Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

J. C. Taylor

Le compactifié de Martin d'un domaine Lipschitzien borné dans R^n

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. n° 27, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A7_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 27, 3 p.

27 avril 1972

LE COMPACTIFIÉ DE MARTIN D'UN DOMAINE LIPSCHITZIEN BORNÉ DANS R^n

par J. C. TAYLOR

Introduction. - Dans [3], R. A. HUNT et R. L. WHEEDEN ont démontré le résultat suivant.

THÉORÈME. - Soit $D \subset R^n$ un domaine lipschitzien borné. On démontre que

1° la fermeture $\bar{D}$ coïncide avec le compactifié de Martin du domaine D ,

2° chaque point de la frontière de Martin est minimal.

Ici nous exposons une démonstration de ce théorème qui diffère par quelques détails de celle de [3].

1. Le compactifié de Martin.

Soient $D \subset R^n$ un domaine borné, et $G(W , Z)$ la fonction de Green du domaine D , défini pour le faisceau harmonique classique (c'est-à-dire correspondant à l'opérateur de Laplace).

Soit $W_0 \in D$ et soit

$$K(W , Z) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z = W = W_0 \\ (G(W , Z))/(G(W_0 , Z)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $K_W^*(Z) = K_Z(W) = K(W , Z)$.

DÉFINITION 1.1. - Le compactifié de Martin du domaine D est le compactifié $\tilde{D}$ tel que

1° toutes les fonctions K_W , $W \in D$, se prolongent continûment à $\tilde{D} \setminus \{W , W_0\}$,

2° leurs prolongements séparent les points de $\tilde{D} \setminus D$.

PROPOSITION 1.2. - Il existe une application continue unique $j : \tilde{D} \to \bar{D}$ telle que $j(x) = x$, $\forall x \in D$, si et seulement si, chaque suite $(y_n) \subset D$ convergente dans $\tilde{D}$ converge dans $\bar{D}$.

2. Le lemme de Carleson ([2], p. 398).

THÉORÈME 2.1. [CARLESON]. - Soient D un domaine lipschitzien borné dans R^n , et $W_0 \in D$.

Soient $\overline{Z} \in \partial D$ et U un voisinage de $\overline{Z}$ dans R^n.

Il existe alors

1° des voisinages relativement compacts de $\overline{Z}$ (dans R^n), U_i, tels que

$$U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U_2 \subset \overline{U}_2 \subset U_3 \subset \overline{U}_3 \subset U$$

2° une constante $L_1 = L_1(U_1, U_2, U_3)$ telles que

$$u(W) \leqslant L_1 u(W_0), \quad \forall W \in D \setminus \overline{U}_2$$

pour toute fonction u qui

(a) est surharmonique sur D et harmonique dans $D/\overline{U}_1$;

(b) s'annule continûment sur $\partial D \setminus \overline{U}_1$.

COROLLAIRE 2.2. - Il existe une application continue unique surjective

$$j : \widetilde{D} \to \overline{D}$$

avec $j(x) = x$, $\forall x \in D$.

DÉFINITION 2.3. - Une fonction $h \geqslant 0$ et harmonique est dite <u>une fonction de Bouligand associée à</u> $\overline{Z} \in \partial D$ si $h \neq 0$, et si h s'annule continûment sur $\partial D \setminus \{\overline{Z}\}$.

COROLLAIRE 2.4. - Pour chaque $\overline{Z} \in \partial D$, il existe au moins une fonction de Bouligand associée.

COROLLAIRE 2.5. - Soient $A_1, A_2 \subset \partial D$ deux compacts disjoints. On a alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un voisinage $\mathcal{O}$ de A_2 tel que

$$h(W) \leqslant \varepsilon h(W_0), \quad W \in \mathcal{O} \cap D$$

pour toute fonction de Bouligand h associée à $\overline{Z} \in A_1$.

COROLLAIRE 2.6. - Soient $\overline{Z} \in D$, et h une fonction de Bouligand associée à $\overline{Z}$. On a alors

$$h(W) = \int K(W, \widetilde{Z})\, \mu(d\widetilde{Z}), \quad \mu \in \mathcal{M}^+(\widetilde{D} \setminus D)$$

qui implique que μ est portée par $j^{-1}\{\overline{Z}\}$. Par conséquent, à tout $\overline{Z} \in \partial D$, il existe une fonction de Bouligand minimale associée

$$K(W, \widetilde{Z}) = \lim_{Z_n \to \widetilde{Z}} K(W, Z_n), \quad (Z_n) \subset D.$$

3. Le lemme de Hunt et Wheeden ([3] lemme 3.2).

PROPOSITION 3.1. - Soient D un domaine lipschitzien borné dans R^n, et $\bar{Z} \in \partial D$. Il existe alors une constante L_2 telle que, pour tout couple (h , k) de fonctions de Bouligand associées à $\bar{Z}$, on ait

$$h \leq L_2 k .$$

Remarque. - Il suffit de démontrer ce résultat pour les domaines "starlike" parce que, pour tout voisinage U de $\bar{Z}$ et toute fonction de Bouligand h associée à $\bar{Z}$, $\hat{R}_{\complement U} h$ est un potentiel.

COROLLAIRE 3.2. - La fonction j du corollaire 2.2 est un homéomorphisme. Autrement dit, $\tilde{D} = \bar{D}$. Par conséquent, tous les points frontière sont minimaux.

4. Remarque.

Le lemme de Carleson donne une espèce d'inégalité de Harnack "jusqu'à la frontière". BRELOT ([1], p. 217) a donné une autre condition frontière qui implique le théorème 2.1.

PROPOSITION 4.1. - Soit D un domaine borné régulier avec la propriété suivante :

$\forall Z \in \partial D$, il existe une boule B (fermée) telle que l'inverse par rapport à ∂B de $D \cap B$ est contenu dans D.

On voit alors que le théorème 2.1 est valable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (M.). - Etude générale des fonctions harmoniques et surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier, Annales Univ. Grenoble, Nouvelle Série, t. 22, 1946, p. 205-219.

[2] CARLESON (L.). - On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables, Ark. for Mat., t. 4, 1962, p. 393-399.

[3] HUNT (R. A.) and WHEEDEN (R. H.). - Positive harmonic functions on Lipschitz domains, Trans. Amer. math. Soc., t. 147, 1970, p. 507-527.

[4] MARTIN (R. S.). - Minimal positive harmonic functions, Trans. Amer. math. Soc., t. 49, 1941, p. 137-172.

(Texte reçu le 4 mai 1973)

J. C. TAYLOR
Department of Mathematics
McGill University
MONTREAL (Canada)