu = 1 , 2 , \ldots , N)$ N couples de points sur V^2 (les p_ν peuvent ne pas être tous distincts, ni les q_ν , mais aucun p ne doit coïncider avec un q).

THÉORÈME 9 (Abel). - Pour qu'il existe une fonction méromorphe G ayant exactement pour zéro les points p_ν et pour pôles les points q_ν (elle est alors déterminée à un facteur constant près) il faut et il suffit qu'il existe des chemins $\overset{\frown}{p_\nu q_\nu}$ tels que

$$(35) \qquad \sum_\nu \int_{\overset{\frown}{p_\nu q_\nu}} \varphi = 0$$

pour toute différentielle holomorphe φ .

Essayons en effet de déterminer une telle fonction méromorphe G par $F = \frac{dG}{G}$. F est n'importe quelle différentielle méromorphe ayant les pôles p_ν avec les résidus $- 1$ et q_ν avec les résidus $+ 1$ (si plusieurs p ou q sont confondus, on a un pôle, avec résidu entier quelconque), et telle que, de plus, pour tout cycle Γ à coefficients entiers, $\int_\Gamma F$ soit multiple entier de $2i\pi$.

La somme des résidus de F est nulle, F est donc définie d'après la formule (17) par

(36) $$F = -2\pi \sum_{\nu} (H_2\, C'_{\nu} + iH_3\, \overset{*}{C'_{\nu}}) + \text{différentielle holomorphe } F_1 ,$$

où C'_{ν} est un chemin arbitraire $\overset{\frown}{p_{\nu}\, q_{\nu}}$.

Le premier terme a toutes ses prériodes purement imaginaires, donc aussi le 2°, ce qui entraîne $F_1 = 0$. Alors le fait que les périodes de F soient des multiples entiers de $2i\pi$ est équivalent à :

(37) $$\sum_{\nu'} ((\overset{*}{C'_{\nu}} , H_3 \Gamma)) = \mathcal{L}(\Gamma)$$

où $\mathcal{L}(\Gamma)$ est une forme linéaire sur les Γ à coefficients entiers.

Mais $((\overset{*}{C'_{\nu}} , \Gamma))$, nombre algébrique d'intersections, est entiers, (37) est donc équivalent à

(38) $$\sum_{\nu} ((C'_{\nu} , H_1 \overset{*}{\Gamma})) = \mathcal{L}(\Gamma) .$$

Or il existe un cycle C tel que

(39) $$((C , \overset{*}{\Gamma})) = ((C , H_1 \overset{*}{\Gamma})) = -\mathcal{L}(\Gamma) \quad \text{(dualité de Poincaré).}$$

Il suffit alors d'appeler C_{ν} les chemins $\overset{\frown}{p_{\nu}\, q_{\nu}}$ modifiés de sorte que $\sum_{\nu} C_{\nu} = \sum_{\nu} C'_{\nu} + C$, on obtient

(40) $$\begin{cases} \sum_{\nu} ((C_{\nu} , H_1 \overset{*}{\Gamma})) = 0 & \text{équivalent à} \\ \sum_{\nu} ((C_{\nu} , \varphi)) = 0 & \text{pour toute différentielle holomorphe } \varphi . \end{cases}$$

COROLLAIRE. - Sur un espace de Riemann V^2 de genre 0 , il y a une fonction méromorphe (déterminée à un facteur constant près) ayant un zéro donné p et un pôle donné q ; elle définit une représentation conforme de V^2 sur la sphère de Riemann.

C'est aussi le corollaire du théorème 7 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOLBEAULT (Pierre). - Formes différentiables et cohomologie sur une variété analytique complexe, Ann. of Math., t. 64, 1956, p. 83-130 et t. 65, 1957, p. 282-330 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[2] SCHWARTZ (Laurent). - Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe, Colloque de Géométrie différentielle, [Paris, 1953]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953 (Colloques internationaux du C.N.R.S., 52).

[3] SCHWARTZ (Laurent). - Complex analytic manifolds. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1955 (Lectures on Mathematics and Physics, Mathematics n° 4).

[4] SCHWARTZ (Laurent). - Variedades analiticas complejas. - Bogota, Universidad nacional de Colombia, 1956 (Cours professé de Juillet à Octobre 1956, multigraphié).

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Un théorème de dualité, Comment. Math. Helvet., t. 29, 1955, p. 9-26.

[Juillet 1958]