ARMAND BOREL

Groupes localement compacts

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 29, p. 215-231

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__215_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mai 1950)

GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par Armand BOREL.

Notations.

ℓ.c : localement compact

gLg : groupe de Lie généralisé

G_o , M_o ... : composante connexe de l'élément neutre e de G , M ...

Un sous-groupe d'un groupe topologique est toujours un sous-groupe fermé.

I. Groupes de Lie généralisés, L-groupes et limites projectives.

1. Groupes de Lie généralisés de A.M. Gleason.

DÉFINITION. - Un groupe ℓ.c. est un groupe de Lie généralisé (un gLg) si, pour tout voisinage U de e , il existe un sous-groupe ouvert H et un sous-groupe compact $M \subset U$ invariant dans H tel que H/M soit de Lie.

Pour abréger, nous dirons que 2 sous-groupes H , M de G sont associés dans G si H est ouvert dans G , M est compact invariant dans H et H/M de Lie.

THÉORÈME 1. - 1°) G est un gLg si et seulement s'il possède une paire de sous-groupes associés ; 2°) (Gleason) G est un gLg si et seulement s'il possède un sous-groupe ouvert qui soit limite projective ℓ.c. de groupes de Lie.

1°) Nécessité : par définition. Suffisance : Soient H , M associés dans G , $H' = H/M$, N l'image réciproque dans H de H'_o ; N est ouvert dans H ou G . A $n \in N$ correspond un automorphisme T_n de M : $m \longrightarrow nmn^{-1}$, intérieur si $n \in N$; par passage au quotient, on obtient une représentation de H'_o dans $\mathrm{Aut}\, M/\mathrm{Int}\, M$ qui est totalement discontinu ([5] Théorème 6) ; H'_o étant connexe, cette application est constante, autrement dit les automorphismes T_n de M sont intérieurs et les sous-groupes invariants de M sont aussi invariants dans N . Or M est compact et possède des sous-groupes arbitrairement petits invariants M_α formant une base de filtre tels que M/M_α soit de Lie ; mais alors N/M_α est de Lie car c'est l'extension du groupe de Lie M/M_α par N/M_α (qui est de Lie comme sous-groupe ouvert de H/M) ([5] Théorème 3). G satisfait à la définition des gLg (en prenant H égal à N pour tout U).

2°) Suffisance : évidente. Nécessité : Le groupe N précédemment construit est limite projective ℓ.c. des groupes de Lie N/M_α .

THÉORÈME 2. - Un gLg G invariant dans un groupe connexe $\hat{G}$ est une limite projective de groupesde Lie.

Soient H et L associés dans G ; $(H/L)_0$ a un sous-groupe invariant compact maximum M' : c'est l'intersection de ses sous-groupes compacts maximaux, qui sont conjugués les uns des autres par des automorphismes intérieurs (Malcev, Iwasawa) ; soient V , M les images réciproques dans H de $(H/L)_0$, M' ; M est compact invariant dans H ; et V est ouvert dans H ou G ; G étant invariant dans $\hat{G}$, on peut, pour des raisons de compacité, trouver un voisinage U de e dans $\hat{G}$ tel que $gMg^{-1} \subset V$ pour $g \in U$; mais alors gMg^{-1} se projette dans $(H/L)_0$ suivant un groupe invariant compact donc dans M' , c'est-à-dire que $gMg^{-1} \subset M$ pour $g \in U$, donc aussi pour $g \in \hat{G}$, qui est connexe. Ainsi M est invariant dans $\hat{G}$ et de plus tous ses sous-groupes invariants sont invariants dans $\hat{G}$ ($\hat{G}$ connexe, Aut M/Int M totalement discontinu). Soit M_α l'un d'eux et M/M_α de Lie; G/M_α est localement isomorphe à son sous-groupe ouvert H/M_α qui est de Lie (extension de M/M_α par $H/M = (H/L)/(M/L)$, d'où le théorème.

2. Les L-groupes de K. Iwasawa.

DÉFINITION. - Un groupe ℓ.c. G est un L-groupe s'il possède un système de sous-groupes invariants N_ν tels que G/N_ν soit de Lie et que $\cap N_\nu = \{e\}$.

THÉORÈME 3. - Un L-groupe est un gLg ; en particulier (Iwasawa) un L-groupe connexe est limite projective de groupes de Lie.

Remarquons d'abord que si G/N_1 et G/N_2 sont de Lie, il en est de même de $N_1/N_1 \cap N_2$, qui admet une image continue univalente dans G/N_2 et de $G/N_1 \cap N_2$, extension de $N_1/N_1 \cap N_2$ par G/N_1 . L'ensemble des sous-groupes N_α de G (ℓ.c. quelconque) tels que G/N_α soit de Lie est donc une base de filtre. Si G est un L-groupe, nous allons y trouver une paire de sous-groupes associés. Soit U un voisinage relativement compact de e dans G ; comme $(\cap N_\alpha) \cap (\bar{U} - U) = \emptyset$, il y a un N_α dont l'intersection avec $\bar{U} - U$ est vide ; alors $N_\alpha \subset U$ est compact ; posons $G' = G/N_\alpha$, G' n'est pas forcément de Lie, mais il contient un sous-groupe invariant totalement discontinu $N_\alpha/N_{\alpha\,0} = N'$ et $G'/N' \cong G/N_\alpha$ est de Lie. La fibration de G' par N' admet alors une section locale P qui est un sous-groupe local ([6]) , évidemment localement isomorphe à G/N_α ; P est connexe et fait donc partie du commutant de N' ; soit maintenant M' un sous-groupe ouvert compact de N' ; M' est invariant dans le sous-groupe H' engendré par M'P , qui est ouvert et localement isomorphe à M' × P . Alors les images réciproques H , M de H' , M' sont associées dans G .

Si G est connexe, la démonstration est plus simple car N_α/N_{α_0} est invariant totalement discontinu dans G' connexe et fait partie de son centre ; il est abélien et l'image réciproque M d'un sous-groupe ouvert compact M' de N' est compacte invariante dans G . G/M est localement isomorphe au groupe de Lie G/N_α car c'en est le quotient par le groupe discret N_α/M . On peut appliquer le théorème 1.

REMARQUES. -

1°) Dans le cas général, la notion de gLg est plus maniable que celle de L-groupe et c'est elle que nous utiliserons. Nous avons fait figurer ici les L-groupes, qui sont à la base du mémoire d'Iwasawa, surtout pour les situer par rapport aux gLg .

2°) On a les inclusions : limites projectives de groupes de Lie ℓ.c. $\subset$ L-groupes $\subset$ gLg . Les groupes compacts, abéliens ℓ.c. sont des limites projectives. Un groupe ℓ.c. totalement discontinu contient des sous-groupes ouverts compacts, c'est donc un gLg , mais pas toujours un L-groupe ; il peut en particulier être simple et non discret (Exemple : groupes classiques sur un corps p-adique). Je ne sais pas si un L-groupe est toujours une limite projective de groupes de Lie. Ces 3 notions coïncident dans le cas des sous-groupes invariants d'un groupe connexe (Théorèmes 2 et 3).

THÉORÈME 4. -

a) *Un produit direct de* gLg (L-*groupes*) *est un* gLg (L-*groupe*).
b) *Un sous-groupe d'un* gLg (L-*groupe*) *est un* gLg (L-*groupe*).
c) *Un groupe quotient d'un* gLg *est un* gLg .
d) *Un groupe localement isomorphe à un* gLg *est un* gLg .
e) *Un groupe* ℓ.c. *ayant une représentation fidèle dans un* gLg *est un* gLg.

Démonstrations faciles ; d) peut être faux pour les L-groupes (remarque 2) ; je ne sais ce qui en est de c) pour les L-groupes.

II. *Le théorème d'extension pour les* gLg .

THÉORÈME 5 (Gleason). - *Soit* N *invariant dans* G . *Si* N *et* G/N *sont des* gLg , G *est aussi un* gLg .

G est automatiquement ℓ.c. si N et G/N le sont, d'après VILENKIN. Nous démontrons le théorème 5 tout d'abord dans 2 cas particuliers : N compact (a) et N de Lie (b , c , d).

a) N compact. Soient H' , M' associés dans G/N ; leurs images réciproques sont associées dans G ; on est ramené au théorème 1 .

b) $N = R^s$, $G' = G/N$ compact. G contient un sous-groupe compact K tel que $KN = G$, $K \cap N = \{e\}$ ([5] Théorème 4). L'automorphisme T_k de R^s : $x \longrightarrow kxk^{-1}$ $(x \in R^s$, $k \in K)$ est une transformation linéaire ; la correspondance $k \longrightarrow T_k$ est un homomorphisme de K sur un groupe linéaire compact, donc de Lie. Le noyau M de cet homomorphisme est l'intersection de K avec le commutant $C(N)$ de N dans G ; il est invariant dans K , donc aussi dans $G = KN$; G/M est le produit croisé de 2 groupes de Lie K/M et N avec une loi de composition de groupe de Lie ; M est compact, G/M de Lie, on est ramené au théorème 1.

c) $N = R^s$. Soient H' , P' associés dans $G' = G/N$, H et P leurs images réciproques ; on peut appliquer la construction de b) à P . Je prétends que le sous-groupe M trouvé dans P , égal à $C(N) \cap K$, est aussi invariant dans H . En effet, si $h \in H$, les éléments de hMh^{-1} sont dans P , c'est-à-dire sont des produits $k.x$ $(k \in K$, $x \in R^s)$, et k est dans $C(N)$, puisque hMh^{-1} et x y sont ; alors la projection $k.x \longrightarrow x$ de hMh^{-1} dans $N = R^s$ est un homomorphisme sur un sous-groupe compact de R^s , qui se réduit forcément à e , donc $k.x \in hMh^{-1}$ entraîne $x = e$, $hMh^{-1} \subset C(N) \cap K = M$; H/M est l'extension du groupe de Lie P/M par $H/P = H'/P'$ de Lie, donc est de Lie. H et M sont associés dans G ; on applique le théorème 1 .

d) N de Lie. Soit $R(N_o)$ le radical de N_o (sous-groupe invariant résoluble connexe maximum). La démonstration se fait par induction sur la dimension de $R(N_o)$. Soit d'abord $\dim R(N_o) = 0$, c'est-à-dire N_o semi-simple. Int N_o est un sous-groupe ouvert de Aut N_o , donc si g est voisin de e l'automorphisme de N_o : $n \longrightarrow gng^{-1}$ est intérieur, et g peut se mettre sous la forme $c.n$ $(n \in N_o$, c dans le commutant $C(N_o)$ de N_o , tous deux voisins de e).
$N_o \cap C(N_o)$ est discret ; on en déduit aisément que G est localement isomorphe au produit direct $C(N_o) \times N_o$ et, comme N/N_o est discret, que $C(N_o)$ est localement isomorphe à G/N , qui est un gLg ; G est un gLg d'après le théorème 4 (a) et d)).

Supposons maintenant d) établi pour $\dim R(N_o) < r$, et soit N dont le radical a la dimension $r > 0$ et Z le premier groupe dérivé abélien de $R(N_o)$; Z est invariant dans G et $Z = R^a \times T^b$ $(a + b > 0)$. Admettons d'abord que $b = 0$.

On applique alors l'hypothèse d'induction à G/R^a , ce qui est possible car $a > 0$ et $\dim R(N_o/R^a) = r - a$; G/R^a est un gLg , donc aussi G d'après c). Si maintenant $b > 0$, T^b est aussi invariant dans G , en tant que sous-groupe compact maximum de Z , on applique l'hypothèse d'induction à G/T^b et G est un gLg d'après a).

e) Le cas général. Supposons que nous ayons trouvé un sous-groupe H ouvert de G et $M \subset H \cap N$, compact invariant dans H , tel que $H \cap N/M$ soit de Lie. Alors $H/N \cap H$ est un gLg (sous-groupe de G/N) , ainsi que H/M qui est l'extension du groupe de Lie $H \cap N/M$ par $H/H \cap N$ (cas d) ; enfin H est un gLg d'après a) , de même que G qui lui est localement isomorphe. Tout revient donc à construire H et M .

Soient L et P associés dans N . Nous procédons comme au théorème 2. On prend l'image réciproque M dans L du sous-groupe invariant compact maximum de $(L/P)_o$ et un voisinage U de e dans G tel que $gMg^{-1} \subset M$ si $g \in U$. M est alors invariant dans le groupe ouvert H engendré par U.L ; de plus $H \cap N$ contient L comme sous-groupe ouvert et $H \cap N/M$ est localement isomorphe à $L/M = (L/P)/(M/P)$ qui est de Lie, C.Q.F.D.

COROLLAIRE. - G est un gLg si et seulement si G_o est un gLg .

Il ne semble pas très probable que l'extension d'un L-groupe par un L-groupe soit toujours un L-groupe ; c'est en tout cas un gLg . En outre les théorèmes 2, 3 et 5 donnent le théorème (Iwasawa) :

Soient G et N invariants dans un groupe connexe $\hat{G}$. Si G/N et N sont des L-groupes, G est aussi un L-groupe.

III. Groupes localement compacts en général.

1.- Soit G un groupe topologique. Nous appellerons groupe dérivé topologique de G l'adhérence du sous-groupe de G engendré pzr les commutateurs ; il sera noté $D(G)$. On définit par induction transfinie la série des groupes dérivés topologiques de G par : $D_o(G) = G$, $D_{\alpha+1}(G) = D(D_\alpha(G))$ et si β est un nombre limite, $D_\beta(G) = \bigcap_{\alpha<\beta} D_\alpha(G)$; le 1er ordinal ν tel que $D_{\nu+1}(G) = D_\nu(G)$ est la longueur de la série des groupes dérivés ou longueur de G ; G est (topologiquement) résoluble si $D_\nu(G) = \{e\}$. Il est immédiat que $D(G)$ est connexe si G l'est et que si G' est un sous-groupe partout dense de G , le groupe des commutateurs de G' (au sens abstrait) est partout dense dans $D(G)$. De là suit que si G' est résoluble au sens de la théorie des groupes abstraits, G est topologiquement

résoluble. Un sous-groupe, un groupe quotient d'un groupe résoluble sont résolubles ; toute extension d'un groupe résoluble par un groupe résoluble est résoluble.

THÉORÈME 6 (Iwasawa). - La longueur d'un groupe compact connexe est au plus 1 ; celle d'un groupe connexe ℓ.c. est finie.

Soit G compact connexe, $G' = G/D_2(G)$; $D_1(G')$ est abélien invariant donc dans le centre de G' ([5] Théorème 8) ; l'adhérence du sous-groupe engendré par $g' \in G'$ et $D_1(G')$ est un sous-groupe abélien invariant car c'est l'image réciproque d'un sous-groupe de $G'/D_1(G')$, qui est abélien. Toujours d'après le théorème 8 de [5] , g' est dans le centre de G' , d'où G' est abélien, $D_1(G') = \{e\} = D_2(G')$ et $D_1(G) = D_2(G)$.

Si G est ℓ.c. connexe, on remarque que dans $G' = G/D_\omega(G)$, l'un des sous-groupes $D_n(G')$ est compact (car les $D_n(G')$ sont connexes et $\bigcap D_n(G') = \{e\}$) ; soit k le 1er indice pour lequel $D_k(G')$ est compact, alors $D_{k+1}(G') = D_{k+2}(G')$ et G est aussi de longueur $k+1$ au plus.

La longueur d'un groupe compact non connexe n'est pas nécessairement finie, ainsi le produit direct de tous les groupes finis est de longueur ω ; cependant on démontre aisément le :

THÉORÈME 6' (Iwasawa). - Un sous-groupe invariant ℓ.c. d'un groupe connexe est de longueur finie (au plus 1 s'il est compact).

COROLLAIRE. - Un sous-groupe invariant résoluble ℓ.c. d'un groupe connexe G est un gLg (et fait partie du centre de G s'il est compact).

2.- Nous établirons dans ce numéro l'existence du sous-groupe invariant résoluble maximum d'un groupe connexe ℓ.c. ; remarquons tout d'abord que si N_1 et N_2 sont invariants résolubles, il en est de même de $\overline{N_1N_2}$; en effet, N_1 et N_2 sont de longueur finie, donc N_1N_2 est résoluble au sens de la théorie des groupes abstraits, et $\overline{N_1N_2}$ l'est au sens topologique.

LEMME 1 (Gleason). - Soit $H_o = \{e\} \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-groupes connexes d'un groupe ℓ.c., G. Si H_i/H_{i-1} est non compact $(i = 1 , 2 , \ldots)$ la suite est finie et le nombre de ses termes a une borne supérieure finie ne dépendant que de G .

Soit U un voisinage ouvert relativement compact de e dans G , et $U_n = H_n \cap U$; U_nH_{n-1} est ouvert dans H_n , $\bar{U}_nH_{n-1}$ y est fermé ; si l'on avait

$\bar{U}_n \subset U_n . H_{n-1}$, alors $\bar{U}_n H_{n-1} = U_n H_{n-1} = H_n$ (H_n connexe) et H_n/H_{n-1} serait compact contrairement à l'hypothèse ; il existe donc $a_n \in \bar{U}_n$, $a_n \notin U_n H_{n-1}$ ($n = 1 , 2 , \ldots$) ; les a_n étant dans le compact $\bar{U}$, on peut trouver 2 indices s , t ($s < t$) tels que $a_t a_s^{-1} \in U$ (si la suite H_i est infinie). Mais alors $a_t \in U_t H_{t-1}$, d'où une contradiction ; la suite H_i est donc finie.

Soit V un voisinage symétrique de e dans G tel que $V^2 \subset U$. On peut recouvrir $\bar{U}$ par un nombre fini, disons k , d'ensembles Vu_j . Alors si $a, b \in Vu_j$, on a $ab^{-1} \in U$; le raisonnement ci-dessus montre que la suite H_i a au plus k termes $\neq \{e\}$, d'où la 2e partie du lemme.

REMARQUE. - Le lemme 1 montre aussi qu'une suite décroissante de groupes connexes H_i , tels que H_i/H_{i+1} ne soit pas compact, n'a qu'un nombre fini de termes.

THÉORÈME 7 (Iwasawa, Gleason). - Un groupe connexe ℓ.c. possède un sous-groupe invariant résoluble maximum.

Montrons d'abord que G possède un sous-groupe invariant résoluble connexe maximum. Soient N_α les sous-groupes invariants résolubles connexes de G , N l'adhérence du sous-groupe qu'ils engendrent ; N est connexe invariant. Il existe ν tel que $\overline{N_\alpha N_\nu}/N_\nu$ soit compact pour tout α (lemme 1). Soit $G' = G/N_\alpha$, $\overline{N_\alpha N_\nu}/N_\nu$ y est invariant compact résoluble connexe et fait partie de son centre Z' . L'image réciproque Z de Z' est résoluble et contient N qui est donc résoluble.

Il est alors immédiat que l'image réciproque dans G du centre de G/N est le sous-groupe cherché.

NOTATION. - $R(G)$ = sous-groupe invariant résoluble maximum de G .

3. THÉORÈME 8 (Iwasawa). - Un groupe connexe ℓ.c. possède un sous-groupe invariant compact connexe maximum.

a) G est un gLg . Soient N invariant compact et G/N de Lie, K l'image réciproque du sous-groupe invariant compact maximum de G/N , K_o est le sous-groupe cherché.

b) $R(G) = \{e\}$. Soit K l'adhérence du sous-groupe engendré par les sous-groupes invariants compacts connexes K_α de G ; les centres de K_α et de K se réduisent à e ($R(G) = \{e\}$) . Soit $C(K_\alpha)$ le commutant de K_α dans K ; on a $K = K_\alpha \times C(K_\alpha)$ et $C(K_\alpha)$ est donc connexe ; $\cap C(K_\alpha)$ est le centre de

K , et se réduit à e ; d'après un raisonnement fait plusieurs fois, $C(K_\alpha)$ est compact pour un certain α ; alors $K = K_\alpha \times C(K_\alpha)$ est compact.

c) Cas général. Soit $G' = G/R(G)$ et L l'image réciproque du sous-groupe invariant compact connexe maximum de G' (cf. b)) ; L est un gLg et le sous-groupe invariant compact connexe maximum de L_0 (cf. a)) est le sous-groupe demandé.

REMARQUE. - On ne sait pas si un groupe connexe l.c. possède toujours un sous-groupe invariant compact maximum (connexe ou non) ; c'est vrai pour un gLg (on prend le groupe K défini en a)), ou si $R(G) = \{e\}$ (voir ci-dessous).

THÉORÈME 9 (Gleason). - Soit G connexe ℓ.c. et $R(G) = \{e\}$. Alors G est un produit direct de groupes de Lie simples non abéliens, compacts à l'exception d'un nombre fini, et éventuellement d'un facteur P .

P est le produit d'un nombre fini de facteurs indécomposables, est métrisable et ne contient pas de gLg invariants $\neq \{e\}$.

Soit K invariant compact connexe maximum ; son centre se réduit à e et $G = K \times C(K)$; que K soit un produit direct de groupes de Lie simples compacts se déduit facilement de théorèmes connus (cf. A. WEIL [7] paragraphe 25). Si S est invariant dans $C(K)$, $S_0 \neq \{e\}$ car un sous-groupe invariant totalement discontinu serait dans le centre de $C(K)$, donc dans $R(G)$;en particulier, comme $S_0 \not\subset K$, S ne peut être compact, ce qui montre que K est invariant compact maximum. Soit N de Lie invariant connexe dans $C(K)$, N est semi-simple et de centre égal à $\{e\}$ (toujours à cause de $R(G) = \{e\}$) ; c'est un produit de groupes simples non compacts et de plus $C(K) = N \times C(N)$ (car $(\mathrm{Aut}\ N)_0 = \mathrm{Int}\ N$); il ne peut y avoir qu'un nombre fini de facteurs de Lie non compacts puisque G est ℓ.c. ; soit P le facteur ne contenant pas de sous-groupes invariants compacts ou de Lie connexes. P ne peut être produit que d'un nombre fini de facteurs indécomposables, puisque chaque facteur est non compact. P ne contient pas de gLg invariants $\neq \{e\}$: si L en est un, $L_0 \neq \{e\}$ possède un sous-groupe invariant compact maximum $N \neq \{e\}$, puisque L_0 n'est pas de Lie, et on a vu que cela est impossible. Enfin, P métrisable résulte du :

LEMME 2. - Un groupe G , ℓ.c. non métrisable, engendré par un voisinage compact V de e , possède un sous-groupe invariant compact $\neq \{e\}$.

Les voisinages V_i , W_i définis ci-dessous sont symétriques compacts. On peut trouver V_1 vérifiant $V_1^2 \subset V$, puis, pour des raisons de compacité, W_1 vérifiant $vW_1v^{-1} \subset V_1$ si $v \in V$; on prend ensuite V_2 avec $V_2^2 \subset W_1$ et W_2 avec $vW_2v^{-1} \subset V_2$ si $v \in V$, et ainsi de suite. Il est clair que $\cap V_i = \cap W_i$ est un sous-groupe compact invariant de G . Il est $\neq \{e\}$ car si G est non métrisable l'intersection d'une infinité dénombrable de voisinages compacts de e est $\neq \{e\}$.

COROLLAIRE AU THÉORÈME 9 (Iwasawa). - Un groupe connexe l.c. possède un L-sous-groupe invariant maximum L . Le L-sous-groupe invariant maximum de G/L est $\{e\}$.

L est l'image réciproque du produit direct des facteurs de $G/R(G)$ qui sont de Lie.

THÉORÈME 10 (Gleason). - Un groupe ℓ.c. possède une suite de composition finie dont les groupes quotients sont ou totalement discontinus ou abéliens ou compacts ou simples.

Il suffit de traiter le cas où G est connexe. Si G est un gLg , le facteur P de $G/R(G)$, (Théorème 9), est alors un gLg , donc est un groupe de Lie semi-simple sans centre. On combine alors la suite de composition des groupes dérivés de $R(G)$ avec l'image réciproque d'une suite de décomposition de $G/R(G)$ qui vérifie le théorème.

Soit maintenant G connexe, localement compact, mais par ailleurs quelconque. Considérons une suite

$$(1) \qquad G = N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_p = e$$

de sous-groupes connexes, N_i étant invariant dans N_{i-1} $(i = 1 , \dots , p)$. D'après le lemme 1 , le nombre de quotients N_i/N_{i+1} non compacts a une borne supérieure ne dépendant que de G . Supposons-la atteinte par la suite (1) ; les quotients N_i/N_{i+1} ont alors la propriété suivante :

(A) pour toute suite de composition formée de sous-groupes connexes, il y a au plus 1 groupe quotient non compact. Il suffit de démontrer le théorème sous cette hypothèse.

a) Si G connexe vérifie (A) , et si son gLg invariant maximum se réduit à (e) , G est l'extension d'un groupe simple par un groupe compact.

Si G n'est ni simple ni compact, soit S l'intersection de ses sous-groupes invariants $\neq e$; remarquons que si N est invariant $\neq e$, alors $N_0 \neq e$ (car $R(G) = E$) , et est même non compact (pas de gLg invariant), donc S est connexe.

Montrons que la supposition $S = e$ mène à une contradiction. Si $S = e$, on peut trouver un nombre fini de sous-groupes invariants N_1 , ... , N_k dont l'intersection N ne rencontre pas le bord $\bar{U} - U$ d'un voisinage relativement compact de e ; alors $N \cap U$ est compact donc $= e$ ainsi que N . De là on déduit l'existence de deux sous-groupes M_1 , $M_2 \neq e$ invariants connexes, d'intersection $= e$. M_1 admet une représentation fidèle dans G/M_2 qui est compact d'après (A) . Or un groupe ayant une représentation fidèle dans un gLg est lui-même un gLg , comme on le voit aisément, d'où la contradiction. Ainsi S est connexe, $\neq e$, donc non compact, a la propriété (A) , et son gLg invariant maximum est aussi $= e$, car il est invariant aussi dans G . S est simple car l'intersection de ses sous-groupes invariants $\neq e$ est $\neq e$ d'après ce qui précède, est invariante dans G , donc contient S par définition de S . S est simple et G/S compact d'après (A) .

b) Soit G ayant la propriété A , L son gLg invariant maximum ; il suffit de montrer que $G/L = G'$ a la propriété A .

Soit $G' = N'_o \supset N'_1 \supset \dots \supset N'_k \supset N'_{k+1} \supset \dots \quad N'_p = e$ une suite de composition de G formée de groupes connexes. Remarquons que le gLg invariant maximum de N'_i étant invariant dans N'_{i-1} se réduit à e comme celui de G' . Il nous faut montrer que si N'_{k-1}/N'_k est non compact, N'_k est compact (donc $= e$) . Soit N_i image réciproque dans G de N'_i , N_{io} sa composante connexe de e . Si N'_{k-1}/N'_k est non compact, il en est de même de G/N_{ko} , donc de l'un des quotients $N_{io}/N_{i+1,o}$ $(i = k - 1)$, par suite N_{ko} est compact et N_k est un gLg invariant dans N_{k-1} . On en déduit immédiatement que N_k est dans L donc que $N'_k = e$, C.Q.F.D.

COROLLAIRE (Iwasawa, Gleason). - <u>La conjecture : Tout groupe connexe ℓ.c. est un</u> gLg , <u>est équivalente à la conjecture : Tout groupe connexe ℓ.c. simple est un groupe de Lie</u>.

REMARQUE. - Si cette conjecture est vraie, il est aussi vrai que tout groupe localement euclidien est de Lie (cf. corollaire au théorème 13), mais l'étude de cette conjecture apparaît, dans l'état actuel de la question, comme beaucoup plus difficile que celle du 5e problème de Hilbert. Ainsi ce dernier est résolu depuis longtemps pour les groupes localement euclidienne de dimensions 1 , 2 ; cependant, le fait qu'un groupe ℓ.c. connexe <u>métrisable</u> de dimension 1 ou 2 est limite projective de groupes de Lie n'a été démontré que récemment par D . MONTGOMERY [3].

IV. Structure des gLg connexes.

Rappelons qu'un gLg connexe est en même temps L-groupe et limite projective de groupes de Lie connexes ; quant à ces dernières, nous prenons les notations de A. WEIL ([7] paragraphe 5), G est limite projective des groupes G_α muni des homomorphismes $f_{\alpha\beta}$ si le système G, G_α, $f_{\alpha\beta}$ vérifie les axiomes LP I, LP II, LP III ; (si les G_α sont de Lie connexes, LP III est du reste conséquence de LP I, LP II). On écrira $G = \lim (G_\alpha ; f_{\alpha\beta})$. On ne change pas $\lim (G_\alpha ; f_{\alpha\beta})$ si l'on ne prend que les G_α correspondant aux indices d'un sous-ensemble I' de l'ensemble des indices I lorsque I' est dense (cofinal) dans I), en particulier si I' est formé de tous les indices plus grands qu'un indice ν donné.

Nous démontrerons plus loin le :

LEMME 3. - Soit G un L-groupe, $G' = G/N$, f l'homomorphisme canonique de G sur G' et $g'(t)$ un sous-groupe à un paramètre de G'. Alors on peut trouver un sous-groupe à un paramètre $g(t)$ de G tel que $f(g(t)) = g'(t)$.

1. Sous-groupes compacts maximaux.

Nous admettrons le théorème (Malcev, Iwasawa) : les sous-groupes compacts maximaux d'un groupe de Lie connexe sont conjugués les uns des autres (par des automorphismes intérieurs). Si K est l'un d'eux, on peut trouver dans G, n sous-groupes à 1 paramètre $H_i \cong R$ (fermés) tels que tout $g \in G$ s'écrive d'une seule façon sous la forme $kh_1 \dots h_n$ $(k \in K, h_i \in H_i)$, k, h_i étant des fonctions continues de g.

THÉORÈME 11 (Iwasawa). - Un gLg connexe contient des sous-groupes compacts maximaux ; deux quelconques d'entre eux sont conjugués. Soit K un tel sous-groupe ; on peut trouver n sous-groupes à 1 paramètre $H_i \cong R$, tels que $g \in G$ s'écrive d'une seule façon sous forme de produit $kh_1 \dots h_n$ $(k \in K, h_i \in H_i$, fonctions continues de $g)$.

Soit N invariant compact tel que G/N soit de Lie. Les images réciproques des sous-groupes compacts maximaux de G' sont les sous-groupes compacts maximaux de G. Deux tels sous-groupes étant les images réciproques de sous-groupes conjugués de G' sont évidemment conjugués.

Soit K compact maximal de G, K' son image dans G'. On prend dans G' les n sous-groupes à 1 paramètre H_i' de l'énoncé rappelé plus haut. On peut naturellement considérer G' comme faisant partie du système $(G_\alpha ; f_{\alpha\beta})$ dont la limite est G ; on peut alors appliquer le lemme 3 et trouver les sous-groupes H_i appliqués sur les H'_i par la projection de G sur G' . Il est immédiat qu'ils vérifient toutes les conditions de l'énoncé.

2. Structure locale d'un gLg connexe.

THÉORÈME 12. - *Soit* $G = \lim (G_\alpha ; f_{\alpha\beta})$ *connexe* ℓ.c., *les* G_α *étant de Lie. Alors il existe un indice* ν *tel que le noyau* $N_{\nu\alpha}$ *de* $f_{\nu\alpha}$ *soit compact et que* G_β *soit localement isomorphe au produit direct* $G_\nu \times N_{\alpha\beta}$ *toutes les fois que* $\nu < \alpha < \beta$.

Soit U un voisinage relativement compact de e dans G ; pour un certain μ, U contient l'image réciproque d'un voisinage de e dans G_μ , donc $N_\mu = f_\mu^{-1}(e)$ qui est ainsi compact, de même que $N_{\mu\alpha} = f_\alpha(N_\mu)$ et que $N_{\alpha\beta} \subset N_{\nu\beta}$ $(\nu < \alpha < \beta)$.

$N_{\mu\alpha}$ est localement isomorphe à un produit $T_{\mu\alpha} \times S_{\mu\alpha}$ ($S_{\mu\alpha}$ semi-simple, $T_{\mu\alpha}$ est un tore) ; cette décomposition est unique et $S_{\mu\alpha}$, $T_{\mu\alpha}$ sont invariants dans G_α , $T_{\mu\alpha}$ étant même dans le centre de G_α . De plus on a localement $G_\alpha = G'_\alpha \times S_{\mu\alpha}$, G' connexe, contient $T_{\mu\alpha}$ et est univoquement déterminé, par conséquent $f_{\alpha\beta}(G'_\beta) = G'_\alpha$ $(\mu < \alpha < \beta)$ et $f_{\mu\alpha}(G'_\alpha) = G_\mu$, la composante connexe de e du noyau de cet homomorphisme étant $T_{\mu\alpha}$. Pour obtenir le théorème 12, il nous faut encore établir l'existence de ν tel que G'_β soit localement une existence triviale de G'_ν $(\beta > \nu)$.

Les $f_{\alpha\beta}$ induisent des homomorphismes des algèbres de Lie AG'_α des groupes G'_α qui vérifient les axiomes LP I , LP II , Le théorème 12 étant local, il suffit de le démontrer pour les algèbres de Lie, c'est l'objet du :

LEMME 4. - *Soit* $(L_\alpha ; g_{\alpha\beta})$ *un système d'algèbres de Lie et d'homomorphismes* $g_{\alpha\beta}$ *vérifiant* LP I , LP II . *Si pour tout* $\alpha > \mu$ *le noyau de* $g_{\mu\alpha}$ *est dans le centre de* L_α *il existe* ν *tel que* $L_\beta \cong L_\nu \oplus N_{\nu\beta}$ *si* $\beta > \nu$.

Nous choisissons une fois pour toutes une base $X_1 , \dots , X_n$ de L_μ, les équations de structure étant :

$$[X_i\ X_j] = c_{ij}^\sigma X_\sigma \quad (i , j , \sigma = 1 , \dots , n) .$$

Soit dans L_α, $X_{\alpha 1} , \dots , X_{\alpha n} , Y_{\alpha 1} , \dots , Y_{\alpha p}$ une base telle que $g_{\mu\alpha}(X_{\alpha i}) = X_i$ et $g_{\mu\alpha}(Y_{\alpha i}) = 0$; alors

$$[X_{\alpha i}\ X_{\alpha j}] = c_{ij}^\sigma X_{\alpha\sigma} + d_{ij}^\tau Y_{\alpha\tau} \quad [X_{\alpha i}\ Y_{\alpha j}] = [Y_{\alpha i}\ Y_{\alpha j}] = 0$$

Considérons $(d^{\tau}_{11}, \ldots, d^{\tau}_{nn})$ comme un vecteur d^{τ} de R^{n^2}, et de même $c^{\sigma} = (c^{\sigma}_{11}, \ldots, c^{\sigma}_{nn})$; les vecteurs σ^{σ}, d^{τ} sous-tendent un sous-espace P_{α}. Un calcul immédiat montre que P_{α} ne change pas si on prend une nouvelle base $\overline{X_{\alpha i}}$, $\overline{Y_{\alpha j}}$ telle que $g_{\mu\alpha}(\overline{X_{\alpha i}}) = X_i$, $g_{\mu\alpha}(\overline{Y_{\alpha i}}) = 0$.

Si $\alpha < \beta$, on a $P_{\alpha} \subset P_{\beta}$. En effet, gardons dans L_{α} la base $\overline{X_{\alpha i}}$, $\overline{Y_{\alpha i}}$ précédente et introduisons dans L_{β} la base $X_{\beta i}$, $Y_{\beta i}$, $Z_{\beta i}$ où

$$g_{\alpha\beta}(X_{\beta i}) = X_{\alpha i} \;,\quad g_{\alpha\beta}(Y_{\beta i}) = Y_{\alpha i} \;,\quad g_{\alpha\beta}(Z_{\beta i}) = 0$$

alors

$$[X_{\beta i}\, X_{\beta j}] = c^{\sigma}_{ij}\, X_{\beta\sigma} + d^{\tau}_{ij}\, Y_{\beta\tau} + e^{\rho}_{ij}\, Z_{\rho} \qquad \text{et } P_{\alpha} \subset P_{\beta}.$$

La relation d'inclusion fait des P_{α} un ensemble ordonné filtrant à droite. Les P_{α} étant des sous-espaces d'un espace de dimension finie, il en existe un, disons P_{ν}, qui contient tous les autres. Il reste à voir que L_{β} est une extension triviale de L_{ν} ($\beta > \nu$) ; nous conservons les notations précédentes, sauf que nous posons $\alpha = \nu$; comme $P_{\beta} = P_{\nu}$, les vecteurs e^{ρ} dépendent linéairement des vecteurs c^{σ}, d^{τ} soit $e^{\rho} = a^{\rho}_{\sigma} c^{\sigma} + b^{\rho}_{\tau} d^{\tau}$. Un calcul facile montre que les transformations infinitésimales

$$\overline{X_{\beta\sigma}} = X_{\beta\sigma} + a^{\rho}_{\sigma} Z_{\rho} \qquad \text{et} \qquad \overline{Y_{\beta\tau}} = Y_{\beta\tau} + b^{\rho}_{\tau} Z_{\rho}$$

forment une sous-algèbre $L'_{\nu} \cong L_{\nu}$, et $L_{\beta} = L'_{\nu} \oplus N_{\nu\beta}$.

Revenons à $G = \lim (G_{\alpha} ; f_{\alpha\beta})$; pour $\alpha > \nu$, G_{α} contient un sous-groupe $G_{\nu\alpha}$ localement isomorphe à G_{ν} et appliqué par $f_{\nu\alpha}$ localement isomorphiquement et homomorphiquement sur G_{ν}. $G_{\nu\alpha}$ est échangeable avec $(N_{\nu\alpha})_0$ donc aussi avec $N_{\nu\alpha}$, car chaque composante connexe de $N_{\nu\alpha}$ rencontre $G_{\nu\alpha}$ puisque G_{α} est connexe et que $N_{\nu\alpha} \cap G_{\nu\alpha}$ est discret invariant dans $G_{\nu\alpha}$; enfin, si $\beta > \alpha > \nu$, $N_{\alpha\beta}$ est localement facteur direct de $N_{\nu\beta}$ ce qui démontre complètement le théorème. En général $G_{\nu\alpha}$ n'est pas univoquement déterminé. Nous justifierons plus loin le :

LEMME 5. - _On peut choisir dans_ $G_{\alpha}(\alpha > \nu)$ _un sous-groupe_ $G_{\nu\alpha}$ _localement isomorphe à_ G_{ν}, _appliqué sur_ G_{ν} _par_ $f_{\nu\alpha}$, _dans le commutant de_ $N_{\nu\alpha}$, _de façon que_ $f_{\alpha\beta}(G_{\nu\beta}) = G_{\nu\alpha}$ _toutes les fois que_ $\nu < \alpha < \beta$.

THÉORÈME 13 (Iwasawa). - _Soit_ G _un_ L-_groupe connexe_, U _un voisinage arbitraire de_ e.

U _contient un sous-groupe invariant compact_ N _et un groupe de Lie local_ L tels que G soit localement le produit direct de N et L.

Soit $G = \lim (G_\alpha ; f_{\alpha\beta})$; on peut supposer le théorème 12 vérifié. Il existe σ et un voisinage U_σ de e dans G tel que $f_\sigma^{-1}(U_\sigma) \subset U$. On peut appliquer le lemme 5 aux G_α $(\alpha > \sigma)$ considérés comme extensions de G_σ et choisir des sous-groupes $G_{\sigma\alpha} \subset G_\alpha$ cohérents, localement isomorphes à G_σ appliqués sur G_σ par $f_{\sigma\alpha}$. On prend comme N le noyau N_σ de f_σ^{-1}.

$G_{\sigma\alpha}$ est un revêtement de G_σ; on peut donc trouver dans chaque $G_{\sigma\alpha}$ un voisinage L_α de e appliqué isomorphiquement sur un certain voisinage L_σ de e dans U_σ; alors $f_{\alpha\beta}(L_\beta) = L_\alpha$ si $\alpha < \beta$ et U contient le groupe de Lie local $L = (L_\alpha)$; $N \cap L = \{e\}$ et L est dans le commutant de $N_\nu = \lim (N_{\nu\alpha}; f_{\alpha\beta})$ car L_α est dans celui de $N_{\nu\alpha}$ $(\alpha > \nu)$. Enfin, $N.L$ est ouvert car c'est l'image réciproque dans G de l'ouvert L_σ de G_σ. C.Q.F.D.

COROLLAIRE (Iwasawa). - Un L-groupe connexe localement euclidien est un groupe de Lie.

V. Les choix cohérents.

Pour démontrer les lemmes 3 et 5, nous utiliserons une proposition qui permet de faire sous certaines conditions dans les G_α des choix cohérents, c'est-à-dire compatibles avec les homomorphismes $f_{\alpha\beta}$. Nous donnerons à cette proposition une forme assez générale, où les groupes de Lie n'interviennent pas car la démonstration n'en est pas plus compliquée que dans les cas particuliers dont nous avons besoin.

Soit I ordonné filtrant à droite, pour $\alpha \in I$, H_α un ensemble partiellement ordonné par la relation $\subseteq$, muni d'une opération intersection $\cap$, et pour $\alpha < \beta$, $p_{\alpha\beta}$ une application de H_β sur H_α conservant la relation d'ordre, vérifiant $p_{\alpha\gamma} = p_{\alpha\beta} \circ p_{\beta\gamma}$, si $\alpha < \beta < \gamma$. On suppose :

(A) si $\alpha < \beta$ et $h_\alpha \in H_\alpha$, $p_{\alpha\beta}^{-1}(h_\alpha)$ a un élément maximum.

(B) dans chaque H_α une suite strictement décroissante d'éléments n'a qu'un nombre fini de termes.

THÉORÈME 14. - Soit $(H_\alpha ; p_{\alpha\beta})$ un système vérifiant les conditions précédentes et, pour tout $\alpha \in I$, Ω_α un sous-ensemble non vide de H_α tel que :

(a) $p_{\alpha\beta}(\Omega_\beta) = \Omega_\alpha$

(b) $x, y \in \Omega_\alpha$ et $x \subseteq y$ entraînent $x = y$.

(c) si $h_\alpha = p_{\alpha\beta}(h_\beta)$, $x_\alpha \subseteq h_\alpha$ $(x_\alpha \in \Omega_\alpha)$ et s'il existe $y_\beta \subseteq h_\beta$ $(y_\beta \in \Omega_\beta)$

alors il existe $x_\beta \subseteq h_\beta$ $(x_\beta \in \Omega_\beta)$ tel que $p_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$.

Sous ces hypothèses on peut choisir dans chaque Ω_α un élément x_α de sorte que $x_\alpha = p_{\alpha\beta}(x_\beta)$ toutes les fois que $\alpha < \beta$.

Soit F une partie de I ; on appelle F-système un ensemble d'éléments $x_\alpha \in \Omega_\alpha$ (α parcourant F) vérifiant :

(I) Si $\gamma > \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, γ quelconque $\in I$), il existe $x_\gamma \in \Omega_\gamma$ tel que $p_{\alpha_i\gamma}(x_\gamma) = x_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Les x_α d'un F-système sont en particulier cohérents ; les F-systèmes (F variant) forment de façon évidente un ensemble ordonné inductivement (et non vide); il possède un élément maximal d'après le théorème de Zorn ; il nous faut montrer que pour ce dernier $F = I$, c'est une conséquence du :

LEMME 6. - Soit $\beta \notin F$. Tout F-système peut être prolongé en un $\{\beta\} \cup F$-système.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$, $\gamma > \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ; désignons par $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n ; \gamma)$ l'ensemble des éléments x_β pour chacun desquels il y a $x_\gamma \in \Omega_\gamma$ tel que $p_{\alpha_i\gamma}(x_\gamma) = x_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $p_{\beta\gamma}(x_\gamma) = x_\beta$. K est non vide (conditions I et a). Soit $M_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ le maximum de $p^{-1}_{\alpha\beta}(x_\alpha)$ et posons

$$M(\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \gamma) = p_{\beta\gamma}(M_{\alpha_1\gamma}(x_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap M_{\alpha_n\gamma}(x_{\alpha_n}))$$

Il est immédiat que les K forment une base de filtre pour la relation d'inclusion et que les M en forment une pour $\subseteq$.

Si $\bigcap K(\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \gamma)$ (α_i variant dans F, γ dans I) est non vide, le lemme est démontré car un élément de cette intersection joint au F système donné forme un $\{\beta\} \cup F$-système par définition des F-systèmes et des K ; nous allons montrer que cette intersection est non vide.

Si $x \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n ; \gamma)$, on a évidemment $x \subseteq M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n ; \gamma)$. Réciproquement, si $x \in \Omega_\beta$ et $x \subseteq M(\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \gamma)$, alors $x \in K(\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \gamma)$. C'est une conséquence immédiate de b) et c).

Du fait que les M forment une base de filtre et de la condition minimale (B) on tire qu'il y a un M, disons $M(\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \gamma)$ plus petit que tous les autres (au sens de $\subseteq$). Soit alors $x_\beta \in K(\alpha_1 \ldots \alpha_n ; \gamma)$; x_β est plus petit que tous les M, donc est contenu dans tous les K.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. - On peut sans restreindre la généralité, supposer G' connexe ; c'est donc une limite projective de groupes de Lie (Théorèmes 2,3,4), soit $G' = \lim (G'_\sigma, g_{\sigma\tau})$, $(\sigma, \tau \in I')$. On considère les G'_σ comme faisant partie du système G_α , $(\alpha \in I)$, dont G est limite projective. Un sous-groupe à 1 paramètre $g'(t)$ de G' détermine alors un I'-système de transformations infinitésimales X_σ, $(\sigma \in I')$, car la condition (I) des F-systèmes est visiblement vérifiée. Ce I'-système est donc contenu dans un F-système maximal, pour lequel $F = I$, et qui détermine alors un sous-groupe à 1 paramètre de G s'appliquant sur le sous-groupe donné de G' .

DÉMONSTRATION DU LEMME 5. - H_α est l'ensemble des sous-algèbres de AG_α , Ω_α l'ensemble des sous-algèbres de AG_α isomorphes à AG_ν appliquées sur AG_ν par $g_{\nu\alpha}$ et échangeables avec $AN_{\nu\alpha}$. Pour vérifier (c) on remarque que si L_β contient un élément de Ω_β , il est facteur direct dans AG_β et il contient un facteur direct $L'_\beta \cong L_\alpha = g_{\alpha\beta}(L_\beta)$, $g_{\alpha\beta}$ étant la combinaison de la projection de L_β sur L'_β et d'un isomorphisme de L'_β sur L_α . Les autres conditions sont trivialement vérifiées. Le lemme 5 est une application directe du théorème.

Signalons enfin que l'on peut également à l'aide du théorème 14 étendre au cas dénombrable certaines démonstrations de PONTRJAGIN [4] paragraphe 45, en particulier on a le :

THÉORÈME 15. - Soit N invariant dans un L-groupe connexe G . Alors $\dim G = \dim N + \dim G/N$.

D'où l'on déduit la généralisation suivante du corollaire au théorème 13 :

THÉORÈME 16. - Un L-groupe connexe, localement connexe, de dimension finie est un groupe de Lie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GLEASON (Andrew). - On the structure of locally compact groups, Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A., t. 35, 1949, p. 384-386.

[2] IWASAWA (Kenkichi). - On some types of topological groups, Annals of Math., t. 50, 1949, p. 507-558.

[3] MONTGOMERY (Deane). - Connected one dimensional groups, Annals of Math., t. 49, 1948, p. 110-117 ; Connected two dimensional groups, Annals of Math., t. 51, 1950, p. 262-277.

[4] PONTRJAGIN (I.). - Topological groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946.

[5] SERRE (Jean-Pierre). - Extensions de groupes localement compacts, Séminaire Bourbaki, t. 2, 1949/50.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Trivialité des espaces fibrés, Applications, C.R. Acad. Paris, t. 230, 1950, p. 916-918.

[7] WEIL (André). - L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. - Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., n° 869).

ADDITIF

On trouvera les démonstrations des résultats traités dans cet exposé dans :

GLEASON (Andrew). - The structure of locally compact groups, Duke math. J., t. 18, 1951, p. 85-104.

La conjecture de Iwasawa-Gleason "Tout groupe connexe localement compact est un groupe de Lie généralisé", qui contient en particulier une solution affirmative du 5e problème de Hilbert "Un groupe topologique localement euclidien est-il un groupe de Lie"? a été démontrée tout d'abord pour un groupe de dimension finie par juxtaposition de théorèmes de Gleason et de Montgomery-Zippin :

GLEASON (Andrew). - Groups without small subgroups, Annals of Math., t. 56, 1952, p. 193-212.

MONTGOMERY (Deane) and ZIPPIN (Leo). - Small subgroups of finite-dimensional groups, Annals of Math., t. 56, 1952, p. 213-241.

puis, dans le cas général, par :

YAMABE (Hidehiko). - On the conjecture of Iwasawa and Gleason, Annals of Math., t. 58, 1953, p. 48-54 ; A generalization of a theorem of Gleason, Annals of Math., t. 58, 1953, p. 351-365.

Pour un exposé systématique de la question, voir le livre de

MONTGOMERY (Deane) and ZIPPIN (Leo). - Topological transformation groups. - New York, Interscience publishers, 1955 (Interscience Tracts n° 1).

[Juin 1957]