Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

Gabriel Mokobodzki

Inégalités liées au principe du maximum

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 15 (1971-1972), exp. nº 22, p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1971-1972__15__A3_0>

Séminaire BRELOT
(Théorie du potentiel)
14e-15e années, 1970-1972, n° 22, 2 p.

9 mars 1972

INÉGALITÉS LIÉES AU PRINCIPE DU MAXIMUM

par Gabriel MOKOBODZKI

Résumé

Soit $(X , \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit $(V_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ une famille résolvante sous-markovienne de noyaux positifs et bornés sur $(X , \mathcal{B})$. Pour toute mesure excessive bornée $\sigma \geqslant 0$ sur $(X , \mathcal{B})$, et tout $\lambda > 0$, l'application

$$V_\lambda^* : f \longmapsto (f.\sigma).V_\lambda$$

définit un opérateur linéaire continu de $L^1(\sigma)$ dans lui-même, de norme $\leqslant \frac{1}{\lambda}$.

Soit alors K une partie convexe faiblement compacte de $L^1(\sigma)$ telle que l'on ait

$$\lambda V_\lambda^* K \subset K \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0$$

et

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda^* x = x \quad \text{pour tout} \quad x \in K .$$

Pour un tel ensemble, on peut définir, sur l'espace $A(K)$ des fonctions affines continues sur K, une famille résolvante sous-markovienne $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ d'opérateurs linéaires en posant, pour tout $g \in A(K)$, tout $x \in K$,

$$U_\lambda\, g(x) = \frac{1}{\lambda}\, g[\lambda V_\lambda^* x] .$$

Sur $A(K)$, la famille $(U_\lambda)_{\lambda > 0}$ vérifie un principe du maximum qu'on peut énoncer comme suit :

Pour tout $\lambda > 0$, tout $g \in A(K)$, tout $x \in K$ tel que $U_\lambda\, g(x) = \sup_K U_\lambda\, g$, on a $g(x) \geqslant 0$.

Plaçons-nous dans le cas où $V_\lambda(L^1(\sigma))$ est dense dans $L^1(\sigma)$, et prenons

$$K_1 = \{f \in L^1_+(\sigma) \mid 0 \leqslant f \leqslant 1\} ,$$
$$K_2 = \{f \in L^1_+(\sigma) \mid \int f^2\, d\sigma \leqslant 1\} .$$

Le principe du maximum énoncé ci-dessous donne alors, respectivement

$$\int_{\{V_\lambda g > 0\}} g\, d\sigma \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \geqslant 0 , \text{ toute} \quad g \in L^1(\sigma)$$

et

$$\int g.(V_\lambda\, g)^+\, d\sigma \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda > 0 , \quad g \in L^2(\sigma) ,$$

inégalité qui s'apparente à celle de l'énergie.

On obtiendrait d'autres inégalités du même type en prenant les boules unités (ou leurs parties positives) des espaces $L^p(\sigma)$ pour $1 < p \leqslant +\infty$.

Supposons maintenant que la tribu $\mathcal{B}$ soit la moins fine rendant mesurables les fonctions de la forme $V_\lambda f$, où f est une fonction numérique $\mathcal{B}$-mesurable bornée sur X.

On peut prendre pour mesure excessive σ toutes les mesures de la forme $\varepsilon_x V_0$, pour $x \in X$.

On obtiendrait aussi, pour f $\mathcal{B}$-mesurable bornée sur X,

$$\int f.V_\lambda f \, d(\varepsilon_x V) \geqslant 0 \text{ , pour tout } \lambda \geqslant 0 \text{ ,}$$

en utilisant l'exemple K_2 et, en faisant varier x dans X, on obtient l'inégalité fonctionnelle

$$V_\lambda[f.V_\lambda f] \geqslant 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \geqslant 0 \text{ .}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] HIRSCH (F.). - Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 22, 1972, fasc. 1, p. 89-210 (Thèse Sc. math. Orsay, 1971).

[2] MEYER (P. A.). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966, (Act. scient. et ind. 1318 ; Publ. Inst. Math. Strasbourg, 14).

(Texte reçu le 8 septembre 1973)

Gabriel MOKOBODZKI
12 rue de la Chaise
75007 PARIS