Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Gabriel Mokobodzki

Éléments extrémaux pour le balayage

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 13 (1969-1970), exp. nº 5, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1969-1970__13__A3_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du potentiel)
13e année, 1969/70, n° 5, 14 p.
18 décembre 1969

ÉLÉMENTS EXTRÉMAUX POUR LE BALAYAGE

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction. - La notion de mesure balayée d'une mesure sur un ensemble est une des notions clés de la théorie du potentiel. En m'inspirant de cette notion et d'un travail de CHOQUET et DENY [1] sur les cônes semi-réticulés inférieurement, j'avais utilisé la notion de mesure balayée d'une mesure par rapport à un cône de fonctions, notion définie dans un cadre où il n'y a pas de théorie du potentiel [3]. L'usage du terme de mesure balayée, qui désignait explicitement la parenté des deux notions, s'est révélé d'une valeur heuristique certaine, notamment pour faire ressortir des structures de théorie du potentiel dans certains cônes de fonctions, comme cela a pu être fait dans [4], [5] et [6].

La possibilité d'utiliser concurremment les deux notions de mesure balayée en théorie du potentiel était matière à confusion pour les potentialistes. Dans le présent travail, on établit, dans le cadre de la théorie du potentiel, une relation organique entre les deux notions de mesure balayée, justifiant ainsi après coup la terminologie introduite.

1. Etude algébrique du balayage.

Dans cette partie de l'étude, on se donne :

1° Un espace vectoriel ordonné E (sur $\underset{\sim}{R}$) réticulé. On désignera par E^+ le cône positif de E, et l'on désignera par $\mathfrak{M}$ l'espace vectoriel des formes linéaires relativement bornées sur E, par $\mathfrak{M}^+$ le cône positif de $\mathfrak{M}$. On notera les relations d'ordre définies par E^+ et $\mathfrak{M}^+$ à l'aide du signe $\leqslant$.

2° Un sous-cône convexe $C \subset E^+$, stable par enveloppe inférieure finie, satisfaisant à la condition suivante :

(P) Pour tous u, v_1, $v_2 \in C$ tels que $u \leqslant v_1 + v_2$, il existe u_1, $u_2 \in C$ tels que $u = u_1 + u_2$ et $u_1 \leqslant v_1$, $u_2 \leqslant v_2$.

Enfin, on supposera que $E = C - C$. Cette dernière condition permet de définir une nouvelle relation d'ordre sur $\mathfrak{M}$, que l'on notera à l'aide du signe $\prec$,

$$\text{si } \mu , \nu \in \mathfrak{M} , \qquad (\mu \prec \nu) \iff (\langle \mu , v \rangle \leqslant \langle \nu , v \rangle , \ \forall \ v \in C) .$$

On pourra lire provisoirement la relation $(\mu \prec \nu)$ " μ est C-majorée par ν ".

PROPOSITION 1. - Pour tous μ , ν_1 , $\nu_2 \in \mathcal{M}^+$ tels que $\mu \prec \nu_1 + \nu_2$, il existe μ_1 , $\mu_2 \in \mathcal{M}^+$ telles que $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \prec \nu_1$, $\mu_2 \prec \nu_2$.

Démonstration. - Pour toute $\sigma \in \mathcal{M}^+$, considérons la forme sous-linéaire p^σ sur E définie par

$$p^\sigma(f) = \inf\{\langle\sigma , v\rangle \mid v \in C , v \geqslant f\} .$$

Le cône convexe C étant stable par enveloppe inférieure finie, on a, pour tous σ_1 , $\sigma_2 \in \mathcal{M}^+$,

$$p^{\sigma_1} + p^{\sigma_2} = p^{\sigma_1+\sigma_2} .$$

Si T est une forme linéaire sur E telle que $T \leqslant p^\sigma$, alors $T \in \mathcal{M}^+$ et $T \prec \sigma$. D'autre part, si $\mu \in \mathcal{M}^+$ et $\mu \prec \sigma$, on a $\mu \prec p^\sigma$. Posons alors

$$A_\sigma = \{\mu \in \mathcal{M}^+ ; \mu \prec \sigma\} ,$$

on aura donc l'équivalence

$$(\mu \in A_\sigma) \iff (\mu \leqslant p^\sigma) .$$

La proposition 1 résulte alors du lemme suivant (cf. MEYER [2]) :

LEMME 2. - Soient p_1 , p_2 deux formes sous-linéaires sur E , T une forme linéaire sur E telle que $T \leqslant p_1 + p_2$ sur E . Il existe alors deux formes linéaires T_1 et T_2 sur E telles que $T = T_1 + T_2$ et $T_1 \leqslant p_1$, $T_2 \leqslant p_2$.

Autrement dit, pour σ_1 , $\sigma_2 \in \mathcal{M}^+$, on a l'équivalence

$$(p^{\sigma_1} + p^{\sigma_2} = p^{\sigma_1+\sigma_2}) \iff (A_{\sigma_1+\sigma_2} = A_{\sigma_1} + A_{\sigma_2}) .$$

On remarquera qu'on a seulement utilisé le fait que C est stable par enveloppe inférieure finie.

PROPOSITION 3. - Pour toute $\sigma \in \mathcal{M}$, il existe $R\sigma \in \mathcal{M}^+$ ayant les propriétés suivantes :

(1) $\sigma \prec R\sigma$;

(2) Pour toute $\nu \in \mathcal{M}^+$, $\nu \succ \sigma$, on a $R\sigma \prec \nu$;

(3) Pour tout $v \in C$, on a

$$\langle R\sigma , v\rangle = \sup\{\langle\sigma , w\rangle \mid w \in C ; w \leqslant v\} .$$

Démonstration. - Pour tout $v \in C$, posons $A_v = \{w \in C ; w \leqslant v\}$. La condition (P) est équivalente à la condition

$$(P') \qquad \begin{cases} A_v + A_u = A_{v+u} \,, \\ A_{\lambda v} = \lambda A_v \,, \end{cases} \qquad \text{pour tous } u \,, v \in C \text{ et } \lambda \geq 0 \,.$$

La fonction $R\sigma$, définie sur C par

$$\langle R\sigma \,, v\rangle = \sup\{\langle \sigma \,, w\rangle \;;\; w \in A_v\} \;,$$

est alors affine, positivement homogène sur C , et si $v \leq u$, on a

$$\langle R\sigma \,, v\rangle \leq \langle R\sigma \,, u\rangle \;.$$

On peut donc prolonger $R\sigma$ à $E = C - C$ en une forme linéaire positive sur E^+ . On a évidemment $\sigma \prec R\sigma$, et si $\nu \in \mathcal{M}^+$, $\sigma \prec \nu$, on a

$$\langle \sigma \,, w\rangle \leq \langle \nu \,, w\rangle \leq \langle \nu \,, v\rangle \,, \qquad \forall\, w \in A_v \;,$$

par suite $R\sigma \prec \nu$.

COROLLAIRE 4. - <u>Soient</u> μ , $\nu \in \mathcal{M}^+$; <u>on a toujours</u> $\mu \prec \nu + R(\mu - \nu)$, <u>et</u> $R(\mu - \nu) \leq \mu$.

<u>Il existe une seule décomposition de</u> μ , $\mu = \mu_1 + \mu_2$, <u>telle que</u> μ_1 , $\mu_2 \in \mathcal{M}^+$, $\mu_1 \prec \nu$, $\mu_2 \prec R(\mu - \nu)$; <u>cette décomposition est définie par</u> $\mu_2 = R(\mu - \nu)$.

<u>Démonstration</u>. - On a toujours $(\mu - \nu) \prec R(\mu - \nu)$, donc aussi

$$\mu \prec \nu + R(\mu - \nu) \;.$$

Soient μ_1 , $\mu_2 \in \mathcal{M}^+$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 \prec \nu$, $\mu_2 \prec R(\mu - \nu)$. On a

$$(\mu - \nu) \prec (\mu - \mu_1) \prec \mu_2 \prec R(\mu - \nu) \;.$$

Ces inégalités impliquent $\mu_2 \succ R(\mu - \nu)$, donc $\mu_2 = R(\mu - \nu)$.

<u>Remarque</u>. - Pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+$, l'ensemble A_μ est convexe borné et faiblement complet pour la topologie $\sigma(\mathcal{M} \,, E)$, par suite il est aussi compact pour $\sigma(\mathcal{M} \,, E)$, et contient donc des éléments extrémaux. La proposition qui suit permet de caractériser ces éléments extrémaux.

PROPOSITION 5. - <u>Soit</u> $\nu \in \mathcal{M}^+$. <u>Pour</u> $\mu \in A_\nu$, <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(a) μ <u>est extrémal dans</u> A_ν ;

(b) <u>A toute décomposition de</u> ν , $\nu = \nu_1 + \nu_2$, $\nu_i \in \mathcal{M}^+$, <u>correspond une décomposition</u> unique <u>de</u> μ , $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_i \in \mathcal{M}^+$, <u>telle que</u> $\mu_1 \prec \nu_1$, $\mu_2 \prec \nu_2$;

(c) <u>Pour toute décomposition de</u> μ , $\mu = \mu_1 + \mu_2$, <u>telle que</u> μ_1 , $\mu_2 \in \mathcal{M}^+$ <u>et</u> $\mu_1 \prec \frac{1}{2}\nu$, $\mu_2 \prec \frac{1}{2}\nu$, <u>on a</u> $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Démonstration. - On doit utiliser le lemme 2, qui affirme que $A_{\nu_1+\nu_2} = A_{\nu_1} + A_{\nu_2}$, et d'autre part le lemme général suivant :

LEMME. - *Soit* F *un espace localement convexe séparé, et soient* A *et* B *deux parties convexes compactes de* F . *L'ensemble* $C = A + B$ *est convexe compact, et tout point extrémal* z *de* C , *s'écrit de manière unique* $z = x + y$, *où* $x \in A$, $y \in B$, *et de plus* x *et* y *sont des points extrémaux de* A *et* B *respectivement.*

Il suffit d'appliquer ce lemme aux ensembles A_ν , A_{ν_1} , A_{ν_2} , lorsque $\nu = \nu_1 + \nu_2$. On a alors α , $\beta \in A_\nu$ et $\mu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Si (a) est vérifié, on doit avoir $\alpha = \beta$, ou encore $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}\mu$, ce qui implique (c).

On remarquera que cette proposition utilise seulement le fait que C est stable par enveloppe inférieure finie.

PROPOSITION 6. - *Soient* $\nu \in \mathfrak{M}^+$, $\mu \in A_\nu$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour tout* λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, $R(\mu - \lambda\nu) = (1 - \lambda)\mu$;
(b) $R(\mu - \frac{1}{2}\nu) = \frac{1}{2}\mu$;
(c) μ *est extrémal dans* A_ν .

Démonstration. - Nous ferons la démonstration suivant le schéma (a) $\Longrightarrow$ (b) , (b) $\Longrightarrow$ (c) , (c) $\Longrightarrow$ (a) .

1° (a) $\Longrightarrow$ (b) est immédiat. Montrons que (b) $\Longrightarrow$ (c) . Soient $\mu_1 , \mu_2 \in \mathfrak{M}^+$, $\mu_1 + \mu_2 = \mu$, telles que $\mu_1 \prec \frac{1}{2}\nu$ et $\mu_2 \prec \frac{1}{2}\nu$. Si la condition (b) est vérifiée, on a

$$\frac{1}{2}\mu = R(\mu - \frac{1}{2}\nu) \prec \mu - \mu_1 \prec \mu_2 \quad ;$$

de même

$$\frac{1}{2}\mu = R(\mu - \frac{1}{2}\nu) \prec \mu - \mu_2 \prec \mu_1 \quad ;$$

en comparant ces inégalités à $\mu = \mu_1 + \mu_2$, on obtient

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}\mu \quad ,$$

et l'on conclut à l'aide de la proposition précédente.

2° (c) $\Longrightarrow$ (a) . De manière générale, si $\mu \in A_\nu$, on a

$$R(\mu - \lambda\nu) \prec (1 - \lambda)\nu \qquad \text{et} \qquad R(\mu - \lambda\nu) \preccurlyeq \mu \quad ;$$

d'autre part, si $\mu_1 = \mu - R(\mu - \lambda\nu)$, on a

$$\mu_1 \prec \lambda\nu \quad ,$$

car $\mu \prec R(\mu - \lambda\nu) + \lambda\nu$. On a donc une décomposition de μ en somme de μ_1 et $R(\mu - \lambda\nu)$, avec $\mu_1 \prec \lambda\nu$ et $R(\mu - \lambda\nu) \prec (1 - \lambda)\nu$, et si la condition (c) est vérifiée, cela implique bien que $R(\mu - \lambda\nu) = (1 - \lambda)\mu$, $\mu_1 = \lambda\mu$.

2. Application à des cônes de fonctions numériques.

On se donne maintenant un espace localement compact à base dénombrable Ω . On désigne par $\mathcal{C}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}^+(\Omega)$) l'espace des fonctions numériques continues (resp. $\geqslant 0$) sur Ω . Soit $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ un cône convexe linéairement séparant, adapté et inf-stable, c'est-à-dire stable par enveloppe inférieure finie, et possédant la propriété (P). Pour les propriétés des cônes adaptés, on renvoie à [4]. La seule propriété que nous utiliserons, qui est vérifiée dans nos hypothèses, est la suivante :

(A) Pour toute forme linéaire T sur l'espace vectoriel $C - C$, positive sur $(C - C) \cap \mathcal{C}^+(\Omega)$, il existe une mesure de Radon, et une seule, μ sur Ω , telle que

$$\int v \, d\mu < +\infty \, , \qquad \forall \, v \in C \quad ,$$

et

$$\langle T , v \rangle = \int v \, d\mu \, , \qquad \forall \, v \in C \quad .$$

Disons qu'une mesure $\mu \geqslant 0$ sur Ω est C-intégrable, si $\int v \, d\mu < +\infty$ pour tout $v \in C$. Si μ est C-intégrable, μ définit une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $E = C - C$.

DÉFINITION 1. - Soient μ , ν deux mesures $\geqslant 0$, C-intégrables sur Ω . On dira que μ est balayée de ν relativement à C , si $\int v \, d\mu \leqslant \int v \, d\nu$ pour tous $v \in C$; on notera, comme précédemment, $(\mu \prec \nu)$ cette relation. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on omettra de dire "relativement à C ".

La proposition qui suit est un rappel de [4].

PROPOSITION 2.

1° Pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega)$, à support compact, et pour toute mesure $\mu \geqslant 0$, C-intégrable, on a

$$\int \varphi \, d\mu = \inf\{\int v \, d\mu \; ; \; v \geqslant \varphi \text{ et } v \in E = C - C\} \quad .$$

2° Il existe une suite $(v_n) \subset C$, telle que, si μ et ν sont des mesures ≥ 0 , C-intégrables, telles que $\int v_n \, d\mu = \int v_n \, d\nu$ pour tout n , alors $\mu = \nu$.

Remarquons simplement que, si Ω est à base dénombrable, il existe une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{C}(\Omega)$, φ_n à support compact pour tout n , qui sépare les mesures sur Ω , et la deuxième partie de la proposition 2 résulte de la première.

Les définitions suivantes sont directement tirées de la théorie du potentiel.

DÉFINITIONS 3.

1° Pour toute $v \in C$, et tout ensemble compact $F \subset \Omega$, on appelle réduite de v sur F , la fonction numérique

$$R_v^F = \inf\{w \in C \ ; \quad w(x) \geq v(x) \ , \quad \forall \ x \in F\} \quad .$$

2° On dit que C possède la propriété d'additivité des réduites, si, pour tous u , $v \in C$, et tout compact $F \subset \Omega$, on a

$$R_{u+v}^F = R_u^F + R_v^F \quad .$$

THÉORÈME 4. - Le cône convexe C possède la propriété d'additivité des réduites.

Démonstration. - Soient u , $v \in C$, F un compact de Ω , et soit $t \in C$, $t \geq u + v$ sur F . En remplaçant t par $\inf(t \ , u + v)$ au besoin, on se ramène au cas où $t \leq u + v$. D'après la propriété (P), il existe alors t_1 , $t_2 \in C$ tels que $t = t_1 + t_2$ et $t_1 \leq u$, $t_2 \leq v$. Ces conditions entraînent que $t_1 = u$ sur F , et $t_2 = v$ sur F , par suite $t_1 \geq R_u^F$, $t_2 \geq R_v^F$. Comme on a toujours $R_{u+v}^F \leq R_u^F + R_v^F$, car C est un cône convexe, on en conclut que

$$R_{u+v}^F = R_u^F + R_v^F \quad .$$

COROLLAIRE 5. - Pour tout compact $F \subset \Omega$, et toute mesure $\mu \geq 0$, C-intégrable, il existe une mesure, et une seule, $\nu \geq 0$, portée par F , telle que

$$\int R_v^F \, d\mu = \int v \, d\nu \quad .$$

Démonstration. - La formule précédente définit bien ν comme une mesure positive sur Ω . Montrons que ν est portée par F .

L'ensemble F est compact, il existe donc $v_0 \in C$ tel que $v_0(x) > 1$, $\forall \ x \in F$, car C est linéairement séparant.

L'espace vectoriel $E = C - C$ est réticulé, et, pour toute $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, on a, pour tout $x \in \Omega$,

$$\varphi(x) = \inf\{w(x) \ ; \ w \in E \ , \ w \geq \varphi\} \ .$$

De même, pour toute mesure $\sigma \geq 0$ sur Ω, C-intégrable,

$$\int \varphi \, d\sigma = \inf\{\int w \, d\sigma \ ; \ w \in E \ , \ w \geq \varphi\} \ .$$

Supposons que $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in F$. D'après le lemme de Dini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $w \in E$ tel que $w \geq \varphi$ et $w(x) < \varepsilon$, $\forall x \in F$. On a $w = v_1 - v_2$, $v_1, v_2 \in C$, et $w(x) < \varepsilon v_0(x)$, $\forall x \in F$, d'où l'on tire $v_1(x) \leq v_2(x) + \varepsilon v_0(x)$, $\forall x \in F$, et

$$R_{v_1}^F \leq R_{v_2}^F + \varepsilon R_{v_0}^F \ .$$

Si l'on intègre par rapport à ν, on obtient

$$0 \leq \int w \, d\nu = \int (v_1 - v_2) \, d\nu = \int (R_{v_1}^F - R_{v_2}^F) \, d\mu \leq \varepsilon \int R_{v_0}^F \, d\mu \ .$$

En faisant varier ε, on obtient bien que $\int \varphi \, d\nu = 0$, ce qui démontre le corollaire.

DÉFINITION 6. - <u>Pour tout compact</u> $F \subset \Omega$, <u>et toute mesure</u> μ, <u>C-intégrable sur</u> Ω, <u>on appelle</u> balayée de μ sur F, <u>la mesure</u> μ^F, <u>définie par la relation</u>

$$\int v \, d\mu^F = \int R_v^F \, d\mu \ , \qquad \underline{\text{pour toute}} \ \ v \in C \ .$$

<u>Propriétés élémentaires de la mesure balayée sur un compact.</u> - Soit μ une mesure ≥ 0, C-intégrable.

1° Si F, K sont des compacts de Ω, $F \subset K$, alors $\mu^F \prec \mu^K \prec \mu$.

2° Si $\nu \prec \mu$, alors $\nu^K \prec \mu^K$.

3° Si $\nu \prec \mu$, ν mesure C-intégrable, et si ν est portée par K compact, alors $\nu \prec \mu^K$.

En effet, pour $v \in C$, la famille $M = \{w \in C \ ; \ w \geq v \ \text{sur} \ K\}$ est filtrante décroissante, et, pour tout $w \in C$, $\int w \, d\nu \leq \int w \, d\mu$, et, par passage à la limite, $\int R_v^K \, d\nu = \int v \, d\nu \leq \int R_v^K \, d\mu = \int v \, d\mu^K$.

4° Si A, B sont des compacts de Ω, $A \subset B$, alors $(\nu^B)^A = (\nu^A)^B = \nu^A$.

Ces propriétés permettent de poser la définition suivante :

DÉFINITION 7. - <u>Pour toute mesure</u> C-<u>intégrable</u> $\nu \geq 0$ <u>sur</u> Ω , <u>et tout ensemble borélien</u> $A \subset \Omega$, on appelle mesure balayée de ν sur A , <u>la mesure</u> ν^A <u>définie par la relation</u>

$$\int v \, d\nu^A = \sup\{\int v \, d\nu^K \; ; \; K \text{ \underline{compact}}, \; K \subset A\} , \qquad \text{\underline{où}} \quad v \in C \; .$$

Nous n'aurons pas besoin, dans notre étude, des propriétés particulières de l'application $K \longmapsto \nu^K$; nous remarquerons toutefois la permanence des propriétés suivantes :

1° Si A et B sont des ensembles boréliens, et $A \subset B$, et si μ est une mesure ≥ 0 , C-intégrable, alors $\mu^A < \mu^B$.

2° Si μ et ν sont des mesures C-intégrables, $\nu < \mu$, et si ν est portée par un ensemble borélien A , alors $\nu < \mu^A$.

En effet, il existe une suite croissante (ν_n) de mesures ≥ 0 , telle que $\nu = \sup \nu_n$, où ν_n est une mesure ≥ 0 , portée par un compact de A ; par suite $\nu_n < \mu^A$, pour tout n , et $\nu < \mu^A$.

3° Si $\nu < \mu$, alors $\nu^A < \mu^A$, où ν et μ sont des mesures ≥ 0 , C-intégrables, et A un ensemble borélien de Ω .

<u>Remarque</u>. - En général, on ne sait pas si μ^A est portée par A .

PROPOSITION 8. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure</u> C-<u>intégrable</u> ≥ 0 <u>sur</u> Ω .

1° <u>Pour tout compact</u> $K \subset \Omega$, <u>la mesure</u> μ^K <u>est extrémale dans</u> A_μ ;

2° <u>Pour tout ensemble borélien</u> $B \subset \Omega$, <u>la mesure</u> μ^B <u>est extrémale dans</u> A_μ .

<u>Démonstration</u>.

1° Soient μ_1 , μ_2 des mesures positives C-intégrables, telles que $\mu^K = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, $\mu_1 , \mu_2 \in A_\mu$. La mesure μ est portée par K , donc μ_1 et μ_2 aussi, et l'on doit avoir $\mu_1 < \mu^K$, $\mu_2 < \mu^K$, c'est-à-dire

$$\int v \, d\mu_1 \leq \int v \, d\mu^K \qquad \text{et} \qquad \int v \, d\mu_2 \leq \int v \, d\mu^K , \qquad \text{pour tout} \quad v \in C \; .$$

Comme l'on a $\mu^K = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, cela implique que

$$\int v \, d\mu_1 = \int v \, d\mu_2 = \int v \, d\mu^K , \qquad \text{pour tout} \quad v \in C \; ,$$

par suite $\mu_1 = \mu_2 = \mu^K$, autrement dit μ^K est extrémale dans A_μ .

2° De manière générale, si σ , μ , ν sont des mesures C-intégrables, telles que $\sigma < \nu < \mu$, et si σ est extrémale dans A_μ , σ est aussi extrémale dans

A_ν , puisque $A_\nu \subset A_\mu$.

Soient Δ un ensemble ordonné filtrant croissant, $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ une famille de mesures C-intégrables telle que :

(a) $\mu_\alpha \in A_\mu$, et μ_α est extrémale dans A_μ ;
(b) $(\alpha \leqslant \beta) \Longrightarrow (\mu_\alpha \prec \mu_\beta)$.

Dans ces conditions, on peut définir une mesure C-intégrable ν par la relation

$$\int v \, d\nu = \sup_{\alpha\in\Delta} \int v \, d\mu_\alpha \, , \qquad \text{pour tout } v \in C \, ,$$

et nous allons montrer que ν est extrémale dans A_ν .

Montrons qu'il existe une seule décomposition de ν ,

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) \, , \qquad \nu_1 \, , \nu_2 \in A_\mu \quad .$$

Pour tout $\alpha \in \Delta$, on a $\mu_\alpha \prec \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$, il existe donc une décomposition de μ_α en

$$\mu_\alpha = \frac{1}{2}(\mu_\alpha^1 + \mu_\alpha^2) \, , \qquad \text{avec } \mu_\alpha^1 \prec \nu_1 \, , \ \mu_\alpha^2 \prec \nu_2 \quad .$$

Cela implique $\mu_\alpha^1 \prec \mu$, $\mu_\alpha^2 \prec \mu$, et μ_α étant extrémale dans A_μ , on en conclut que $\mu_\alpha^1 = \mu_\alpha^2 = \mu_\alpha$ et que $\mu_\alpha \in A_{\nu_1} \cap A_{\nu_2}$ pour tout α , donc $\lim \mu_\alpha = \nu \in A_{\nu_1} \cap A_{\nu_2}$. On a donc à la fois $(\nu \prec \nu_1 \, , \ \nu \prec \nu_2)$ et $\nu = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$, cela entraîne bien que $\nu = \nu_1 = \nu_2$, autrement dit que ν est extrémale dans A_μ .

Si l'on applique ce résultat à la famille $(\mu^K)_{K\in\Delta}$, où Δ est la famille des compacts contenus dans un ensemble borélien B , on obtient bien que $\mu^B = \lim_{K\in\Delta} \mu^K$ est extrémale dans A_μ .

PROPOSITION 9. - <u>Soit</u> μ <u>une mesure</u> $\geqslant 0$, <u>C-intégrable, et soit</u> $\nu \in A_\mu$, <u>extrémale dans</u> A_μ . <u>Il existe alors un ensemble borélien</u> $B \subset \Omega$, <u>tel que</u> $\nu = \mu^B$, <u>et tel que la mesure</u> ν <u>soit portée par</u> B .

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition 6 du paragraphe 1, on a $R(\nu - \frac{1}{2}\mu) = \frac{1}{2}\nu$, et, pour tout $v \in C$,

$$\langle R(\nu - \frac{1}{2}\mu) \, , v\rangle = \langle \frac{1}{2}\nu \, , v\rangle = \sup_{w\in C;\, w\leqslant v} \langle \nu - \frac{1}{2}\mu \, , w\rangle \quad .$$

Il existe donc une suite $(w_n) \subset C$, $0 \leqslant w_n \leqslant v$, telle que

$$\langle \frac{1}{2}\nu \, , v\rangle - \frac{1}{2^n} \leqslant \langle \nu - \frac{1}{2}\mu \, , w_n\rangle \quad .$$

Considérons les quatre nombres A , B , C , D :

$$A = \langle \tfrac{1}{2}\nu , v \rangle - \frac{1}{2^n} ; \qquad B = \langle \nu - \tfrac{1}{2}\mu , w_n \rangle ,$$

$$C = \langle \nu - \tfrac{1}{2}\nu , w_n \rangle ; \qquad D = \langle \tfrac{1}{2}\nu , v \rangle .$$

Montrons que $A \leqslant B \leqslant C \leqslant D$. En effet, on a :

$A \leqslant B$, en raison de l'hypothèse faite sur la suite (w_n) ;
$B \leqslant C$, car $\nu \prec \mu$;
$C \leqslant D$, car $w_n \leqslant v$, et ν est une mesure $\geqslant 0$;
$D - A \leqslant \frac{1}{2^n}$.

On en tire $C - B \leqslant \frac{1}{2^n}$, $D - C \leqslant \frac{1}{2^n}$, soit

$$\langle \tfrac{1}{2}(\mu - \nu) , w_n \rangle \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad \langle \tfrac{1}{2}\nu , v - w_n \rangle \leqslant \frac{1}{2^n} .$$

Posons $t = \liminf_{n\to\infty} w_n$. La dernière inégalité montre que la suite $(\langle \nu , w_n \rangle)$ converge vers $\langle \nu , t \rangle = \langle \nu , v \rangle$. D'autre part, d'après le lemme de Fatou,

$$\langle \mu , t \rangle \leqslant \liminf_{n\to\infty} \langle \mu , w_n \rangle = \liminf_{n\to\infty} \langle \nu , w_n \rangle = \langle \nu , t \rangle .$$

On a donc déjà $\langle \mu , t \rangle \leqslant \langle \nu , t \rangle$.

De manière générale, si $\nu \prec \mu$, et si $(s_n) \subset C$, on a toujours

$$\langle \nu , \liminf s_n \rangle \leqslant \langle \mu , \liminf s_n \rangle ,$$

car le cône convexe C est inf-stable. On a donc aussi $\langle \nu , t \rangle = \langle \mu , t \rangle$.

En résumé, on a démontré le lemme suivant :

LEMME. - <u>Pour tout</u> $v \in C$, <u>il existe une fonction</u> t <u>de la forme</u> $t = \liminf w_n$, $w_n \in C$, <u>et</u> $w_n \leqslant v$, <u>telle que</u>

$$\langle \nu , v \rangle = \langle \nu , t \rangle = \langle \mu , t \rangle .$$

Soit alors $(v_n) \subset C$ une suite séparant les mesures C-intégrables, et soit $t_n \leqslant v_n$ une fonction numérique du type $t_n = \liminf w_k$, $w_k \in C$, telle que

$$\langle \nu , v_n \rangle = \langle \nu , t_n \rangle = \langle \mu , t_n \rangle .$$

Posons $B = \bigcap_n \{v_n = t_n\}$; la mesure ν est alors portée par B . Montrons que $\nu = \mu^B$.

(a) La mesure ν est portée par B, donc $\nu < \mu^B$, et

$$\langle \nu , v_n \rangle \leq \langle \mu^B , v_n \rangle , \qquad \text{pour tout } n .$$

(b) On a déjà remarqué que, si $\alpha < \beta$, α et β étant deux mesures positives C-intégrables, on a $\langle \alpha , t_n \rangle \leq \langle \beta , t_n \rangle$, en raison de la forme particulière des fonctions t_n, donc on a toujours

$$\langle \mu^B , t_n \rangle \leq \langle \mu , t_n \rangle = \langle \nu , t_n \rangle = \langle \nu , v_n \rangle ,$$

et, pour tout compact $K \subset B = \bigcap_n \{v_n = t_n\}$,

$$\langle \mu^K , v_n \rangle = \langle \mu^K , t_n \rangle \leq \langle \mu^B , t_n \rangle \leq \langle \mu^B , v_n \rangle .$$

En faisant varier le compact $K \subset B$, on obtient donc

$$\langle \mu^B , t_n \rangle = \langle \mu^B , v_n \rangle ,$$

et l'on a vu que $\langle \mu^B , t_n \rangle \leq \langle \nu , v_n \rangle$, par suite

$$\langle \mu^B , v_n \rangle \leq \langle \nu , v_n \rangle , \qquad \text{pour tout } n .$$

On a vu, en (a), l'inégalité inverse, et comme la suite (v_n) est séparante, on a bien $\nu = \mu^B$.

COROLLAIRE 10. - <u>Pour toute mesure</u> $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, <u>l'ensemble</u> A_ν <u>est l'enveloppe convexe fermée de la famille</u> $(\nu^K)_{K\in\mathcal{K}(\Omega)}$, <u>où</u> $\mathcal{K}(\Omega)$ <u>est la famille des compacts de</u> Ω.

Annexe

Equivalence de la propriété d'additivité des réduites et de la propriété (P)

Soient X un espace compact, $C \subset \mathcal{C}^+(X)$ un cône convexe linéairement séparant, inf-stable, fermé, vérifiant la propriété d'additivité des réduites :

(A,R) Pour tout compact $K \subset X$, $v_1 , v_2 \in C$, $R^K_{v_1+v_2} = R^K_{v_1} + R^K_{v_2}$, où $R^K_u = \inf\{w \in C \; ; \; w(x) \geq u(x) , \; \forall x \in K\}$.

On supposera pour simplifier que $1 \in C$. Dans [ ], en faisant l'hypothèse supplémentaire que, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^+(X)$, $R\varphi \in C$, où $R\varphi = \inf\{w \in C , \; w \geq \varphi\}$, on a montré que C possédait la propriété (P) suivante :

(P) Pour tous u , v_1 , $v_2 \in C$, tels que $u \leqslant v_1 + v_2$, il existe u_1 , $u_2 \in C$ tels que $u_i \leqslant v_i$ et $u = u_1 + u_2$.

Dans ce qui suit, on va montrer que le cône C vérifie (P), sans faire d'hypothèse supplémentaire.

LEMME 1. - Soient u , $t \in C$. Pour tout $\lambda \in]0 , 1[$, on a

$$u \leqslant (1 - \lambda)\ R_t^{[u \geqslant \lambda t]} + \lambda t \quad .$$

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 2. - Soient u , v_1 , $v_2 \in C$, $u \leqslant v_1 + v_2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\lambda \in]0 , 1[$, il existe v'_1 , $v'_2 \in C$ tels que $v'_1 \leqslant v_1$, $v'_2 \leqslant v_2$, et

$$u \leqslant v'_1 + v'_2 < \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) u + \lambda(v_1 + v_2) + \varepsilon \quad .$$

Démonstration. - On a toujours, en posant $t = v_1 + v_2$,

$$R_t^{\{u \geqslant \lambda t\}} \leqslant \frac{1}{\lambda} u \quad ,$$

et, d'après la propriété d'additivité des réduites,

$$R_{v_1}^{\{u \geqslant \lambda t\}} + R_{v_2}^{\{u \geqslant \lambda t\}} = R_t^{\{u \geqslant \lambda t\}} \leqslant \frac{1}{\lambda} u \quad .$$

Le lemme de Dini permet d'affirmer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe s_1 , $s_2 \in C$ tels que

$$R_{v_1}^{\{u \geqslant \lambda t\}} \leqslant s_1 \leqslant v_1 \ , \qquad R_{v_2}^{\{u \geqslant \lambda t\}} \leqslant s_2 \leqslant v_2 \qquad \text{et} \qquad s_1 + s_2 \leqslant \frac{1}{\lambda} u + \varepsilon \quad .$$

Posons

$$v'_1 = (1 - \lambda) s_1 + \lambda v_1 \leqslant v_1 \quad ,$$

$$v'_2 = (1 - \lambda) s_2 + \lambda v_2 \leqslant v_2 \quad .$$

De l'inégalité $u \leqslant (1 - \lambda)\ R_u^{\{u \geqslant \lambda t\}} + \lambda t$, on tire

$$u \leqslant (1 - \lambda)(s_1 + s_2) + \lambda(v_1 + v_2) = v'_1 + v'_2 \leqslant \frac{1 - \lambda}{\lambda} u + \lambda(v_1 + v_2) + \varepsilon \quad .$$

On conserve les hypothèses de la proposition précédente.

THÉORÈME 3. - Pour tout $\lambda \in]0 , 1[$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe v'_1 , $v'_2 \in C$ tels que $v'_i \leqslant v_i$, et

$$u \leqslant v'_1 + v'_2 \leqslant u + \varepsilon \quad .$$

Démonstration. - D'après la proposition précédente, on peut construire par récurrence deux suites (v_n^1) et (v_n^2) d'éléments de C, telles que :

(a) $v_{n+1}^1 \leq v_n^1 \leq v_1$; $v_{n+1}^2 \leq v_n^2 \leq v_2$;

(b) $u \leq v_{n+1}^1 + v_{n+1}^2 \leq \frac{1-\lambda}{\lambda} u + \lambda(v_n^1 + v_n^2) + \frac{1}{n}$.

Posons alors $w_1 = \inf v_n^1$, $w_2 = \inf v_n^2$; par passage à la limite, on obtient $u \leq w_1 + w_2 \leq \frac{1-\lambda}{\lambda} u + \lambda(w_1 + w_2)$, d'où l'on tire $w_1 + w_2 \leq \frac{1}{\lambda} u$. D'après le lemme de Dini, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que

$$u \leq v_n^1 + v_n^2 \leq \frac{1}{\lambda} u + \varepsilon \quad .$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4. - Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe v_1' , $v_2' \in C$ tels que $v_i' \leq v_i$ et $u \leq v_1' + v_2' \leq u + \varepsilon$.

Démonstration. - L'élément u étant borné, pour λ voisin de 1 , on aura $\frac{1}{\lambda} u \leq u + \varepsilon$; le théorème précédent permet alors de conclure.

THÉORÈME 5. - Soient u , v_1 , $v_2 \in C$ tels que $u \leq v_1 + v_2$. Il existe alors u_1 , $u_2 \in C$ tels que $u_i \leq v_i$ et $u = u_1 + u_2$.

Démonstration. - On rappelle que C est supposé fermé dans $\mathcal{C}^+(X)$. Le corollaire précédent permet de construire par récurrence deux suites décroissantes (v_n^1) et (v_n^2) d'éléments de C , telles que $u \leq v_n^1 + v_n^2 \leq u + \frac{1}{n}$. Les fonctions $u_1 = \inf v_n^1$ et $u_2 = \inf v_n^2$ sont s. c. s., et $u = u_1 + u_2$, par suite u_1 et u_2 sont continues, les suites (v_n^1) et (v_n^2) convergent uniformément respectivement vers u_1 et u_2 , et comme C est fermé, u_1 , $u_2 \in C$.

DÉFINITION. - On dit qu'une fonction numérique f sur X est une C-fonction, si l'on a $\int^* f \, d\mu \leq f(x)$ pour tous $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$, $x \in X$, tels que $\mu \prec \varepsilon_x$.

THÉORÈME 6. - Pour tous u , $v \in C$, $R(u - v)$ et $(u - R(u - v))$ sont des C-fonctions.

Démonstration. - La propriété est évidente pour $R(u - v)$ qui est définie par

$$R(u - v) = \inf\{w \in C \; ; \; w \geq u - v\} \quad .$$

On a toujours $u \leq v + R(u - v)$. Soit alors (v_α) une famille filtrante décroissante d'éléments de C , telle que $R(u - v) = \inf v_\alpha$. Pour tout α , il existe une décomposition de u en $u = u_\alpha^1 + u_\alpha^2$, $u_\alpha^i \in C$, et $u_\alpha^1 \leq v$, $u_\alpha^2 \leq v_\alpha$. Ceci implique

$$u - v \leqslant u - u_\alpha^1 \leqslant u_\alpha^2 \leqslant v_\alpha \quad ,$$

et, par suite,

$$R(u - v) = \inf_\alpha u_\alpha^2 = \lim \sup u_\alpha^2 \quad .$$

Dans cette situation particulière, on vérifie que, pour toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+(X)$,

$$\int (u - R(u - v))\, d\mu = \lim_\alpha \int u_\alpha^1\, d\mu = \sup_\alpha \int u_\alpha^1\, d\mu \quad ,$$

ce qui montre que $u - R(u - v)$ est une C-fonction.

COROLLAIRE 7. - Si l'on suppose que, pour toute $\varphi \in C^+(X)$, $R\varphi \in C^+(X)$, et si C est fermé, alors $(u - R(u - v)) \in C$.

Démonstration. - Il suffit de dire que C est exactement l'ensemble des C-fonctions continues [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 36, 1957, p. 179-189.

[2] MEYER (Paul-André). - Probabilités et potentiel. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1318 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 14).

[3] MOKOBODZKI (Gabriel). - Principe de balayage, principe de domination, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 1re année, 1962, n° 1, 11 p.

[4] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 6e année, 1966/67, n° 5, 35 p.

[5] MOKOBODZKI (G.) et SIBONY (D.). - Cônes de fonctions et théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 10e année, 1966/67, n° 8 et 9, 35 p. et 29 p.

[6] MOKOBODZKI (G.). - Structure des cônes de potentiels, Séminaire Bourbaki, 22e année, 1969/70, n° 377, 14 p.

(Texte reçu le 8 mars 1971)

Gabriel MOKOBODZKI
Ch. Rech. CNRS
12 rue de la Chaise
75 - PARIS 07