Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

THOMAS BARTH

Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. nº 26, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A6_0>

Séminaire BRELOT
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 26, 9 p.
20 avril et 5 mai 1972

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES AU MOYEN DES RÉDUITES

par Thomas BARTH

(d'après G. MOKOBODZKI [5])

Le point de départ de ce travail est la recherche d'une méthode assez directe, permettant d'obtenir la représentation intégrale, sur le cône convexe, des fonctions surharmoniques positives, dans le cadre de la théorie de BAUER.

Pour la théorie de BRELOT, ce problème a été résolu par Mme HERVÉ, puis par G. MOKOBODZKI à l'aide de la topologie de la convergence en graphe et des réduites. Il s'agit ici d'une adaptation de cette méthode à la théorie de BAUER, suivant les indications de G. MOKOBODZKI.

La difficulté principale de cette entreprise résulte du fait qu'il n'y a pas, dans le cône convexe des fonctions surharmoniques positives, de base compacte pour la topologie de la convergence en graphe. Il se trouve qu'on peut définir cette topologie, qui repose uniquement sur les propriétés des fonctions semicontinues inférieurement, au moyen des réduites, et on obtient ainsi un cône métrisable et faiblement complet. On peut donc appliquer les résultats de G. CHOQUET sur la représentation intégrale dans de tels cônes convexes.

1. La topologie de la convergence en graphe sur $\mathcal{H}_+^*$.

Etant donné un espace harmonique $(X , \mathcal{H})$, où X est localement compact et à base dénombrable, et $\mathcal{H}$ un faisceau de fonctions numériques sur X , satisfaisant aux axiomes de BAUER [1], on désigne par $\mathcal{H}_+^*$ (resp. $\mathcal{S}_+$) le cône convexe des fonctions hyperharmoniques (resp. surharmoniques) positives sur X .

Le cône convexe $C_i(X) = C_i$ des fonctions numériques s. c. i. sur X , à valeurs dans $\overline{\underset{\sim}{R}}_+$, sera muni de la topologie de la convergence en graphe $\mathcal{G}$, introduite par MOKOBODZKI [5]. C_i est compact pour cette topologie, et on a une base de $\mathcal{G}$ formée par les ensembles

$$O_{\varphi,s} = \{v \in C_i \ ; \ v > \varphi \ \text{ sur } \ X \ ;$$
$$\inf \{v(y) \ ; \ y \in U_i\} < t_i \ , \ \forall \ (U_i \ , t_i) \in s\} \ ,$$

où φ est une fonction continue $\varphi : X \to R$, s une suite d'ouverts, $U_i \subset X$

et $t_i > 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

$\mathfrak{S}$ admet une base dénombrable, puisque X l'admet, et on a la proposition suivante [5] :

PROPOSITION 1.1. - <u>Soit</u> $\mathcal{B}$ <u>une base d'un filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>convergent sur</u> C_i . <u>Alors</u>

$$u = \lim_{\mathfrak{F}} = \sup_{M\in\mathcal{B}}(\widehat{\inf_{v\in M} v}) .$$

<u>Définition</u> 1.2. - Pour un filtre $\mathfrak{F}$ quelconque sur C_i , on posera

$$\lim \widehat{\inf}_{\mathfrak{F}} = \sup_{M\in\mathfrak{F}}(\widehat{\inf_{v\in M} v}) .$$

$\mathcal{H}_+^*$ et $\mathfrak{S}_+$ seront toujours munis de la topologie introduite par $\mathfrak{S}$, sauf mention expresse du contraire. Pour une suite dans $\mathcal{H}_+^*$, la proposition 1.1 donne le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.3. - <u>Soit</u> $(v_n) \subset \mathcal{H}_+^*$ <u>une suite convergente vers</u> $v \in C_i$. <u>Alors on</u> a $v \in \mathcal{H}_+^*$, <u>et</u>

$$v = \lim_{u\to\infty} \widehat{\inf v_n} = \widehat{\lim_{u\to\infty} \inf v_n} .$$

<u>Démonstration</u>. - Les fonctions $u_n = \inf_{k\geqslant n} v_k$ forment une suite croissante de fonctions presque hyperharmoniques. On a alors $\widehat{\sup u_n} = \sup \widehat{u_n}$, et c'est une fonction hyperharmonique ([1], 2.1).

PROPOSITION 1.4. - $\mathcal{H}_+^*$ <u>est compact dans</u> C_i .

<u>Démonstration</u>. - Pour $u \in \overline{\mathcal{H}_+^*}$, il existe un filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathcal{H}_+^*$ convergent vers u dans C_i . Donc

$$u = \lim_{\mathfrak{F}} = \lim \widehat{\inf_{\mathfrak{F}} v} .$$

Pour tout $M \in \mathfrak{F}$, la fonction $v_M = \inf \{v \in M\}$ est presque hyperharmonique, donc $\hat{v}_M \in \mathcal{H}_+^*$ et de même $u = \sup_{M\in\mathfrak{F}} v_M \in \mathcal{H}_+^*$, puisque la famille $(v_M)_{M\in\mathfrak{F}}$ est filtrante croissante ([1], 1.1.2). $\mathcal{H}_+^*$ est fermé, donc compact dans C_i .

PROPOSITION 1.5. - $\mathfrak{S}_+$ <u>est un</u> G_δ <u>dans</u> $\mathcal{H}_+^*$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $u \in \mathcal{H}_+^* \setminus \mathfrak{S}_+$. Alors il existe un ouvert V_n de la base dénombrable (V_n) de X tel que $u = +\infty$ sur V_n . L'ensemble

$$T_{V_n} = \{v \in \mathcal{H}_+^* \ ; \ v = +\infty \ \text{ sur } \ V_n\}$$

est fermé dans $\mathcal{H}_+^*$, car, pour $w \in \overline{T}_{V_n}$, il existe un filtre $\mathfrak{F}$ sur T_{V_n} avec

$$w = \sup_{M\in\mathfrak{F}}(\widehat{\inf_{v\in M} v}) .$$

$M \subset T_{V_n}$ entraîne $v_M = \widehat{\inf_{v \in M} v} = +\infty$ sur V_n , donc $u \in T_{V_n}$. On a alors

$$\mathcal{H}_+^* \setminus \mathcal{S}_+ = \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} T_{V_n}$$

et c'est un F_σ dans $\mathcal{H}_+^*$.

2. Réduites sur des fonctions continues bornées positives.

Définition 2.1. - Soit $\varphi : X \to \underset{\sim}{R}_+$ une fonction continue bornée sur X . Pour $v \in \mathcal{H}_+^*$, on appellera réduite de v sur φ la fonction définie en chaque point $x \in X$ par

$$R_v^\varphi(x) = \frac{1}{\sup \varphi} \int_0^{\sup \varphi} R_v^{(\varphi > \alpha)}(x)\, d\alpha ,$$

où $(\varphi > \alpha)$ désigne l'ouvert $U_\alpha = \{x \in X \ ; \ \varphi(x) > \alpha\}$, et $d\alpha$ la mesure de Lebesgue.

Remarques 2.2.

1° Pour tout $x \in X$, la fonction $\alpha \to R_v^{(\varphi > \alpha)}(x)$ est décroissante, positive et à support compact contenu dans $[0 , \sup \varphi]$, donc mesurable au sens de Riemann.

2° $R_v^\varphi(x)$ est la moyenne sur la famille d'ouverts $(\varphi > \alpha)$ des réduites $R_v^u(x)$.

3° $0 \leq R_v^\varphi \leq v$ pour tout $v \in \mathcal{H}_+^*$.

THÉORÈME 2.3. - Pour tout $v \in \mathcal{H}_+^*$ et $\varphi : X \to \underset{\sim}{R}_+$ continue bornée, on a

$$R_v^\varphi \in \mathcal{H}_+^* .$$

Démonstration. - Soit $\mathcal{C} = (\alpha_0 < \dots < \alpha_n)$ une subdivision de l'intervalle $[0 , \sup \varphi]$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_n = \sup \varphi$, et posons

$$R_v^{\varphi,\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})\, R_v^{(\varphi > \alpha_i)}$$

Alors $R_v^\varphi = \sup_{\mathcal{C}} R_v^{\varphi,\mathcal{C}}$ et $R_v^{\varphi,\mathcal{C}} \in \mathcal{H}_+^*$. $(R_v^{\varphi,\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ est une famille filtrante croissante, donc $R_v^\varphi \in \mathcal{H}_+^*$.

COROLLAIRE 2.4. - Pour $v \in \mathcal{S}_+$, on a $R_v^\varphi \in \mathcal{S}_+$, et R_v^φ est harmonique en dehors du support $s\varphi$ de φ .

Démonstration. - $R_v^\varphi \leq v$, donc $R_v^\varphi \in \mathcal{S}_+$.

La fonction $R_v^{(\varphi > \alpha)}$ est harmonique dans $\complement\overline{(\varphi > \alpha)}$, donc pour toute subdivision $\mathcal{C}$, $R_v^{\varphi,\mathcal{C}}$ est harmonique dans l'ouvert $\complement s\varphi$. La famille $(R_v^{\varphi,\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ est filtrante croissante, et on a $R_v^\varphi = \sup R_v^{\varphi,\mathcal{C}} \leq R_v^{s\varphi}$. La réduite $R_v^{s\varphi}$ est harmonique et finie sur $\complement s\varphi$, donc de même R_v^φ ([1], 1.1.6 et 2.3.5).

Remarque 2.5. – Les propriétés des réduites donnent, pour u , $v \in \mathcal{H}_+^*$ et $t \geq 0$,

(1) $R_{tv}^{\varphi} = tR_v^{\varphi}$

(2) $u \leq v \Rightarrow R_u^{\varphi} \leq R_v^{\varphi}$,

Si, en plus, φ est à support compact $S\varphi$, alors $\overset{\circ}{S\varphi}$ est un espace strictement harmonique, et les résultats de [1], 3.2, s'appliquent :

(3) $R_{u+v}^{\varphi} = R_u^{\varphi} + R_v^{\varphi}$

(4) $\sup R_{v_n}^{\varphi} = R_{\sup v_n}^{\varphi}$,

pour une suite croissante $(v_n) \subset \mathcal{H}_+^*$. Pour tout $x \in X$, l'application $v \to R_v^{\varphi}(X)$ définit alors une forme affine croissante sur le cône $\mathcal{H}_+^*$.

Définition 2.6. – Nous appellerons couple (φ , x) les couples où $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ est continue à support compact $S\varphi$, et $x \in \complement S\varphi$.

PROPOSITION 2.7. – Pour tout couple (φ , x) , il existe une mesure positive μ sur X telle que, pour tout $v \in \mathcal{H}_+^*$,

$$\int v \, d\mu = R_v^{\varphi}(x) .$$

Démonstration. – Il existe un ouvert relativement compact $U \subset X$ tel que $S\varphi \subset U$. Sur le compact $S\varphi$, considérons l'espace vectoriel H des différences $v_1 - v_2$, où v_1 , v_2 sont les restrictions à $S\varphi$ de fonctions réelles continues surharmoniques ≥ 0 sur U . Comme il y a dans H une fonction $u > \alpha > 0$ ([1], 2.5.5 et 2.5.10), tout élément de $\mathcal{C}(S\varphi)$ est majoré par un élément de H . L'application

$$\ell : (v_1 - v_2) \to R_{v_1}^{\varphi}(x) - R_{v_2}^{\varphi}(x)$$

définit une forme linéaire croissante sur H , car $R_v^{\varphi}(x) < +\infty$ pour $v \in \mathcal{S}_+$, et il résulte du théorème de Hahn-Banach, qu'il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur $S\varphi$ qui prolonge ℓ . Pour $v \in \mathcal{H}_+^*$, il existe une suite croissante (v_n) de fonctions réelles continues surharmoniques ≥ 0 sur U telle que $v = \sup (v_n)$ sur U ([1], 2.5.8). On a donc $(v_n)|_{S\varphi} \subset H$ et

$$\mu(v) = \sup \mu(v_n) = \sup R_{v_n}^{\varphi}(x) = R_v^{\varphi}(x) .$$

3. Les réduites R_v^{φ} et la convergence en graphe sur $\mathcal{S}_+$.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que la topologie de la convergence en graphe est la moins fine sur $\mathcal{S}_+$ rendant continues les formes affines $v \to R_v^{\varphi}(x)$ pour les couples (φ , x) . Nous avons besoin de quelques préliminaires.

LEMME 3.1. – Soient u une fonction presque hyperharmonique sur X , et $A \subset X$

un ensemble négligeable pour les mesures harmoniques μ_x^V , où V est régulier, $x \in V$. Alors

$$\liminf_{y \to x} u(y) = \liminf_{y \to x, y \notin A} u(y) , \qquad \forall x \in X .$$

Démonstration. - Posons

$$u_A(x) = \begin{cases} + \infty ; & x \in A \\ u(x) ; & x \in \complement A , \end{cases}$$

alors u_A est presque hyperharmonique, et on a

$$\hat{u}_A(x) = \liminf_{y \to x} u_A(y) = \liminf_{y \to x, y \notin A} u_A(y) .$$

D'après [1], 2.1.5, on a $\hat{u}_A = \hat{u}$, ce qui donne l'énoncé.

LEMME 3.2. - Soit (v_n) une suite dans $\mathcal{S}_+$ convergente vers $v \in \mathcal{S}_+$ pour $\mathcal{S}$. Alors il existe une sous-suite $(v'_n) \subset (v_n)$ et une suite partout dense (x_p) de X , telle qu'on ait pour tout $p \in \underset{\sim}{N}$

$$\sup_{n \in \underset{\sim}{N}} v'_n(x_p) < + \infty .$$

Démonstration. - L'ensemble $A = \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} v^{-1}(+\infty)$ est négligeable pour les mesures harmoniques, donc $\complement A$ est partout dense dans X ([1], 2.1.6).

Soit $x \in X$ avec $v(x) < + \infty$. Alors (1.3) et (3.1) impliquent

$$v(x) = \widehat{\liminf_{n \to \infty} v_n(x)}$$

$$= \liminf_{y \to x, y \notin A} (\liminf_{n \to \infty} v_n(y)) < M < + \infty .$$

Cela signifie que, pour tout voisinage U de X , il y a un point $y \in U \cap \complement A$, tel que $\liminf_{n \to \infty} v_n(y) < M$. Par conséquent, il existe une sous-suite $(v'_n) \subset (v_n)$ avec $v'_n(y) < M$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$.

Nous allons utiliser la base dénombrable d'ouverts (U_p) de X pour construire la suite (x_p) . Pour U_1 , il existe $x \in U_1$ avec $v(x) < + \infty$, donc $x_1 \in U_1 \cap \complement A$, et une sous-suite $\sigma_1 \subset \underset{\sim}{N}$ d'indices de façon que

$$\sup_{k \in \sigma_1} v_k(x_1) < + \infty .$$

De même, pour $p \geqslant 1$, il y a $x_p \in U_p \cap \complement A$ et $\sigma_p \subset \underset{\sim}{N}$ telles que

$$\sup_{k \in \sigma_p} v_k(x_p) < + \infty ,$$

et on peut choisir σ_p de façon que $\sigma_p \subset \sigma_{p-1}$.

Par un procédé diagonal, on obtient une suite $\sigma \subset \underset{\sim}{N}$ pour laquelle $\sigma \setminus \sigma_p$ est fini quelque soit $p \in \underset{\sim}{N}$: pour tout $p \in \underset{\sim}{N}$, on choisit un nombre fini d'indices de $\sigma_p \setminus \sigma_{p+1}$.

La suite (x_p) est partout dense dans X et contenue dans $\complement A$. On a donc

$$\sup_{n\in\sigma} v_n(x_p) < +\infty , \qquad \forall\, p \in \underset{\sim}{N} .$$

PROPOSITION 3.3. - <u>Soient</u> (v_n) <u>une suite dans</u> $\mathcal{S}_+$, <u>convergente vers</u> $v \in \mathcal{S}_+$, <u>et</u> $U \subset X$ <u>un ouvert. Alors il existe une sous-suite</u> $(v'_n) \subset (v_n)$ <u>et un ensemble équicontinu, simplement borné, de fonctions harmoniques positives</u> $H \subset \mathcal{H}_U$ <u>tels que, pour tout</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, <u>la restriction de</u> $R^{\complement U}_{v'_n}$ <u>à</u> U <u>appartienne à</u> H.

<u>Démonstration</u>. - Pour la sous-suite $(v'_n) \subset (v_n)$ et la suite (x_p) du lemme (3.2), il existe des nombres $\alpha_p > 0$, par exemple $\alpha_p = [2^p \sup_{n\in \underset{\sim}{N}} v'_n(x_p)]^{-1}$, tels que

$$\sum_{p\in \underset{\sim}{N}} \alpha_p\, v'_n(x_p) \leqslant 1 ,$$

pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$. Alors $\mu = \sum \alpha_p\, \varepsilon_{x_p}$ est une mesure positive sur X, à support $T_\mu = X$, et $\mu(v'_n) \leqslant 1$, donc $\mu(R^{\complement U}_{v'_n}) \leqslant 1$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$. La restriction μ_U de μ à U a comme support l'ensemble $T_{\mu_U} = U$, et l'ensemble

$$H = \{h \in \mathcal{H}_U \;;\; h \geqslant 0 ,\; \mu_U(h) \leqslant 1\}$$

est équicontinu sur U ([1], 4.6.3)

PROPOSITION 3.4. - <u>Soit</u> (v_n) <u>une suite dans</u> $\mathcal{S}_+$, <u>convergeant vers</u> $v \in \mathcal{S}_+$ <u>et soit</u> $U \subset X$ <u>un ouvert relativement compact. Pour tout ouvert</u> $V \subset \overline{V} \subset U$, <u>on a, sur</u> V,

$$R^{\complement U}_{v} \leqslant \liminf R^{\complement U}_{v_n} \leqslant \limsup R^{\complement U}_{v_n} \leqslant R^{\complement V}_{v} .$$

<u>Démonstration</u>. - Le même raisonnement que celui utilisé pour la proposition 2.7 permet de dire que, pour tout $x \in U$, il existe une mesure μ sur X, portée par $\overline{U}$, telle que

$$R^{\complement U}_{w}(x) = \int w \, d\mu \quad \text{pour tout} \quad w \in \mathcal{S}_+ .$$

D'après [5], l'application $w \longmapsto \int w\, d\mu$ est s. c. i. sur $\mathcal{S}_+$ muni de $\mathcal{S}$, par conséquent,

$$R^{\complement U}_{v}(x) \leqslant \liminf R^{\complement U}_{v_n}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in U .$$

D'autre part, pour toute sous-suite infinie $(v'_n) \subset (v_n)$, il existe une sous-suite $(v''_n) \subset (v'_n)$ telle que la famille $(R^{\complement U}_{v''_n})$ forme un ensemble équicontinu de fonctions harmoniques sur U, on peut même exiger que la suite de terme général $w_n = R^{\complement U}_{v''_n}$ converge pour $\mathcal{S}$, et uniformément sur tout compact de $\complement U$.

Soit $w = \lim w_n$; $w \in \mathcal{S}_+$, $w \leqslant v$, et w est harmonique dans U, par conséquent $w \leqslant R_v^{\complement V}$. La sous-suite (v'_n) étant arbitraire, on a bien

$$\limsup R_{v_n}^{\complement U} \leqslant R_v^{\complement V} \quad \text{sur } V .$$

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le théorème annoncé au début du paragraphe, dont la démonstration se fera en deux parties. Pour la première, la continuité des formes affines $v \to R_v^{\varphi}(x)$ pour la convergence en graphe, on se sert de l'existence d'une base dénombrable de $\mathcal{S}$.

THÉORÈME 3.5. - <u>Pour tout couple</u> (φ , x), <u>la forme affine</u> $v \to R_v^{\varphi}(x)$ <u>est continue sur</u> $\mathcal{S}_+$ <u>muni de la topologie de la convergence en graphe</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de montrer que, pour toute suite (v_n) dans $\mathcal{S}_+$ qui converge vers $v \in \mathcal{S}_+$, on ait

$$R_v^{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} R_{v_n}^{\varphi}(x) .$$

On a $\lim R_{v_n}^{\varphi}(x) < +\infty$.

Pour $\alpha , \beta \in]0 , \sup \varphi[$, $\alpha < \beta$, la proposition (3.4) donne

$$R_v^{(\varphi>\alpha)}(x) \geqslant \limsup R_{v_n}^{(\varphi>\beta)}(x) \geqslant \liminf R_{v_n}^{(\varphi>\beta)} \geqslant R_v^{(\varphi>\beta)}(x) .$$

Pour $u \in \mathcal{S}_+$, soit θ_u l'application $\alpha \to \theta_u(\alpha) = R_u^{(\varphi>\alpha)}(x)$, définie sur $[0 , \sup \varphi]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que pour $n \geqslant n_0$, $\theta_{v_n} \leqslant M$.

Par ailleurs, les fonctions θ_{v_n}, θ_v sont décroissantes, et on a, pour $\alpha < \beta$, $\alpha , \beta \in]0 , \sup \varphi[$,

$$\theta_v(\alpha) \geqslant \limsup \theta_{v_n}(\beta) \geqslant \liminf \theta_{v_n}(\beta) \geqslant \theta_v(\beta) .$$

Ces conditions entraînent que hors d'un ensemble dénombrable $N \subset]0 , \sup \varphi[$, où θ_v est discontinue, (θ_{v_n}) converge simplement vers θ_v, ce qui entraîne la convergence des intégrales

$$\int_0^{\sup \varphi} \theta_v(\alpha)\, d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\sup \varphi} \theta_{v_n}(\alpha)\, d\alpha .$$

Pour la deuxième partie, nous considérons la structure uniforme $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{S}_+$ la moins fine rendant uniformément continues les fonctions $v \to R_v^{\varphi}(x)$, où (φ , x) est un couple, et la topologie $\mathcal{T}$ déduite de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{S}_+$. Alors $\mathcal{T}$ est la moins fine des topologies sur $\mathcal{S}_+$ rendant continues les fonctions $v \to R_v^{\varphi}(x)$. $\mathcal{T}$ est séparée, et le théorème (3.6) signifie que, sur $\mathcal{S}_+$, $\mathcal{S}$ est plus fine que $\mathcal{T}$.

Nous allons prouver l'égalité de ces topologies sur $\mathcal{S}_+$.

THÉORÈME 3.6. - <u>Soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>un filtre de Cauchy sur</u> $\mathcal{S}_+$ <u>muni de la structure uniforme</u> $\mathcal{U}$. <u>Alors</u> $\mathfrak{F}$ <u>converge pour</u> $\mathcal{S}$ <u>vers</u> $v \in \mathcal{S}_+$.

Démonstration. - Dans le compact $\mathcal{H}_+^*$, le filtre $\mathfrak{F}$ admet un point adhérent $v \in \mathcal{H}_+^*$ pour $\mathcal{S}$.

Pour démontrer que $v \in \mathcal{S}_+$, on considère un ouvert U de X et un couple (φ,x) tel que $S\varphi \subset U$. D'après (2.7), il existe une mesure $\mu \geqslant 0$ sur X telle que, sur $\mathcal{H}_+^*$, $\mu(v) = R_v^{\varphi}(x)$. μ est s. c. i. sur $\mathcal{H}_+^*$ muni de $\mathcal{S}$ [5]. On a donc

$$\mu(v) = \liminf_{u \to v, \mathcal{S}} \mu(u) \leqslant \lim \inf_{\mathfrak{F}} \mu \; .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un $F \in \mathfrak{F}$ avec

$$|\mu(u) - \mu(v)| < \varepsilon \; , \qquad \forall\, u \, , v \in F \; ,$$

puisque $\mathfrak{F}$ est de Cauchy. D'après (2.4), μ est fini sur $\mathcal{S}_+$, donc

$$\mu(v) \leqslant \lim \inf_{F \cap \mathfrak{F}} \mu < +\infty \; .$$

Alors $v = +\infty$ sur U est impossible, puisque $S\mu \subset U$, donc $v \in \mathcal{S}_+$.

Ainsi, $\mathfrak{F}$ possède une valeur d'adhérence pour $\mathcal{T}$, puisque $\mathcal{S}$ est plus fine que $\mathcal{T}$. Puisque $\mathfrak{F}$ est de Cauchy, on a $v = \lim_{\mathfrak{F}}$ pour $\mathcal{T}$. Puisque $\mathcal{T}$ est séparée, il ne peut y avoir qu'un seul point adhérent à $\mathfrak{F}$ dans $\mathcal{S}_+$, et de même pour $\mathcal{S}$. donc on a

$$v = \lim_{\mathfrak{F}} \text{ pour } \mathcal{S} \; .$$

COROLLAIRE 3.7. - $\mathcal{S}_+$ est complet pour $\mathfrak{U}$.

COROLLAIRE 3.8. - $\mathcal{T} = \mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}_+$.

COROLLAIRE 3.9. - $\mathcal{S}_+$ est métrisable.

4. Représentation intégrale sur $\mathcal{S}_+$.

Soit $[\mathcal{S}_+]$ l'espace vectoriel canoniquement engendré par le cône convexe $\mathcal{S}_+$, c'est-à-dire $[\mathcal{S}_+] = \mathcal{S}_+ - \mathcal{S}_+$. Pour tout couple $(\varphi \, , \, x)$, la forme affine

$$v \longrightarrow R_v^{\varphi}(x)$$

admet un prolongement unique en une forme linéaire $L_{(\varphi,x)}$ sur $[\mathcal{S}_+]$, puisqu'elle est finie sur $\mathcal{S}_+$ (2.4).

Si on muni $[\mathcal{S}_+]$ de la topologie faible par rapport à l'espace vectoriel engendré dans $[\mathcal{S}_+]^*$ par les formes $L_{(\varphi,x)}$, où $(\varphi \, , \, x)$ est un couple, alors cette topologie coïncide sur $\mathcal{S}_+$ avec la topologie de la convergence en graphe.

Autrement dit, dans $[\mathcal{S}_+]$, $\mathcal{S}_+$ est un cône convexe saillant faiblement complet et métrisable. Par conséquence, $\mathcal{S}_+$ est bien coiffé, et ses chapeaux sont métrisables. Le théorème de représentation intégrale de Choquet [2] s'applique.

THÉORÈME 4.1. - <u>Tout point</u> $v \in \mathbb{S}_+$ <u>est résultante d'une mesure maximale</u> $\mu_v \geqslant 0$ <u>sur un chapeau de</u> $\mathbb{S}_+$, <u>portée par l'ensemble des génératrices extrémales</u> :

$$v = \int s \, d\mu_v(s) \ .$$

<u>Remarques</u> 4.2.

1° Ceci prouve que, pour toute forme linéaire continue L sur $[\mathbb{S}_+]$, on a sur $\mathbb{S}_+$

$$L(v) = \int L(s) \, d\mu_v(s) \ ,$$

en particulier, pour tout couple (φ , x) ,

$$R_v^\varphi(x) = \int R_s^\varphi(x) \, d\mu_v(s) \ .$$

2° Les fonctions appartenant aux génératrices extrémales sont, soit harmoniques, soit de potentiels à support harmonique $T_v = \{y\}$, $y \in X$ ([1], 5.3.7).

COROLLAIRE 4.3. - <u>Pour tout couple</u> (φ , x) <u>et toute mesure</u> $\nu \geqslant 0$ <u>sur</u> X , <u>on a</u>

$$\int_X R_v^\varphi(x) \, d\nu(x) = \int_{\mathbb{S}_+} \int_X R_s^\varphi \, d\nu \, d\mu_v \ .$$

Cela résulte du théorème de Fubini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 22).

[2] BONY (J.-M.). - Représentation intégrale sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 3e année, 1963/64, n° 5, 7 p.

[3] CONSTANTINESCU (C.). - A topology on the cone of non-negative superharmonic functions, Rev. roum. Math. pures et appl., t. 10, 1965, p. 1331-1348.

[4] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571.

[5] MOKOBODZKI (G.). - Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 1, p. 103-112.

(Texte reçu le 8 septembre 1973)

Thomas BARTH
Friedrich-Alexander Universität
Mathematik
4 Schlossplatz
D-8520 ERLANGEN (Allemagne fédérale)