CHARLES EHRESMANN

Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 24, p. 153-168

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__153_0>

Séminaire BOURBAKI
(Mars 1950)

LES CONNEXIONS INFINITÉSIMALES DANS UN ESPACE FIBRÉ DIFFERENTIABLE

par Charles EHRESMANN.

Je me propose de préciser et de généraliser la notion <u>d'espace à connexion de Cartan</u>.

1. La notion d'espace fibré différentiable.

Etant données deux variétés différentiables B et F, considérons les variétés différentiables $B \times F$ et $U \times F$, où U est un ensemble ouvert quelconque de B. Soit Γ le pseudogroupe de transformations formé par l'ensemble des automorphismes différentiables des produits $U \times F$, définis par $(x, y) \to (x, t(x, y))$, où $x \in U$, $y \in F$, t étant une application différentiable de $U \times F$ dans F telle que le rang de l'application s_x, définie par $y \to t(x, y)$, soit partout égal à $\dim F$.

DÉFINITION. - Une structure fibrée différentiable sur l'ensemble E, de base B et de fibres isomorphes à F, est définie par une famille (f_i) d'applications biunivoques d'ensembles $U_i \times F$ dans E satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A tout couple d'indices (i, j) correspond $\varphi_{ji} \in \Gamma$ tel que $f_i(x, y) = f_j(x', y')$ soit équivalent à $(x', y') = \varphi_{ji}(x, y)$, c'est-à-dire $x' = x$, $y' = t_{ji}(x, y)$. Nous supposons que f_i et f_j ne sont identiques que si $i = j$.

2° Les ensembles $f_i(U_i \times F)$ recouvrent E ; les ensembles U_i recouvrent B.

3° La famille (f_i) est complète, c'est-à-dire identique à toute famille qui la contient et qui vérifie (1°) et (2°). E, muni de cette structure, est appelé espace fibré différentiable et désigné par $E(B, F)$.

Remarquons qu'une famille incomplète, vérifiant seulement (1°) et (2°), détermine une famille complète unique et par suite une structure fibrée différentiable.

La réunion de la famille (f_i) est une application f de l'espace somme $\sum (U_i \times F)$ sur E, qu'on peut identifier à l'espace quotient associé à f. Cet espace quotient est séparé puisque B est séparé. Comme φ_{ji} est un homéomorphisme différentiable, la famille (f_i), détermine aussi sur E une structure de variété différentiable, telle que f_i soit un homéomorphisme différentiable. La projection p de E sur B, définie par $p(f_i(x , y)) = x$, est alors différentiable, de rang partout égal à $\dim B$. L'application h_x^i définie par $h_x^i(y) = f_i(x , y)$ est un homéomorphisme différentiable de F sur une sous-variété F_x de E, appelée fibre.

On définit de même la notion de structure fibrée p fois différentiable ou analytique. Le pseudogroupe Γ peut aussi être restreint en imposant la condition que s_x appartienne à un groupe G d'automorphismes de F. Si G est un groupe topologique d'automorphismes, on peut imposer la condition supplémentaire que s_x soit fonction continue de x. On a ainsi la notion d'espace fibré différentiable à groupe structural G.

PROPOSITION. - Soient E et B deux variétés deux fois différentiables, B étant connexe, et soit p une application deux fois différentiable de E sur B, en tout point de rang égal à $\dim B$. Si E est compact on bien si $p^{-1}(x)$ est compact connexe quel que soit $x \in B$, les ensembles $p^{-1}(x)$ sont les fibres d'une structure fibrée deux fois différentiable.

Les ensembles $p^{-1}(x)$ sont des variétés deux fois différentiables plongées dans E, qui est ainsi munie d'une structure feuilletée. Il existe sur E un champ différentiable transversal C d'éléments de contact de dimension $n = \dim B$, l'élément de C en $z (\in p^{-1}(x)$ étant supplémentaire de l'élément tangent à $p^{-1}(x)$ en z. La proposition résulte alors du lemme suivant :

LEMME. - Si E est compact ou si $p^{-1}(x)$ est compact connexe quel que soit $x \in B$, tout chemin différentiable a de B, d'origine x et d'extrémité x', est la projection par p d'une courbe intégrale de C, d'origine $z \in p^{-1}(x)$ et d'extrémité $z' \in p^{-1}(x')$. Le point z étant arbitraire dans $p^{-1}(x)$. L'application $z \to z'$ est un homéomorphisme deux fois différentiable de $p^{-1}(x)$ sur $p^{-1}(x')$.

2. Les espaces fibrés différentiables à groupe structural de Lie.

Soit G un groupe d'automorphismes de F et supposons qu'il soit muni d'une structure deux fois différentiable telle que l'application $(s , y) \to sy$ soit deux fois différentiable, sy désignant le transformé de $y \in F$ par $s \in G$. Le groupe G est ainsi muni d'une structure de groupe de Lie. Restreignons Γ au pseudogroupe $\Gamma(G)$ des automorphismes tels que $s_x \in G$. Une structure fibrée à groupe structural de Lie G sera par définition une structure fibrée associée à $\Gamma(G)$. L'application $x \longrightarrow s_x$ est alors deux fois différentiable ; réciproquement toute application deux fois différentiable de U dans G détermine un automorphisme de $U \times F$ appartenant à $\Gamma(G)$.

Soit H l'ensemble des homéomorphismes h_x^i de F sur F_x, correspondant à la famille (f_i) qui définit sur E une structure fibrée à groupe structural de Lie G. On a $h_x^i = h_x^j s_x^{ji}$. Le sous-ensemble de H correspondant à un point x donné de B est $H_x = h_x^i G$. Soit $\bar{f}_i$ l'application $(x, s) \longrightarrow h_x^i s$ de $U_i \times G$ dans H. $h_x^i s = h_{x'}^j s'$ équivaut à $x' = x$, $s' = s_x^{ji} s$. Donc la famille $(\bar{f}_i)$ définit sur H une structure fibrée différentiable à groupe structural G_γ, groupe des translations à gauche de G. L'espace fibré E à groupe structural G sera désigné par $E(B, F, G, H)$. L'ensemble H muni de sa structure fibrée à groupe structural G_γ est appelé espace fibré principal associé à $E(B, F, G, H)$; son symbole est $H(B, G, G_\gamma, \bar{H})$. A $h \in H$ correspond l'application $\bar{h} \in \bar{H}$ de G sur la fibre $H_x = hG$, définie par $s \longrightarrow hs$.

L'application $(h, s) \longrightarrow hs$ est une application deux fois différentiable de $H \times G$ sur H. L'application partielle $h \longrightarrow hs$, que nous appellerons translation par s, est un automorphisme deux fois différentiable de H, qui laisse invariante chaque fibre H_x, mais qui, en général, n'est pas un automorphisme de la structure $H(B, G, G_\gamma, \bar{H})$. Si $h \in H_x$ et $h' \in H_x$, on a $h^{-1} h' = s \in G$. L'application $(h, h') \longrightarrow h^{-1} h'$ est aussi deux fois différentiable. L'application $(h, y) \longrightarrow hy$ est une application deux fois différentiable de $H \times F$ sur E. La relation d'équivalence associée à cette application est $(hs, s^{-1}y) \sim (h,y)$. L'espace quotient de $H \times F$ par cette relation d'équivalence peut être identifié canoniquement avec E.

On peut considérer sur F une structure admettant G comme groupe d'automorphismes. Par un homéomorphisme quelconque h appartenant à H_x, cette structure se transporte sur F_x. Chaque fibre F_x est alors munie d'une structure additionnelle bien déterminée. Tout isomorphisme d'une fibre de $E(B, F, G, H)$ sur une fibre de $E'(B', F, G, H')$ est de la forme $h'h^{-1}$. L'ensemble $H'H^{-1}$ de ces isomorphismes est un espace fibré de base $B \times B'$, de fibre G, le groupe structural étant le groupe des similitudes de G, définies par $s \longrightarrow asb$. Il s'identifie à l'espace quotient de $H \times H'$ par la relation d'équivalence $(h, h') \sim (hs, h's)$. L'application $(h, h') \longrightarrow h'h^{-1}$ est deux fois différentiable. En particulier, H est l'espace des isomorphismes de F sur les fibres de $E(B, F, G, H)$.

Un isomorphisme de $E(B, F, G, H)$ sur $E'(B', F, G, H')$ est un homéomorphisme t de E sur E', deux fois différentiable et tel que $h \rightarrow th$ soit une application $\bar{t}$ de H sur H' (ou tel que la restriction de t à une fibre soit un isomorphisme sur une fibre). Cette application $\bar{t}$ est caractérisée par les propriétés suivantes ; elle est deux fois différentiable, $\bar{t}(hs) = \bar{t}(h)s$, elle se projette sur un homéomorphisme deux fois différentiable de B sur B'. Plus généralement, une (F, G)-représentation de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$ est une application t de E dans E', deux fois différentiable et telle que $h \longrightarrow th$ soit une application de H dans H'.

Espaces fibrés associés et structures subordonnées. - Ces notions se précisent d'une manière naturelle lorsque le groupe structural est un groupe de Lie G. Etant donné un homomorphisme φ de G sur un groupe de Lie G', considéré comme groupe d'automorphismes d'une variété deux fois différentiable F', à l'espace fibré $E(B, F, G, H)$ est associé canoniquement un espace fibré $E'(B, F', G', H')$. On a un homomorphisme $\bar{\varphi}$ de H sur H', c'est-à-dire une application deux fois différentiable, se projetant sur l'application identique de B et tel que $\bar{\varphi}(hs) = \bar{\varphi}(h)\,\varphi(s)$. H' s'identifie à l'espace des classes hG'', où G'' est le noyau de l'homomorphisme φ. E' est l'espace quotient de $H \times F'$ par la relation d'équivalence $(h, y') \sim (hs, (s)^{-1} y')$.

Si G_1 est un sous-groupe fermé de G, l'espace H/G des classes $h\,G_1$ est un espace fibré de base B, de fibre G/G_1. Les structures subordonnées à $E(B, F, G, H)$, de groupe structural G_1, correspondent aux sections deux fois différentiables de l'espace fibré H/G_1 ainsi défini.

Sections différentiables.

PROPOSITION. - Toute section d'un espace fibré p fois différentiable peut être approchée par une section p fois différentiable de même classe (c'est-à-dire homotope par une déformation qui maintient chaque point dans une fibre fixe).

La démonstration utilise l'existence de subdivisions simpliciales assez fines de la variété différentiable B ainsi que les lemmes 3a et 4a de S. EILENBERG [9].

Dans le cas différentiable, le théorème du relèvement des homotopies peut s'énoncer ainsi :

PROPOSITION. - Si l'application différentiable f de A dans B est projection d'une application différentiable f' de A dans $E(B, F)$, toute déformation différentiable de f est projection d'une déformation différentiable de f'.

Etant donné l'espace fibré $E(B, F, G, H)$, à groupe structural de Lie, et une application deux fois différentiable f de A dans B, l'espace fibré $f^{\star}(E)$, sous-espace de $A \times E$ se projetant sur l'ensemble représentatif de f dans $A \times B$, est un espace fibré de base A et de groupe structural G.

PROPOSITION. - Si f est homotope à f_1, $f^{\star}(E)$ et $f_1^{\star}(E)$ sont isomorphes.

3. La notions de connexion infinitésimale dans un espace fibré différentiable.

Soit $E(B, F)$ un espace fibré deux fois différentiable, la dimension de B étant n. Il existe sur E un champ transversal différentiable C de n-éléments, c'est-à-dire un champ de n-éléments supplémentaires aux éléments de contact tangents aux fibres.

DÉFINITION. - Une connexion infinitésimale dans $E(B, F)$ est définie par un champ transversal différentiable C vérifiant la condition suivante :

(c) Tout chemin différentiable a de B, d'origine x et d'extrémité x' est la projection d'une courbe intégrale a' du champ C, d'origine $z \in F_x$ et d'extrémité $z' \in F_{x'}$, le point z étant arbitraire dans F_x.

REMARQUE. - Plus généralement, le champ de n-éléments pourrait être remplacé par un champ de cônes élémentaires.

PROPOSITION. - Si F est compact, tout champ transversal différentiable C vérifie la condition (c).

Cette proposition se ramène au lemme énoncé plus haut, en remarquant que l'ensemble des composantes connexes des fibres de E détermine sur E une structure fibrée différentiable ayant pour base un revêtement de B.

Etant donnée une connexion infinitésimale C dans $E(B, F)$, l'application $z' \to z$, associée d'après la condition (c) au chemin a de B, est un homéomorphisme différentiable φ_a de $F_{x'}$ sur F_x. Si aa_1 désigne le composé des deux chemins a et a_1, on a $\varphi_{aa_1} = \varphi_a \varphi_{a_1}$. Le groupoïde [1] des chemins différentiables de B est ainsi représenté sur un groupoïde d'homéomorphismes différentiables d'une fibre sur une autre. En particulier, le

---

[1] Le groupoïde des chemins d'un espace B est en réalité le quotient de l'ensemble des chemins de B par une certaine relation d'équivalence compatible avec la multiplication.

groupe des chemins fermés en x est représenté sur un groupe ϕ_x d'automorphismes de F_x ; appelé groupe d'holonomie de la connexion C en x. L'arc a détermine un isomorphisme du groupe ϕ_x sur $\phi_{x'}$.

PROPOSITION. - L'espace fibré $E(B, F)$ admet une structure fibrée subordonnée à groupe structural ϕ_x.

DÉFINITION. - La connexion infinitésimale C est dite intégrable lorsque le champ C est complètement intégrable.

Soit C une connexion intégrable. Elle détermine un homomorphisme du groupe de Poincaré π_x de B en x sur le groupe d'holonomie ϕ_x. L'espace fibré $E(B, F)$ admet par suite une structure fibrée subordonnée à groupe structural discret ϕ_x. La projection p de E sur B définit chaque variété intégrale complète de C comme un revêtement de B. Soit π' le noyau de l'homomorphisme de π_x sur ϕ_x. Soit B' le revêtement de B correspondant à π': les points de B' sont les classes de chemins $\pi' a$, où a est un chemin d'origine x. Si f est la projection de B' sur B, c'est-à-dire l'application qui fait correspondre à la classe $\pi' a$ l'extrémité de a, l'espace fibré $f^*(E)$, de base B' et de fibre F, est un revêtement de E dont la projection canonique sur E est une F-représentation f' se projetant sur f.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] & f^*(E) \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "p'"] \\ B & B' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} \qquad (pf' = fp')$$

$f^*(E)$ est munie d'une connexion infinitésimale intégrable, image réciproque par f' de C, dont le groupe d'holonomie est réduit à l'identité. Donc $f^*(E)$ est isomorphe à $B' \times F$. Les variétés intégrales complètes de C sont les images par f' des variétés $B' \times \{y\}$.

L'espace E, muni de sa structure fibrée et de la structure feuilletée définie par C, est déterminé à un isomorphisme près par la donnée de B, F et de la représentation de π_x sur le groupe d'holonomie ϕ_x. A chaque chemin a, **fermé** en x correspond un automorphisme $\varphi_a \in \phi_x$ et un automorphisme t_a du revêtement B' de B : $t_a(\pi' \ell) = \pi' a \ell$, où ℓ est un chemin d'origine x. L'application $t_a \longrightarrow \varphi_a$ est un isomorphisme ψ du groupe des automorphismes du revêtement B' sur le groupe ϕ_x. E se déduit de $B' \times F$ en identifiant les couples (u, y) et $(tu, \psi(t)y)$, où $u \in B'$, $y \in F$,

t = automorphisme du revêtement B'.

APPLICATION. - Etant donnée une structure feuilletée deux fois différentiable sur une variété V, soit B une feuille stable. Alors B admet un voisinage tubulaire E ; c'est un voisinage qui est réunion de feuilles et qui admet une structure fibrée différentiable, transversale par rapport aux feuilles, de base B, la fibre étant une boule. La structure feuilletée sur E définit une connexion infinitésimale intégrable relativement à la structure fibrée. Donc elle ne dépend que de la représentation du groupe de Poincaré de B sur le groupe d'holonomie.

Si le groupe de Poincaré d'une feuille compacte B est fini, B est toujours stable (théorème de Reeb) ; la structure du voisinage tubulaire feuilleté de B peut alors être précisée en remarquant que le groupe d'holonomie est dans ce cas équivalent à un groupe fini de rotations euclidiennes d'une boule autour de son centre.

PROPOSITION. - Pour qu'une variété différentiable B plongée dans une variété V admette un voisinage feuilleté ayant B comme feuille, il faut et il suffit que l'espace fibré des vecteurs normaux à B admette un groupe structural discret.

4. La notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré à groupe structural de Lie.

DÉFINITION. - Soit $E(B, F, G, H)$ un espace fibré à groupe structural de Lie G. Une connexion infinitésimale dans $E(B, F, G, H)$ sera définie par un champ transversal C vérifiant la condition (c) et tel que l'homéomorphisme φ_a associé au chemin a de B soit un isomorphisme de $F_{x'}$ sur F_x.

Soit (y_i) une famille de points de F telle que le sous-groupe de G qui la laisse invariante soit réduit à la transformation identique. Soit R_s la famille (sy_i), transformée de (y_i) par $s \in G$, et soit R_h la famille (hy_i), transformée de (y_i) par $h \in H$. Nous dirons que R_s et R_h forment deux ensembles de repères dans F et E respectivement. L'ensemble des repères R_h est un sous-espace du produit d'une famille d'espaces identiques à E. On peut identifier H à ce sous-espace par l'application $h \longrightarrow R_h$, qui est un homéomorphisme. D'ailleurs si (y_i) est la famille de tous les points de F, chaque point étant confondu avec son indice, R_h est identique à h par définition.

On peut toujours prendre dans F un repère initial formé par une famille finie de points y_i. Une connexion infinitésimale C dans $E(B, F, G, H)$ fait alors correspondre au chemin a de B un chemin différentiable de l'espace des repères (identifié à H), d'origine $R_h = (hy_i)$, où h est un élément arbitraire de H_x. On voit ainsi qu'au champ C correspond dans $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$ un champ différentiable transversal $\overline{C}$, qui sera évidemment invariant par les translations $h \longrightarrow hs$.

PROPOSITION. - Dans l'espace $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$ il existe toujours un champ différentiable transversal $\overline{C}$, invariant par toute translation $h \longrightarrow hs$. Un tel champ vérifie toujours la condition (c) et définit donc une connexion infinitésimale dans $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$. Par l'application $(h, y) \longrightarrow hy$, où $h \in H$, $y \in F$, on en déduit une connexion infinitésimale dans $E(B, F, G, H)$ et, d'une manière analogue, dans tout espace fibré associé.

Deuxième définition d'une connexion infinitésimale [2]. - Faisons correspondre au vecteur $h + dh$, tangent en h à la fibre $h(F)$ de H, le vecteur $h^{-1}(h + dh)$, tangent en e à G. La relation $h^{-1}(h + dh) = h_1^{-1}(h_1 + dh_1)$ définit une relation d'équipollence (ou parallélisme) dans l'ensemble des vecteurs tangents aux fibres de H. Remarquons qu'au vecteur $h(s + ds)$ correspond le vecteur $s^{-1}(s + ds)$ et qu'au vecteur $(h + dh)s$ correspond le vecteur $s^{-1} h^{-1}(h + dh)s$, qui se déduit de $h^{-1}(h + dh)$ par une transformation du groupe adjoint linéaire.

Considérons dans $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$ un champ transversal différentiable $\overline{C}$, invariant par les translations $h \longrightarrow hs$. Soit $h + \overline{dh}$ la projection du vecteur $h + dh$, tangent en h à H, par l'application linéaire projetant l'espace tangent en h à H sur l'espace tangent en h à la fibre $h(F)$ de telle façon que l'élément du champ $\overline{C}$ en h soit projeté sur le point h. Faisons correspondre au vecteur $h + dh$ le vecteur :

$$w(h + dh) = h^{-1}(h + \overline{dh}) .$$

([2]) Remarque sur les notations.

Un vecteur tangent en x à une variété différentiable E est noté $x + dx$; le symbole dx désigne un vecteur libre de l'espace affine tangent en x. Si f est une application différentiable de E dans E', le prolongement de f aux vecteurs tangents est encore désigné par f. Soit $(x + dx, y + dy)$ un vecteur tangent à la variété produit $E \times F$ et soit f une application différentiable de $E \times F$. On a

$$f(x + dx, y + dy) = f(x + dx, y) + f(x, y + dy) .$$

En particulier si $f(x, y)$ se note xy, on a :

$$(x + dx)(y + dy) = x(y + dy) + (x + dx)y .$$

L'application $h + dh \longrightarrow w(h + dh)$ possède les propriétés suivantes :

1. Elle est linéaire pour h fixe.

(c') 2. $w(h(s + ds)) = s^{-1}(s + ds)$

3. $w((h + dh)s) = s^{-1}w(h + dh)s$.

Réciproquement toute application $h + dh \longrightarrow w(h + dh)$ de l'ensemble des vecteurs tangents à H sur l'espace tangent à G en e, qui possède les trois propriétés (c'), détermine une connexion infinitésimale dans H, le champ $\overline{C}$ étant défini par $w(h + dh) = 0$.

5. Espaces à connexion de Cartan.

Considérons le cas particulier suivant

(c_1) G est transitif dans F, c'est-à-dire F est l'espace homogène G/G', où G' est le sous-groupe fermé du groupe de Lie G laissant invariant un point $0 \in F$.

(c_2) $\dim F = \dim B = n$.

(c_3) L'espace fibré $E(B, F, G, H)$ admet une section deux fois différentiable que nous identifions à B .

Soit H' le sous-espace de H formé par l'ensemble des isomorphismes de F sur F_x appliquant 0 sur x, où $x \in B$ (considéré comme section). H' est un espace fibré $H'(B, G', G'_\gamma, \overline{H}')$; c'est l'espace fibré principal associé à une structure fibrée $E(B, F, G', H')$, subordonnée à $E(B, F, G, H)$. La donnée d'une structure fibrée $E(B, F, G', H')$ entraîne inversement celle d'une structure $E(B, F, G, H)$ telle que $H' \subset H$; celle-ci vérifie (c_3), la section à laquelle sera identifié B étant définie par l'application $x \longrightarrow h'(0)$, $h' \in H'_x$.

L'espace F_x sera dit tangent à B en x lorsque les vecteurs tangents à F_x en x peuvent être identifiés aux vecteurs tangents à B en x, dans le sens précis suivant : Soit $T(B)$ l'espace des vecteurs tangents à B ; c'est un espace fibré $T(B, R^n, L_n, H_1)$, où L_n est le groupe linéaire homogène de l'espace numérique R^n. Soit $T'(B)$ l'espace des vecteurs tangents à F_x en $x \in B$. C'est l'espace fibré associé à $E(B, F, G', H')$, quotient de $H' \times R^n_0$ par la relation d'équivalence associée à l'application $(h', 0 + dy) \rightarrow h'(0 + dy)$ où $h' \in H'$ et $0 + dy \in R^n_0$ (espace tangent à F en 0). C'est donc un espace fibré de symbole $T'(B, R^n, L'_n, H'_1)$, L'_n étant le "groupe linéaire d'isotropie" de l'espace homogène F au point 0. Lorsqu'on peut identifier $T'(B)$ à $T(B)$ par un isomorphisme se projetant sur la transformation identique de B, F_x sera dit tangent à B en x. Pourque cette identification soit possible, il faut que l'espace fibré $T(B, R^n, L_n, H_1)$ admette une structure subordonnée à groupe structural L'_n. On est ainsi conduit à un problème de classes caractéristiques.

Une connexion infinitésimale définie dans H par une fonction $w(h + dh)$ vérifiant les conditions (c') sera déjà déterminée, en vertu de ces conditions, par la restriction $w(h' + dh')$ à l'ensemble des vecteurs tangents à H'.

DÉFINITION. - Une connexion de Cartan sur B est définie par la donnée d'un espace fibré $E(B, F, G', H')$ satisfaisant aux conditions (c_1), (c_2) et d'une application $h' + dh' \longrightarrow w(h' + dh')$ de l'ensemble des vecteurs tangents à H' sur l'espace tangent à G en e, cette application vérifiant les conditions (c'), où h est remplacé par h', ainsi que la condition suivante : $w(h' + dh') = 0$ entraîne $dh' = 0$.

PROPOSITION. - Une connexion de Cartan sur B détermine un isomorphisme de $T(B)$ sur $T'(B)$.

B est supposé identifié à la section définie par $x \longrightarrow h'(0)$, $h' \in H'_x$.

Au vecteur $h' + dh'$ tangent à H' correspond $w(h' + dh')$, qui se projette par la projection de G sur F, sur un vecteur $0 + dy$ tangent à F. D'autre part $h' + dh'$ se projette sur un vecteur $x + dx$ tangent à B. L'application $x + dx \longrightarrow h'(0 + dy)$, qui ne change pas en remplaçant $h' + dh'$ par $(h' + dh')s + h'(s + ds)$, est l'isomorphisme cherché.

PROPOSITION. - Etant donné $E(B, F, G', H')$ tel que $T(B)$ soit isomorphe à $T'(B)$, il existe une connexion de Cartan sur B correspondant à $E(B, F, G', H')$.

REMARQUE. - Une connexion de Cartan correspond à un parallélisme global d'un type particulier dans H'. Ainsi le transport par parallélisme de Levi-Civita sur un espace de Riemann B correspond à un parallélisme dans l'espace des repères formés par les suites de n vecteurs orthonormés.

L'espace homogène $F = G/G'$ admet une connexion de Cartan naturelle. $F \times F$ est un espace fibré à groupe structural G, les fibres étant les ensembles $\{x\} \times F$. Soit B la diagonale de $F \times F$ et considérons-la comme espace de base de $F \times F$. Chaque fibré admet alors une identification naturelle à B par l'application

$(x, y) \longrightarrow (y, y)$. H est l'ensemble des isomorphismes $(0, y) \longrightarrow (x, sy)$ de F_0 sur les fibres. H' est l'ensemble des isomorphismes $(0, y) \rightarrow (s(0), sy)$. H' peut être identifié canoniquement à G, en faisant correspondre cet isomorphisme à $s \in G$. Dans $F \times F$, espace des couples (xy), on a la connexion intégrable naturelle déterminée par le champ de n-éléments défini par $dx = 0$. Cette connexion est aussi déterminée par la fonction $w(s + ds) = s^{-1}(s + ds)$, G étant supposé identifié à H'.

<u>Développement d'un espace à connexion de Cartan sur l'espace homogène</u> F.
L'équation $s^{-1}(s + ds) = w(h' + dh')$ fait correspondre à tout chemin différentiable de H', d'origine h'_0, un chemin de G, d'origine s_0. Par projection sur B et F respectivement, nous faisons correspondre ainsi à un chemin a de B un chemin a' de F. Si h'_0 et s_0 sont donnés, le chemin a' ne dépend que du chemin a et s'appelle le développement de a sur l'espace homogène F.

Si la fonction $w(h' + dh')$ est plusieurs fois différentiable par rapport à z', le développement permet de faire correspondre à un élément de contact de dimension quelconque et d'ordre supérieur un élément analogue (mais non holonome en général) de F. La connexion détermine un isomorphisme canonique de l'espace des éléments de contact (non holonomes) d'ordre supérieur de B en x sur l'espace des éléments analogues de F_x en x. Les espaces homogènes F_x peuvent être dit tangents d'ordre supérieur à B en x. Si l'espace fibré H' est k fois différentiable, une connexion de Cartan sur B peut être approchée par une connexion de Cartan $k - 1$ fois différentiable. L'existence d'une telle connexion est donc simplement équivalente à l'existence d'un isomorphisme de $T(B)$ sur $T'(B)$, se projetant sur l'application identique de B.

Les invariants différentiels de l'espace B à connexion de Cartan sont les invariants différentiels relativement à G des éléments de contact développés dans F.

<u>Définition du développement à partir des champs</u> $\overline{C}$ <u>et</u> C.

La connexion de Cartan, donnée par la fonction $h' + dh' \longrightarrow w(h' + dh')$, correspond à une connexion infinitésimale dans l'espace fibré $E(B, F, G, H)$, définie par un champ transversal $\overline{C}$ de l'espace fibré principal H. On a $H = H'G$. Posons $h = h's^{-1}$ ou $hs = h'$.

$$(h + dh)s + h(s + ds) = h' + dh'$$

$$s^{-1}\, w(h + dh)s + s^{-1}(s + ds) = w(h' + dh') .$$

Le prolongement de w aux vecteurs tangents à H est donc défini par :

$$w(h + dh) = s\, w(h' + dh')s^{-1} - (s + ds)s^{-1}$$

Le champ $\overline{C}$ est défini par l'équation $w(h + dh) = 0$, c'est-à-dire :

(1) $$s^{-1}(s + ds) = w(h' + dh') \quad .$$

Considérons un chemin b dans H' , défini par $t \longrightarrow h'_t$. Il lui correspond un chemin b' dans G , défini par $t \longrightarrow s_t$ tel que $t \longrightarrow (s_t , h'_t)$ soit une courbe intégrale de (1) dans $G \times H'$, le point s_o pouvant être choisi arbitrairement. Chacun des deux chemins b et b' est dit le développement de l'autre. Les projections respectives dans B et F sont deux chemins a et a' dont chacun est dit le développement de l'autre.

Les lignes intégrales de $\overline{C}$ qui se projettent sur a déterminent un isomorphisme de la fibre $h'_t G$ sur la fibre $h'_o G$. Dans cet isomorphisme $h'_t\, s_t^{-1}$ correspond à $h'_o\, s_o^{-1}$ et par suite h'_t à $h'_o\, s_o^{-1} s_t$. Le chemin $\overline{b}$ décrit par $h'_o\, s_o^{-1}\, s_t$ est le développement dans la fibre $h'_o G$ du chemin b .

L'application canonique de H sur E , définie par $h \longrightarrow h(0)$, fait correspondre à H' la section de $E(B , F , G , H)$ qu'on a identifiée à B . Au champ $\overline{C}$ correspond le champ transversal C dans E . Au chemin $\overline{b}$ correspond dans la fibre F_{x_o} un chemin $\overline{a}$, développement du chemin a dans cette fibre. Ce chemin $\overline{a}$ est décrit par le point $\overline{x}_t$, origine de la ligne intégrale du champ C qui se projette sur a et qui passe par le point x_t , projection sur B de h'_t . Par ce développement dans la fibre F_{x_o} des chemins de B d'origine x_o on retrouve l'isomorphisme canonique de l'espace tangent en x_o à B sur l'espace tangent en x_o à F_{x_o} , ainsi que, dans le cas d'une connexion plusieurs fois différentiable, l'isomorphisme canonique de l'espace des éléments de contact d'ordre supérieur de B en x_o sur l'espace des éléments analogues de F_{x_o} en x_o .

La notion de développement se précise encore par les remarques suivantes :

Soit $E(B , F , G , H)$ un espace fibré muni d'une connexion infinitésimale C et soit f une application différentiable régulière d'une variété V dans B . Appelons $f^*(B)$ l'espace représentatif de f dans $V \times B$. L'espace fibré $f^*(E)$, dont la base peut être identifiée avec $f^*(B)$ ou avec V , est muni d'une connexion $f^*(C)$, image réciproque de la connexion C . Si C définit sur B

une connexion de Cartan, $f^\star(C)$ définit sur $f^\star(B)$ ou sur V une connexion de Cartan dans un sens généralisé : l'espace homogène tangent attaché à un point de V est isomorphe à F, mais $\dim F \geqslant \dim V$; c'est-à-dire la condition (c_2) n'est plus vérifiée.

Supposons de nouveau que la connexion de Cartan C sur B soit définie par la forme différentielle vectorielle $w(h' + dh')$ sur H'. Soit $\overline{f}$ une application de V dans H' se projetant sur f. Soit $\overline{f}_1$ une application de V dans G telle que $(\overline{f}, \overline{f}_1)$ définisse une variété intégrale de (1) dans l'espace $H' \times G$. L'application $\overline{f}_1$ admet une projection f_1, application de V dans $F = G/G'$. On dira que f_1 est le développement de f. Les espaces fibrés $f^\star(H')$ et $f_1^\star(G)$, qui sont des espaces fibrés principaux de base $f^\star(B)$ et $f_1^\star(F)$ et de fibre G', se correspondent par l'isomorphisme $(v, \overline{f}(v)s') \longrightarrow (v, \overline{f}_1(v)s')$, $v \in V$. Cet isomorphisme se projette sur l'application $(v, f(v)) \longrightarrow (v, f_1(v))$ de $f^\star(B)$ sur $f_1^\star(F)$, ou sur l'application identique de V. Il correspond à la variété intégrale de (1), définie par les applications $(v, \overline{f}(v)s') \rightarrow \overline{f}(v)s'$ et $(v, \overline{f}(v)s') \longrightarrow \overline{f}_1(v)s'$, qui plongent $f^\star(H)$ dans $H' \times G$. Cette variété intégrale peut être appelée variété intégrale saturée déduite de la variété intégrale donnée. L'isomorphisme de $f^\star(H')$ sur $f_1^\star(G)$ établit un isomorphisme pour les deux connexions de Cartan définies sur $f^\star(B)$ et $f_1^\star(F)$ comme images réciproques des connexions de Cartan sur B et F. Sans supposer que f soit projection d'une application $\overline{f}$, nous pouvons donner la définition suivante :

Une application f_1 de V dans F est appelée développement de l'application f de V dans B lorsqu'il existe un isomorphisme de $f^\star(B)$ sur $f_1^\star(F)$, muni des connexions de Cartan images réciproques de C par f et f_1, cet isomorphisme appliquant $(v, f(v))$ sur $(v, f_1(v))$. Un tel isomorphisme sera défini par un isomorphisme de $f^\star(H')$ sur $f_1^\star(G)$ correspondant à une solution de (1).

Cas d'une connexion de Cartan intégrable. – Le champ $\overline{C}$ ou l'équation (1) sont alors complètement intégrables. L'espace B est localement développable sur F : c'est un espace localement homogène de Lie, localement isomorphe à F.

Si le groupe d'holonomie est réduit à l'identité, les variétés intégrales du champ complètement intégrable 0 dans E définissent une projection de la section B de E sur une fibre F_{x_0}. Cette projection, qui définit le développement de B dans F_{x_0}, est un homéomorphisme local étalant B sur F_{x_0}. Dans le cas général, en remplaçant B par un revêtement convenable B' (voir paragraphe 3 p. 6), on obtient de la même façon le développement de B' dans F, défini par un homéomorphisme local étalant B' sur F.

Rappelons que la condition d'intégrabilité de la connexion de Cartan peut s'exprimer de la façon suivante : prenons une base dans l'espace vectoriel tangent à G en e. Soient $w_i(h' + dh')$, où $i = 1, \ldots, r$, les coordonnées de $w(h' + dh')$ parrapport à cette base. Si $\omega_i(s + ds)$ désignent les coordonnées de $s^{-1}(s + ds)$, on a :

$$d\,\omega_i = \sum_{j<k} c_{jki}\, \omega_j \wedge \omega_k .$$

Nous pouvons poser :

$$dw_i = \sum_{j<k} c_{jki}\, w_j \wedge w_k + W_i ,$$

où les W_i s'appellent les formes de courbure de la connexion. L'équation (1) est alors équivalente au système de Pfaff

$$(1)' \qquad \omega_i(s + ds) = w_i(h' + dh') .$$

Pour que celui-ci soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les formes de courbure W_i soient nulles.

REMARQUE. - La recherche du groupe d'holonomie d'une connexion non intégrable revient à la recherche de certaines solutions du système de Pfaff qu'on obtient en écrivant que $w(h + dh)$, où $h \in H$, appartient à une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de G.

6. Espaces à connexion de Cartan complets.

Soit B un espace muni d'une connexion de Cartan correspondant à l'espace homogène $F = G/G'$. Tout chemin de B admet un développement sur F, à cause de l'homogénéïté de F. L'espace B sera dit complet si inversement tout chemin de F admet un développement sur B, correspondant à un choix arbitraire du repère initial H'_o (c'est-à-dire si tout chemin dans G admet un développement sur H' d'origine h'_o).

Pour certains types de connexions de Cartan (par exemple pour les connexions euclidiennes ou affines), cette condition est équivalente à des conditions en apparence plus simples.

PROPOSITION. - Si l'espace B est complet, à connexion de Cartan intégrable, son revêtement universel est isomorphe au revêtement universel de F.

Cette proposition admet la généralisation suivante :

PROPOSITION. - Soient B et $\overline{B}$ deux espaces à connexion de Cartan analytiques. Si B et $\overline{B}$ sont complets et simplement connexes, tout isomorphisme d'un voisinage de $x \in B$ sur un voisinage de $\overline{x} \in \overline{B}$ admet un prolongement définissant un isomorphisme global de B sur $\overline{B}$.

Il est clair qu'un isomorphisme de B sur $\overline{B}$ est un homéomorphisme de H' sur $\overline{H}'$ vérifiant l'équation $w(h' + dh') = \overline{w}(\overline{H}' + d\overline{h}')$, les notations étant les mêmes que précédemment, les symboles se rapportant à $\overline{B}$ étant marqués d'une barre.

7. Etude particulière de certaines connexions de Cartan.

Espaces à connexion d'éléments de contact. Discussion du problème d'existence d'une connexion de Cartan d'espèce donnée sur une variété donnée B.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Elie). - Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, Acta Math., t. 48, 1926, p. 1-42.

[2] EHRESMANN (Charles). - Sur les espaces localement homogènes, Ens. math., t. 35, 1936, p. 317-333.

[3] EHRESMANN (Charles). - Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle, C. R. Acad. Sc. Paris, 1936, p. 2033-2035.

[4] EHRESMANN (Charles). - Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 206, 1948, p. 1433-1436.

[5] EHRESMANN (Charles). - Sur les espaces fibrés différentiables, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 224, 1947, p. 1611-1612.

[6] EHRESMANN (Charles). - Sur la théorie des espaces fibrés, Colloque de Topologie algébrique [1947. Paris]. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1949 (Coll. intern. CNRS, 12) ; p. 3-15.

[7] EHRESMANN (Charles). - Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 226, 1948, p. 1879-1880.

[8] EHRESMANN (Charles). - Sur la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré et sur les espaces à connexion de Cartan, Nachr. österr. math. Gesellsch., t. 3, 1949, n° 8-9, p. 22-23.

[9] EILENBERG (Samuel). - Singular homology in differentiable manifolds, Annals of Math., t. 48, 1947, p. 670-681.

ADDITIF

Le présent exposé a été publié sous le même titre, mais sous une forme plus complète dans :

[10] EHRESMANN (Charles). - Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie (espaces fibrés) [1950. Bruxelles]. - Liège, Georges Thone et Paris, Masson, 1951 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[Novembre 1958]