PIERRE SAMUEL

Anneaux locaux ; introduction à la géométrie algébrique

Séminaire N. Bourbaki, 1952, exp. nº 22, p. 141-145
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1948-1951__1__141_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1949)

ANNEAUX LOCAUX ; INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par Pierre SAMUEL.

1. Définition des anneaux locaux ; exemples.

Sauf mention expresse du contraire, "anneau" = "anneau commutatif, noethérien, avec élément unité". Un anneau A est dit local si l'ensemble des idéaux propres de A admet un plus grand élément M ; M est alors l'unique idéal maximal de A ; les éléments inversibles de A sont ceux de $\complement M$ et A/M est appelé le corps résiduel de A. Cas d'égales caractéristiques de A et A/M (0 et $0,p$ et p) et cas d'inégales caractéristiques (0 et p, p^k et p, ce dernier cas seulement si A a des diviseurs de zéro). Egales caractéristiques dans les applications géométriques.

EXEMPLES. - 1) Anneau des nombres rationnels dont le dénominateur ne contient pas p ; anneau des entiers p-adiques ; plus généralement anneaux de valuation dont le groupe des valeurs est isomorphe à Z.

2) Anneau des séries formelles en n lettres sur un corps, ou sur un anneau local.

3) Algèbres de dimension finie sur un corps telles que (0) soit primaire.

4) Anneau des quotients d'un idéal premier P d'un anneau B. Soit S l'intersection des idéaux primaires pour P (S = intersection des composantes primaires de (0) contenues dans P) ; dans B/S les classes d'éléments de $\complement P/S$ ne divisent pas 0 ; on forme l'anneau des fractions a/b où $a \in B/S$, $b \in B/S$, $b \notin P/S$, soit A ; A est un anneau local d'idéal maximal $(P/S.A$; $S = (0)$ si B est un anneau d'intégrité ; on note $A = B_P$. Anneau des quotients d'une sous-variété.

2. Topologie et complétion d'un anneau local ; anneau de Zariski.

Si A est un anneau local et M son idéal maximal, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = (0)$ (Krull) ; si on prend (M^n) pour système fondamental de voisinages de 0, on obtient donc une topologie d'anneau séparé sur A. Considérons plus généralement (Zariski) un anneau A et un idéal M de A tel que $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = (0)$ (équivalent à : aucun élément a congru à 1 mod M n'est diviseur de 0) ; topologisé par les (M^n) ("anneau de Zariski").

Si I est un idéal de A, sa fermeture $\bar{I}$ est l'intersection des composantes primaires Q_i de I associées aux idéaux premiers P_i tels que $P_i + M \neq A$. Une "bonne propriété" est : "tout idéal est fermé" ; ceci équivaut à " A est le seul idéal premier P tel que $P + M = A$", ou encore au fait que M est contenu dans le radical (à la Jacobson) de A (anneaux semi-locaux généralisés). Cas particuliers : a) A est complet ; b) A a un nombre fini d'idéaux maximaux et M est leur produit (= intersection ; "anneaux semi-locaux") ; c) A est un anneau local et M est son idéal maximal.

La topologie de l'anneau (commutatif et noethérien) $\bar{A}$, complété de A, est définie par les idéaux $(\bar{M}^n)$ $(\bar{M} = \bar{A}.M$; $\bar{M} \cap A = M)$; si A est un anneau local, $\bar{A}$ est un anneau local d'idéal maximal $\bar{M}$.

3. Notions de dimension et de multiplicité dans un anneau local.

Les idéaux Q primaires pour M sont ceux tels que $Q \supset M^s$ pour certain entier s. Pour un tel idéal Q, A/Q^n est un anneau d'Artin dont la longueur $P_Q(n)$ est un polynome en n pour n assez grand. Le degré d de $P_Q(n)$ est indépendant de l'idéal Q primaire pour M choisi ; on l'appelle la dimension de A ; $d = 0$ pour une algèbre primaire, $d = 1$ pour un anneau de valuation, $d = n$ pour un anneau de séries formelles à n variables sur un corps. Définitions équivalentes de la dimension :

a) Plus petit entier d tel que quelque idéal Q primaire pour M puisse être engendré par d éléments (Chevalley).

b) longueur maximum d'une chaîne descendante d'idéaux premiers diminuée de 1 (Krull).

Comme $P_Q(n)$ ne prend que des valeurs entières, son terme de plus haut degré est de la forme $e(Q)n^d/d!$, où $e(Q)$ est un entier, appelé la multiplicité de Q ; $e(M)$ est aussi appelé la multiplicité de l'anneau local A. Comme les anneaux A/Q^n et $\bar{A}/\bar{A}.Q^n$ sont isomorphes (Q^n étant un idéal ouvert de A), les dimensions de A et $\bar{A}$ sont égales, ainsi que les multiplicités de Q et de $\bar{A}.Q$.

Un ensemble de d éléments $(x_1, \ldots, x_d)$ de A engendrant un idéal Q primaire pour M est appelé un système de paramètres de A. Si V est primaire pour M, il existe un idéal V' contenu dans V, engendré par un système de paramètres et de même multiplicité que V (ceci permet de ramener la théorie des composantes excédentaires d'intersection à celle des composantes propres). Si A

est complet et équidimensionnel (les idéaux premiers de (O) ont tous même dimension), si L est un sous-corps de A tel que A/M soit fini sur L (cas d'égales caractéristiques) et si Q est engendré par le système de paramètres $(x_1,\ldots,x_d)$, A est un module régulier de type fini sur le sous-anneau $A' = L[[x_1\ldots x_d]]$ (isomorphe à un anneau de séries formelles) et on a (Chevalley) $[A:A'] = e(Q).[A/M:L]$.

Si M peut être engendré par un système de paramètres, l'anneau local A est dit <u>régulier</u> ; le complété $\bar{A}$ est alors un anneau local régulier.(Le fait que leur anneau des quotients relatif est régulier caractérise les sous-variétés simples d'une variété, algébrique ou algébroïde). Un anneau local régulier est un anneau d'intégrité ; il est équidimensionnel et de multiplicité A ; réciproquement tout anneau local de complétion équidimensionnelle et de multiplicité 1 est régulier. Si A est régulier, M est le seul idéal de multiplicité 1 de A .

4. <u>Quelques théorèmes fins</u>.

a) Si A est un "anneau à noyau" (anneaux locaux d'un type particulier qui comprend tous ceux rencontrés dans les applications géométriques), $\bar{A}$ sa complétion, P un idéal premier de A , $\bar{P}$ un idéal premier de $\bar{A}.P$ et Q un idéal primaire pour P , on a $P_{Q.A_P}(n) = P_{Q.\bar{A}_{\bar{P}}}(n)$; en particulier les multiplicités des idéaux engendrés par Q dans A_P et $\bar{A}_{\bar{P}}$ sont égales. (Théorème de transition de Chevalley, généralisé par le conférencier). Ce théorème permet le passage des variétés algébriques aux variétés algébroïdes.

b) Dans le cas d'égales caractéristiques tout anneau local complet A contient un corps K isomorphe à A/M par l'homomorphisme canonique de A sur A/M (I.S. Cohen : K est dit un "corps de Cohen" de A ; démonstration assez facile en caractéristique 0 par zornification sur les sous-corps de A et application d'une généralisation du lemme de Hensel ; grosses difficultés en caractéristique p).

c) Unique factorisation des éléments dans les anneaux locaux réguliers complets (Cohen).

d) Si A est régulier et si $I = (a_1,\ldots,a_s)$ est tel que A/I soit de dimension $d-s$, A/I est équidimensionnel (Macaulay-Cohen).

e) Si A est complet, et si (I_n) est une suite descendante d'idéaux telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = (0)$, on a $I_n \subset M^{f(n)}$, où $f(n) \to \infty$ avec n . (C.C.)

5. Rapide coup d'oeil sur le reste de la théorie.

Bien des propriétés des anneaux locaux sont vraies pour les anneaux semi-locaux ; étude de ces derniers (Chevalley).

Etude des anneaux à noyau et des anneaux locaux géométriques ; application aux multiplicités d'intersection (Chevalley, Samuel).

Produits tensoriels d'anneaux locaux complets (utiles pour l'étude des variétés produits) (Chevalley).

Relations entre la longueur et la multiplicité d'un idéal Q primaire pour M (Samuel).

Relations entre anneaux locaux et valuations (pour les fonctions holomorphes abstraites de Zariski).

Propriétés de fermetures intégrales et de conducteurs (pour le théorème fondamental de Zariski sur les correspondances birationnelles).

Analogues du théorème de Cohen (4.b) dans les cas d'inégales caractéristiques (Cohen).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - On the theory of local rings, Annals of Math., t. 44, 1943, p.690-708 ; Intersections on algebraic and algebroid varieties, Trans. Amer. math. Soc., t. 57, p. 1-85.

[2] COHEN (I.S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

[3] KRULL (Wolfgang). - Dimensionstheorie in Stellenringen, J. für reine und angew. Math., t. 179, 1938, p. 204-226.

[4] SAMUEL (Pierre). - La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique, J. Math. pures et appl., t. 30, 1951, p. 159-205 et p. 207-274 (Thèse Sc. math. Paris. 1949).

[5] ZARISKI (Oscar). - Generalized semi-local rings, Summa Brasil. Math., t. 1, 1945, p. 169-195.

ADDITIF

La théorie des anneaux locaux a fait d'importants progrès depuis 1949, dûs surtout à A. GEDDES, C. LECH, M. NAGATA, M. NARITA, D.G. NORTHCOTT, D. REES et J.-P. SERRE. Citons en particulier :

- les généralisations du théorème de Macaulay-Cohen (NAGATA, NORTHCOTT, REES, SERRE) ;
- celles de la formule d'associativité (NAGATA, LECH, SERRE) ;
- l'étude des anneaux henséliens (NAGATA) ;
- la simplification du théorème de Cohen sur l'existence de corps de représentants (GEDDES, NARITA).

D'intéressants et caractéristiques mémoires sur ces questions peuvent être trouvés dans les :

Proceedings of the International Symposium on algebraic number theory, Tokyo and Nikko, September 1955. - Tokyo, Scientific Council of Japan, 1956.

[Avril 1957]