Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

ALAIN GOULLET DE RUGY

Faces complémentables dans un simplexe

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 6, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A6_0>

25 janvier 1968

FACES COMPLÉMENTABLES DANS UN SIMPLEXE

par Alain GOULLET de RUGY

1. Introduction.

Dans [1], ALFSEN s'est le premier préoccupé de l'étude des faces d'un simplexe compact. Il a montré notamment que toute face fermée est complémentable ; lorsque le simplexe est en outre métrisable, il a montré que la face complémentaire d'une face fermée a une structure borélienne régulière.

Dans ce papier, nous systématisons le travail d'Alfsen et cherchons à l'étendre, soit aux faces fermées d'un simplexe, ou mieux d'un cône réticulé non compact, soit aux faces non fermées d'un simplexe compact.

Dans le premier cas, nous nous plaçons dans le cadre des simplexes faiblement complets. Nous avons montré ([7], [9]) que, dans ce cas, toute face fermée est complémentable. Nous montrons ici que la face complémentaire d'une face fermée est un G_δ (corollaire 23).

L'étude des faces complémentables d'un simplexe compact K, a pour point de départ qu'une face est fermée si, et seulement si, elle est $A_s(K)$-exposée. Partant, il est naturel de se demander sous quelles conditions portant sur A, ensemble de fonctions affines sur K, une face A-exposée F est complémentable, et sous quelles conditions la face complémentaire F' possède une structure intéressante (mesurable, borélienne, etc.). Dans [8], les propriétés qui étaient apparues les plus intéressantes sur A étaient les suivantes :

(1) $D\nearrow(A) = D\searrow(A) = A$;

(2) Si f, $g \in A$, alors $\sup_a(f, g) \in A$, $\inf_a(f, g) \in A$;

(3) Si $f \in A$ avec $f = 0$ sur $\mathcal{E}(K)$, f est identiquement nulle.

Parmi les cônes de fonctions affines étudiés dans [8], $\mathfrak{a}_{bar}(K)$ satisfaisait à (1), mais ni à (2) ni à (3) ; $\mathfrak{a}_{app}(K)$ satisfaisait à (2) et (3) mais pas à (1), et enfin $\mathfrak{a}_{app}^{\Omega}(K)$ satisfaisait à (1) et (2) mais pas à (3).

Les propriétés (1), (2) et (3) ont des conséquences précises sur les faces A-exposées. Ainsi (théorème 29), toute face $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée est complémentable. Pour étudier la face complémentaire d'une face donnée F, nous introduisons la fonction complémentante associée à F, soit α_F, qui est l'unique fonction affine égale à 1 sur F et à 0 sur F'. Toutes les propriétés que nous obtiendrons sur F' seront conséquences de propriétés de α_F. Lorsque F est $\mathcal{a}_{bar}(K)$-exposée, on ignore tout de α_F, donc de F', car $\mathcal{a}_{bar}(K)$ ne vérifie pas la propriété (2). Par contre, lorsque F est $\mathcal{a}^{\Omega}_{app}(K)$-exposée, α_F est Ω-approchable (théorème 34) et par suite F' est aussi $\mathcal{a}^{\Omega}_{app}(K)$-exposée (ceci parce que $\mathcal{a}^{\Omega}_{app}(K)$ vérifie la propriété (2)). Il y a dès lors dualité parfaite, et la famille des faces $\mathcal{a}^{\Omega}_{app}$-exposées est stable par passage à la face complémentaire, par intersection dénombrable et par "réunion convexe dénombrable" (au sens (c) du théorème 38). Enfin, si A est une famille de fonctions Ω-approchables satisfaisant à (3) les faces A-exposées ont une propriété d'unicité correspondante : il existe en plus une face A-exposée dont la trace sur l'ensemble des points extrémaux soit un ensemble donné.

Relativement à cette étude, les simplexes compacts pour lesquels $\mathcal{a}_{bar}(K) = \mathcal{a}_{app}(K)$ donc pour lesquels $\mathcal{a}_{bar}(K)$ satisfait à (1), (2) et (3), jouissent de propriétés très régulières. En fait, en dehors des simplexes métrisables et plus généralement en dehors des simplexes dont l'ensemble des points extrémaux est un $\mathcal{K}$-souslinien, on ne connaît pas de simplexe ayant cette régularité. En particulier, les simplexes définis de manière fonctionnelle, nous pensons par exemple au simplexe de Lion associé à une famille résolvante ([11]), ne semblent avoir aucune propriété de cet ordre ; en effet, si, du fait même de leur définition, on connaît des propriétés des fonctions affines continues définies sur ces simplexes, on n'en connaît aucune pour les fonctions affines semi-continues, et a fortiori aucune pour les fonctions approchables.

Remarque. - Comme ce papier est la suite naturelle de l'étude commencée dans [8], sa lecture présuppose la lecture de ce dernier et par suite, les définitions et notations qui y figurent ne sont pas rappelées.

2. Résultats préliminaires.

RAPPELS 1. - Soit K un cône convexe saillant décomposable, c'est-à-dire un cône qui, ordonné par son ordre propre vérifie le lemme de décomposition de Riesz (cf. [4], p. 19).

On appelle face conique de K tout sous-cône convexe héréditaire de K. On appelle face conique complémentaire d'une face conique F de K, la réunion F' de toutes les faces coniques de K ne rencontrant pas $F \setminus \{0\}$. On montre que

$$(2) \qquad F' = \{x \in K \mid x \text{ étranger à tout point de } F\} .$$

Pour plus de détails, on pourra consulter le § 2 de [9].

DÉFINITION 3. - On dit qu'une face conique F de K est complémentable si K est l'enveloppe convexe de F et de F', où F' est la face conique complémentaire de F. On note $\mathfrak{F}_c(K)$ la famille des faces coniques complémentables de K.

PROPOSITION 4 (ALFSEN). - Soit F une face conique complémentable de K. Alors, l'écriture d'un point x de K comme somme $x = x_1 + x_2$ d'un point $x_1 \in F$ et d'un point $x_2 \in F'$ est unique.

Démonstration. - Supposons que l'on ait deux écritures $x = x_1 + x_2$ et $x = x_1' + x_2'$ de x, avec x_i, $x_i' \in F_i$, $(i = 1, 2)$, où l'on a posé $F_1 = F$ et $F_2 = F'$. Comme K est décomposable, il existe $y_{ij} \in K$, $(i, j = 1, 2)$ tels que

$$x_i = \sum_j y_{ij} \; ; \quad x_j' = \sum_i y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2) .$$

Comme F_i est héréditaire, on en déduit que

$$y_{ij} \in F_i \quad \text{et} \quad y_{ij} \in F_j \qquad (i, j = 1, 2) .$$

Par suite, $y_{ij} \in F_i \cap F_j = \{0\}$, $(i \neq j = 1, 2)$ car le seul point étranger à lui-même est 0. Ainsi $x_1 = y_{11} = x_1'$ et $x_2 = y_{22} = x_2'$.

Ainsi, si F est une face complémentable de K, on peut définir l'application π_F qui à un point x de K fait correspondre sa composante x_1 sur F.

COROLLAIRE 5. - Si F_1 et F_2 sont deux faces coniques de K d'intersection égale à 0 telles que K soit l'enveloppe convexe de F_1 et F_2, alors F_1 est complémentable et $F_2 = F_1'$.

Démonstration. - Nous avons seulement à montrer que $F_2 = F_1'$. Clairement $F_1' \supset F_2$. Inversement, soit $x' \in F_1'$; on peut écrire $x' = x_1 + x_2$ avec $x_i \in F_i$, $(i = 1, 2)$. Comme x' et x_1 sont étrangers (cf. formule (2)) et comme $x_1 \leqslant x'$, on a $x_1 = 0$ et $x' = x_2 \in F_2$.

COROLLAIRE 6. - Si F est une face complémentable de K, on a $(F')' = F$.

Démonstration. - On applique le corollaire précédent avec $F_1 = F'$ et $F_2 = F$.

PROPOSITION 7. - Soit K un cône convexe complètement réticulé. Pour une face conique de K, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) F est une face complémentable.

(b) Pour toute partie non vide X de F, majorée dans K, la borne supérieure de X dans K, est dans F.

De plus, si ces propriétés sont satisfaites pour une face F, on a

(8) $$\pi_F(x) = \sup\{y \mid y \in F \text{ et } y \leqslant x\} .$$

Démonstration. -

(a) $\Longrightarrow$ (b). D'abord, comme F est héréditaire dans K, l'ordre propre de F coïncide avec l'ordre induit par l'ordre propre de K et de plus, F est réticulé pour son ordre propre. Cela étant, soit X une partie non vide de F, majorée dans K ; posons $a = \sup X$. Comme F est complémentable, on a $K = F + F'$; on peut donc écrire $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in F$ et $a_2 \in F'$. Comme a_2 est étranger à tout point de F, tout point x de F plus petit que a est plus petit que a_1, donc pour tout $x \in X$, $x \leqslant a_1$, donc $a_1 \geqslant a$; ainsi $a = a_1$.

(b) $\Longrightarrow$ (a). La démonstration de cette implication est exactement celle de la proposition 5, p. 24 de [4].

LEMME 9. - Soit K un cône convexe complètement réticulé. Si F_1 et F_2 sont deux faces coniques complémentables de K, la face conique $F = F_1 \cap F_2$ est complémentable et

(10) $$F' = F'_1 + F'_2 .$$

De même, la face conique $G = F_1 + F_2$ est complémentable et

(11) $$G' = F'_1 \cap F'_2 .$$

Démonstration. - Du fait de la caractérisation (b) de la proposition précédente, il est clair que F est complémentable. Reste à voir que $F' = F'_1 + F'_2$. D'abord $F' \supset F'_1 + F'_2$ de manière évidente. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in F'$; x peut s'écrire $x = x_i + y_i$ avec $x_i \in F_i$ et $y_i \in F'_i$, $(i = 1 , 2)$. Comme x est étranger à tout point de F, x est, en particulier, étranger à $\inf(x_1 , x_2)$, par suite, comme $x \geqslant \inf(x_1 , x_2)$, $\inf(x_1 , x_2) = 0$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} x = \inf(x , x) &\leqslant \inf(y_1 , x) + \inf(x_1 , x_2) + \inf(x_1 , y_2) \\ &\leqslant \inf(y_1 , x) + \inf(x_1 , y_2) \\ &\leqslant y_1 + \inf(x_1 , y_2) \leqslant x , \end{aligned}$$

alors, $\inf(x_1 , y_2) = x_1$; autrement dit $x_1 \leqslant y_2$. Par suite, comme F'_2 est héréditaire, $x_1 \in F'_2$. Finalement, on a bien $x = x_1 + y_1 \in F'_2 + F'_1$.

Considérons maintenant $G = F_1 + F_2$. La face $F'_1 \cap F'_2$ est complémentable et, d'après (10) et le corollaire 6, sa face complémentaire est G . Donc, d'après le corollaire 5, G est complémentable et sa face complémentaire est $F'_1 \cap F'_2$.

PROPOSITION 12. - Soit K un cône complètement réticulé. La famille $\mathfrak{F}_c(K)$ a les propriétés suivantes :

(a) Si $F \in \mathfrak{F}_c(K)$, alors $F' \in \mathfrak{F}_c(K)$.

(b) Si F et $G \in \mathfrak{F}_c(K)$, alors $F + G \in \mathfrak{F}_c(K)$.

(c) Si $F_i \in \mathfrak{F}_c(K)$, pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathfrak{F}_c(K)$.

(d) Si $F_i \in \mathfrak{F}_c(K)$, pour tout $i \in I$, et si F est la plus petite face complémentable contenant $\bigcup_{i\in I} F_i$, alors $F' = \bigcap_{i\in I} F'_i$.

Démonstration. - (a) résulte naturellement du corollaire 5 ; (b) résulte du lemme 9, et (c) est une conséquence directe de la caractérisation (b) de la proposition 7. Enfin, pour montrer (d), considérons $G = \bigcap_{i\in I} F'_i$. G est naturellement la plus grande face complémentable disjointe de $(\bigcup_{i\in I} F_i \setminus \{0\})$. Par suite G' est la plus petite face complémentable contenant $\bigcup_{i\in I} F_i$.

Remarque. - En reprenant les notations de (d), il convient de noter que si I est fini, on a, à cause de (b), $F = \sum_{i\in I} F_i$.

Supposons maintenant que K soit un simplexe, c'est-à-dire un convexe tel que, si $\tilde{K}$ est un cône pointé de base K , $\tilde{K}$ soit réticulé pour son ordre propre. Alors, on définit les faces de K comme étant les traces sur K des faces coniques de $\tilde{K}$. Si F_0 est une face conique de $\tilde{K}$, on définit la face complémentaire de $F = F_0 \cap K$ comme étant la trace $F' = F'_0 \cap K$ de F'_0 sur K . Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au § 2 de [9].

DÉFINITION 13. - On dit qu'une face F d'un simplexe K est complémentable si K est l'enveloppe convexe de F et de sa face complémentaire F' .

Les résultats que nous venons de montrer pour les cônes s'adaptent tout naturellement aux simplexes. Ainsi, par exemple, la proposition 4 devient la proposition suivante :

PROPOSITION 14. - Soit F une face complémentable d'un simplexe K . Alors, tout point x de K s'écrit de manière unique comme combinaison convexe $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ d'un point x_1 de F et d'un point x_2 de F' .

Dans le cas d'un simplexe on ne peut plus parler de l'application π_F ; par contre on est amené à étudier l'application $x \longmapsto \alpha_1 = \alpha_F(x)$ de K dans $[0, 1]$. Cette application est affine et $\{\alpha_F = 1\} = F$, et $\{\alpha_F = 0\} = F'$. Ceci nous conduit naturellement à introduire la notion suivante :

DÉFINITION 15. - Soit K un convexe. On dit qu'une application affine α de K dans $[0, 1]$ est complémentante si K est l'enveloppe convexe des faces $\{\alpha = 1\}$ et $\{\alpha = 0\}$. On note $\mathfrak{A}_{comp}(K)$ l'ensemble des fonctions complémentantes de K.

Compte tenu du corollaire 5, on peut dire que α est complémentante si $\{\alpha = 1\}$ est une face complémentable dont la face complémentaire est $\{\alpha = 0\}$. Si K est un simplexe et si F est une face complémentable de K, il existe une unique fonction complémentante, soit α_F, qui vaut 1 sur F, et 0 sur F' ; on dit que c'est la fonction complémentante associée à F. Ainsi, si α est une fonction complémentante sur K, α est la fonction complémentante associée à la face $\{\alpha = 1\}$.

Les notions de face complémentable et de fonction complémentante sont donc équivalentes. Dans la suite, nous utiliserons alternativement l'une ou l'autre de ces notions suivant la nature du problème posé. Auparavant il convient de préciser la correspondance entre une face F et la fonction complémentante associée.

PROPOSITION 16. - Soit K un simplexe tel que $\tilde{K}$ soit complètement réticulé. Alors,

(1) Si $f, g \in \mathfrak{A}_{comp}(K)$, $\sup_a(f, g)$ et $\inf_a(f, g) \in \mathfrak{A}_{conv}(K)$.

(2) Si F et $G \in \mathfrak{F}_c(K)$, $\sup_a(\alpha_F, \alpha_G) = \alpha_{conv(F \cup G)}$; $\inf_a(\alpha_F, \alpha_G) = \alpha_{F \cap G}$.

Démonstration. - D'abord, comme $f = \alpha_{\{f=1\}}$ pour une fonction complémentante, (1) est une autre écriture de (2). Reste à montrer (2). Soient F et G deux faces complémentables de K. Posons $f = \alpha_F$ et $g = \alpha_G$; comme f et g sont majorées par 1, $h = \sup_a(f, g)$ existe. Posons $H = \{h = 1\}$ et $H_1 = \{h = 0\}$; manifestement, $H_1 = \{f = 0\} \cap \{g = 0\} = F' \cap G'$ et d'autre part, il est clair que $H \supset conv(F \cup G)$. On a vu avec le lemme 9, que $conv(F \cup G)$ est une face complémentable dont la face complémentaire est $F' \cap G'$; par définition, cela implique que $K = conv(conv(F \cup G) \cup (F' \cap G'))$ donc a fortiori que $K = conv(H \cup H_1)$. Par suite, comme $H \cap H_1 = \emptyset$, on déduit du corollaire 5 que $H = H_1' = conv(F \cup G)$. Ainsi la fonction h est complémentante et $h = \alpha_{conv(F \cup G)}$. Enfin comme $\inf_a(\alpha_F, \alpha_G) = 1 - \sup_a(\alpha_{F'}, \alpha_{G'})$, la seconde relation est une conséquence de la première, ce qui achève la démonstration de (2).

3. Les faces fermées d'un simplexe ou d'un cône réticulé de $\mathbb{S}$.

PROPOSITION 17. - Soit K un cône réticulé de $\mathbb{S}$. Alors, toute face conique fermée est complémentable.

Démonstration. - On sait (cf. p. 31 de [4]) que K est nécessairement complètement réticulé, de sorte que pour prouver l'assertion, il suffit de vérifier la caractérisation (b) de la proposition 7. Soit donc F une face conique fermée de K , M une partie de F et $m = \sup M$. Comme la face F est réticulée pour l'ordre induit par celui de K , on peut supposer que M est une partie de F filtrante vers le haut. Dans ce cas, la famille $s_y = (y + K) \cap F$, $(y \in M)$ est une base de filtre à laquelle m est adhérent. Par suite, $m \in F$.

COROLLAIRE 18. - Soit K un simplexe de $\mathbb{S}$. Alors toute face fermée de K est complémentable.

Démonstration. - On sait (cf. propriété B de l'appendice de [8]) que, si $\tilde{K}$ est un cône pointé de base K , $\tilde{K} \in \mathbb{S}$; de sorte que l'assertion est conséquence directe de la proposition précédente.

THÉORÈME 19. - Soient K un cône réticulé de $\mathbb{S}$, et F une face conique fermée de K . Alors toute fonction f de $L_s(F)^+$ se prolonge de manière unique en une fonction f de $L_s(K)^+$ nulle sur la face conique complémentaire F' de F .

Démonstration. - Soit $f \in L_s(F)^+$. Dans $K \times \underset{\sim}{R}$ considérons le cône

$$\Gamma_f = \{(x\ ,\ y) \in F \times \underset{\sim}{R}\ |\ \ y \leqslant f(x)\}\ ;$$

Γ_f est un cône convexe fermé ; par suite, il existe $\varphi \in \mathcal{L}_c(K)$ avec $\varphi \geqslant f$ sur F . De plus, du fait de la propriété C ([8], appendice), on peut choisir $\varphi \geqslant 0$ sur K . Cela étant, considérons les cônes fermés $\Gamma_\varphi = \{(x\ ,\ y) \in K \times \underset{\sim}{R}\ |\ \ y \leqslant \varphi(x)\}$ et $\Gamma = K \times \underset{\sim}{R}$. Comme $K \times \underset{\sim}{R}$ est faiblement complet, nous avons Γ_f , Γ_φ et $\Gamma \in \mathbb{S}$ et Γ_f , $\Gamma \subset \Gamma_\varphi$. Par suite de la propriété A ([8], appendice) il résulte que $C = \Gamma_f + \Gamma \in \mathbb{S}$. Par suite, c'est l'ensemble des points au dessous du graphe d'une fonction $\overline{f}$ sur-linéaire et s. c. s.

Si nous montrons que $\overline{f} = f \circ \pi_F$, le théorème sera démontré. D'abord comme $x = \pi_F(x) + (x - \pi_F(x))$, $(\forall\ x \in K)$ d'après la proposition 17, $(x\ ,\ f(\pi_F(x))) \in C$. Inversement, soit $(x\ ,\ y) \in C$. On peut écrire $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ avec $x_1 \in F$, $x_2 \in K$, $y_1 \leqslant f(x_1)$ et $y_2 \leqslant 0$. Comme $x_1 \in F$ avec $x_1 \leqslant x$, on a d'après la formule (8), $x_1 \leqslant \pi_F(x)$, donc $f(x_1) \leqslant f(\pi_F(x))$ puisque f est positive. Par suite C est bien l'ensemble des points au-dessous du graphe de la fonction $f \circ \pi_F$. Donc $\overline{f} = f \circ \pi_F$ et par suite, $f \circ \pi_F$ est s. c. s.

COROLLAIRE 20. - Sous les hypothèses du théorème 19, toute fonction f de $\mathcal{L}_c(K)^+$ peut s'écrire, de manière unique, comme différence $f = f_1 - f_2$ d'une fonction de $L_s(K)^+$ nulle sur F' et d'une fonction f_2 de $L_s(K)^+$ nulle sur F .

Démonstration. - On écrit $f = f \circ \pi_F + (f - f \circ \pi_F)$.

COROLLAIRE 21. - Si F est une face conique fermée d'un cône réticulé de $\mathcal{S}$ telle qu'il existe une fonction $f \in L_s(F)^+$ strictement positive sur $F \setminus \{0\}$, la face conique complémentaire F' de F est un G_δ de K .

Démonstration. - Considérons le prolongement $\overline{f}$ de f défini dans le théorème 19. On a $\overline{f} = f \circ \pi_F$; par suite, comme f est strictement positive sur $F \setminus \{0\}$, on a $F' = \{\overline{f} = 0\}$. Ainsi, comme $\overline{f}$ est s. c. s. sur K , F' est un G_δ de K .

Remarque. - La condition imposée à F dans le corollaire 21 peut s'exprimer de manière plus simple en disant qu'il existe une fonction $f \in E'$ (où E est un e. l. c. faible contenant K) strictement positive sur $F \setminus \{0\}$, ou mieux encore que le cône F a une base.

COROLLAIRE 22. - Soient K un simplexe de $\mathcal{S}$, et F une face de K . Alors,

(1) Toute fonction f de $A_s(F)^+$ se prolonge de manière unique en une fonction $\overline{f}$ de $A_s(K)^+$ nulle sur la face complémentaire F' de F .

(2) Toute fonction f de $\mathfrak{A}_c(K)^+$ peut s'écrire de manière unique comme différence $f = f_1 - f_2$ d'une fonction f_1 de $A_s(K)^+$ nulle sur F' et d'une fonction f_2 de $A_s(K)^+$ nulle sur F .

COROLLAIRE 23. - Pour toute face fermée F d'un simplexe K de $\mathcal{S}$, la fonction complémentante α_F associée à F est s. c. s., et la face complémentaire F' de F est un G_δ de K .

Démonstration. - Par le corollaire 22 prolongeons la fonction constante $f = 1$ définie sur F , en une fonction $\overline{f}$ de $A_s(K)^+$ nulle sur F' . Par construction, on a $\{\overline{f} = 1\} = F$ et $\{\overline{f} = 0\} = F'$, autrement dit $f = \alpha_F$; ainsi α_F est s. c. s. et F' est un G_δ de K .

REMARQUE 24. - On ignore si dans le cas le plus général un simplexe, et plus généralement un cône réticulé K de $\mathcal{S}$, a des faces fermées propres, c'est-à-dire distinctes de K ou de $\{0\}$. De sorte que la théorie qui vient d'être faite peut être vide. Toutefois elle ne l'est pas lorsque K est un simplexe compact ou un cône métrisable, et plus généralement lorsque K est bien coiffé.

Achevons ce paragraphe en indiquant, sans démonstration, quelques résultats sur le cas où la face complémentaire d'une face fermée est elle-même fermée.

PROPOSITION 25. - Soit K un cône réticulé de $\mathcal{S}$. Il est équivalent de dire pour une face conique fermée F de K que

(1) F' est fermée.

(2) Toute fonction $\mathcal{L}_c(F)$ se prolonge de manière unique en une fonction de $\mathcal{L}_c(K)$ nulle sur F'.

(3) L'application π_F de K sur F est continue.

COROLLAIRE 26. - Soit K un simplexe de $\mathcal{S}$. Il est équivalent de dire, pour une face fermée F de K que

(1) F' est fermée.

(2) Toute fonction de $\mathcal{A}_c(F)$ se prolonge de manière unique en une fonction de $\mathcal{A}_c(K)$ nulle sur F'.

(3) La fonction complémentante α_F associée à F est continue.

4. Faces complémentables dans les simplexes compacts.

DÉFINITION 27. - Soient X un ensemble et A une partie de l'espace $X^{\mathbb{R}}$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une partie F de X est A-exposée s'il existe $f \in A$ telle que $F = \{x \mid f(x) = \sup_X f\}$.

LEMME 28. - Soient K un simplexe compact et F une face $\mathcal{A}_{bar}(K)$-exposée de K. Alors, pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$, il est équivalent de dire,

(1) La résultante de μ est dans F.

(2) $\mu(F) = 1$.

Démonstration. - Soit $f \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ telle que $f \leqslant 1$ et $F = \{f = 1\}$. Si la mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$ est telle que $\mu(F) = 1$, on a, a fortiori, $\mu(f) = 1$, et comme f satisfait au calcul barycentrique, $\mu(f) = f(x) = 1$, où x est la résultante de μ.

Réciproquement, soit μ une mesure positive de résultante x dans F. Supposons que $\mu(F) < 1$, c'est-à-dire que μ n'est pas portée par l'ensemble des points où $f = 1$; alors, comme $f \leqslant 1$ partout, $\mu(f) < 1$. Ainsi on a $\mu(f) = f(x) < 1$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 29. - Toute face $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée d'un simplexe compact K est complémentable.

Démonstration. - Soit F une face $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée. Par l'isomorphisme (algébrique) $x \longmapsto \mu_x : K \to \mathcal{M}_1$, identifions F à $\mathcal{M}_1(F) = \{\mu \in \mathcal{M}_1 \mid \mu(F) = 1\}$, ce qui est possible, compte tenu du lemme précédent. Prolongeons cet isomorphisme en un isomorphisme qui conserve l'ordre de $\tilde{K}$ sur $\mathcal{M}$. Pour montrer que F est complémentable, il suffit de montrer que $\mathcal{M}(F) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda\mathcal{M}_1(F)$ est une face conique complémentable. Compte tenu de la proposition 7, il suffit de montrer que pour toute partie A de $\mathcal{M}(F)$, majorée dans $\mathcal{M}$, on a $a = \sup(A) \in \mathcal{M}(F)$. Comme $\mathcal{M}(F)$ est réticulé pour l'ordre induit par celui de $\mathcal{M}$, on peut supposer que A est filtrante croissante, Alors, comme $K \setminus F$ est universellement intégrable, on a

$$a(K \setminus F) = \sup_{\mu \in A} (\mu(K \setminus F)) \quad .$$

Donc, puisque $(\mu \in \mathcal{M}(F)) \Longleftrightarrow (\mu(K \setminus F) = 0)$, on a $a(K \setminus F) = 0$ soit $a \in \mathcal{M}(F)$.

LEMME 30 (ALFSEN). - Soient K un simplexe compact et F une face $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée. Alors,

$$(x \in F') \Longleftrightarrow (\mu_x(F) = 0) \quad .$$

Démonstration. - Supposons que $x \in F'$. D'après le lemme 28, $\mu_x(F) < 1$. Supposons que l'on ait $\mu_x(F) > 0$. Alors, nous pouvons considérer les mesures

$$\mu_1 = (\mu_x(F))^{-1} \mu_{x|F} \qquad \text{et} \qquad \mu_2 = (1 - \mu_x(F))^{-1} \mu_{x|K \setminus F} \quad .$$

μ_1 et μ_2 sont deux mesures maximales dont les résultantes y_1 et y_2 satisfont à la relation $x = \mu_x(F)y_1 + (1 - \mu_x(F))y_2$, où $y_1 \in F$ puisque $\mu_1(F) = 1$. Par suite $x \notin F'$, ce qui est absurde. Donc $(x \in F') \Longrightarrow (\mu_x(F) = 0)$.

Réciproquement, supposons que $x \notin F'$; alors $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ avec $x_1 \in F$, $x_2 \in F'$ et $\alpha_1 > 0$. Comme $\mu_x = \alpha_1 \mu_{x_1} + \alpha_2 \mu_{x_2}$, on a $\mu_x(F) \geqslant \alpha_1 \mu_{x_1}(F) = \alpha_1 > 0$. Ainsi nous avons bien $(\mu_x(F) = 0) \Longrightarrow (x \in F')$.

PROPOSITION 31. - Soit F une face $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée d'un simplexe compact K. Alors,

(1) $\alpha_F(x) = \mu_x(F)$, $(\forall\, x \in K)$.

(2) $\pi_F(x) =$ résultante de $\mu_{x|F}$, $(\forall\, x \in \tilde{K})$.

Démonstration. - Si $x \in F$ ou si $x \in F'$, les deux propriétés sont vraies, compte tenu du lemme 30. Si $x \in K \setminus (F \cup F')$, alors, toujours d'après ce lemme $0 < \mu_x(F) < 1$. Reprenant les mesures maximales μ_1 et μ_2 définies au cours de la démonstration de celui-ci, de résultantes respectives y_1 et y_2, nous avons $x = \mu_x(F)y_1 + (1 - \mu_x(F))y_2$, où $y_1 \in F$ et $y_2 \in F'$ puisque $\mu_1(F) = 1$ et $\mu_2(F) = 0$. L'unicité d'une telle décomposition permet de conclure.

REMARQUE 32. - Reprenant la notation $\wedge$ introduite dans la définition 43 de [8], nous avons sous les hypothèses de la proposition 31 :

$$\alpha_F = \wedge\,(1_F) \quad ,$$

où 1_F désigne la fonction caractéristique de F.

REMARQUE 33. - Il est naturel de se demander si l'ensemble des faces $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposées coïncide avec l'ensemble $\mathfrak{F}_c(K)$ des faces complémentables de K. Il n'en est rien, même si K est un simplexe de Bauer. Considérons par exemple

$$K = \mathfrak{M}_1^+([0\ ,\ 1]) \quad .$$

Prenons pour F le cône des mesures atomiques, c'est-à-dire des mesures portées par une partie dénombrable de $[0\ ,\ 1]$. F est un cône convexe héréditaire dans $\tilde{K}$, donc une face conique de $\tilde{K}$. Prenons pour F' le cône des mesures qui ne chargent aucun point. C'est aussi un cône convexe héréditaire dans $\tilde{K}$, donc une face conique de $\tilde{K}$. De plus $\tilde{K} = F + F'$ et $F \cap F' = \{0\}$; par suite, d'après le corollaire 5, F est complémentable et F' est la face complémentaire de F dans $\tilde{K}$. Soit $F_1 = F \cap K$ et soit $F'_1 = F' \cap K$. F_1 est une face complémentable de K, mais ce n'est pas une face $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée car toute fonction affine f sur K, satisfaisant au calcul barycentrique, et égale à 1 sur F_1, est égale à 1 sur K tout entier.

Dans la suite, les faces $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposées ne nous seront pas d'une grande utilité. D'abord, si F est une telle face nous ignorons si α_F est mesurable, a fortiori si α_F satisfait au calcul barycentrique. Ensuite, nous ignorons si F' est mesurable et surtout si toute mesure maximale est portée par $F \cup F'$. Ces deux problèmes sont d'ailleurs équivalents. Enfin nous ignorons si l'intersection de deux faces $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposées est encore $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée. C'est pourquoi dans la suite, nous nous restreindrons aux faces $\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)$-exposées qui, nous le verrons possèdent toutes ces propriétés.

THÉORÈME 34. - Soient K un simplexe compact et A un sous-cône convexe de

$\mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$, tel que

(1) $1 \in A$.

(2) $D \searrow (A) = A$.

(3) Si $f , g \in A$, alors $\sup_a(f , g) \in A$.

Alors, pour une face F de K , il est équivalent de dire

(a) F est A-exposée,

(b) $\alpha_F \in A$.

Démonstration. - Seule la relation (a) $\Longrightarrow$ (b) est à démontrer. Soit donc F une face A-exposée, cela veut dire qu'il existe $f \in A$ telle que $F = \{f = \sup_K f\}$. Comme $1 \in A$, on peut supposer que $\sup_K f = 0$. Considérons alors pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, $f_n = 1 + nf$ et $g_n = \sup_a(f_n , 0)$. Du fait des hypothèses faites sur A , nous avons f_n et $g_n \in A$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$. Soit alors $g = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (g_n)$; d'après la propriété (2) , $g \in A$. Cela étant, montrons que $g = \alpha_F$. D'après la proposition 31, cela revient à montrer que $g(x) = \mu_x(1_F)$, $(\forall\, x \in K)$. Dans ce but, posons

$$h_n = \sup(f_n , 0) \quad .$$

D'après la proposition 44 de [8], on a

$$g_n(x) = \mu_x(h_n) , \qquad (\forall\, x \in K)(\forall\, n \in \underset{\sim}{N}) \quad ;$$

de sorte que, puisque $\inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (h_n) = 1_F$,

$$g(x) = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (g_n(x)) = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (\mu_x(h_n)) = \mu_x(\inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (h_n)) = \mu_x(1_F) \quad .$$

C. Q. F. D.

Ce théorème ramène l'étude des faces A-exposées, où A satisfait à (1), (2) et (3) à celle des fonctions de $A \cap \mathfrak{A}_{conv}(K)$. Commençons par étudier le cas $A = \mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$ et regardons les propriétés de l'espace $\mathfrak{A}^{app}_{comp}(K) = \mathfrak{A}_{comp}(K) \cap \mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$ des fonctions complémentantes Ω-approchables.

LEMME 35.

(1) Si $f , g \in \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$, alors $\sup_a(f , g)$ et $\inf_a(f , g) \in \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$.

(2) $D \nearrow (\mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)) = \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$.

(3) $D \searrow (\mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)) = \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$.

Démonstration.

(1). C'est une conséquence directe de la proposition 16 et du théorème 40 de [8].

(2) et (3). D'abord, comme $(f \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)) \iff ((1-f) \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K))$, (2) et (3) sont équivalents. Montrons (3). Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions de $\mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)$ et soit $f = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (f_n)$. Posons $F_n = \{f_n = 1\}$ et $F = \{f = 1\}$; on a $F = \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n$, par suite comme chaque F_n est complémentable par hypothèse, F est complémentable. Pour montrer que f est complémentante, il reste à voir que $F' = \{f = 0\}$. D'abord, il est clair que $\{f = 0\} \subset F'$, puisque $\{f = 0\}$ est une face disjointe de F . Inversement, montrons que si $x \in F'$, on a $f(x) = 0$. Pour un $x \in K$, soit $x = \mu_x(F_n)x_n + (1 - \mu_x(F_n))y_n$ l'écriture de x comme combinaison convexe d'un point $x_n \in F_n$ et d'un point $y_n \in F'_n$ (cf. propositions 14 et 31). Par définition de f_n , on a $\mu_x(f_n) = \mu_x(F_n)$. Ainsi, on a

$$f(x) = \mu_x(f) = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (\mu_x(f_n)) = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (\mu_x(F_n)) = \mu_x(F) .$$

Ainsi, si $x \in F'$, on a $\mu_x(F) = 0$ d'après le lemme 30 et par suite $f(x) = 0$.

LEMME 36. - <u>Soit</u> (f_n) <u>une suite de fonctions de</u> $\mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)$. <u>Alors</u>,

$$\sup_a(f_n \ , \ n \in \underset{\sim}{N}) \ \underline{\text{et}} \ \inf_a(f_n \ , \ n \in \underset{\sim}{N}) \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K) .$$

<u>Démonstration</u>. - Posons $\varphi_n = \sup_a(f_0 , f_1 , \ldots , f_n)$. D'après (1) du lemme précédent, $\varphi_n \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$; par suite, d'après le (3) de ce lemme on voit que $\sup_a(f_n , n \in \underset{\sim}{N}) = \sup_{n \in \underset{\sim}{N}} (\varphi_n) \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)$. Pour démontrer que $\inf_a(f_n , n \in \underset{\sim}{N}) \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)$, on reprend ce qui vient d'être dit en remplaçant sup par inf .

PROPOSITION 37. - <u>Soient</u> K <u>un simplexe compact et</u> (F_n) <u>une suite de faces</u> $\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)$-<u>exposées. Alors</u>,

(1) <u>Si</u> $F = \bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n$, <u>on a</u> $\alpha_F = \inf_a(\alpha_{F_n} , n \in \underset{\sim}{N})$.

(2) <u>Si</u> G <u>est la plus petite face complémentable contenant</u> $\bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n$,

$$\alpha_G = \sup_a(\alpha_{F_n} , n \in \underset{\sim}{N}) .$$

<u>Démonstration</u>.

(1). Puisque les faces F_n sont $\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)$-exposées, $\alpha_{F_n} \in \mathfrak{a}^{app}_{comp}(K)$, $(\forall n \in \underset{\sim}{N})$.

Par suite, d'après le lemme 36, $f = \inf_a(\alpha_{F_n}, n \in \underset{\sim}{N}) \in \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$. On a donc $f = \alpha_H$ pour une certaine face complémentable H . Comme $F \subset F_n$, $\alpha_F \leqslant \alpha_{F_n}$, $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$, par suite $\alpha_F \leqslant \alpha_H$, donc $F \subset H$. Mais inversement $\alpha_H \leqslant \alpha_{F_n}$, $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$ donc $H \subset F_n$, $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$, par suite $H \subset F$. Finalement $H = F$ et $f = \alpha_F = \alpha_H$.

(2). Comme en (1), on déduit du lemme 36 que $f = \sup_a(\alpha_{F_n}, n \in \underset{\sim}{N}) \in \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$. On a donc $f = \alpha_H$ pour une certaine face complémentable H . Comme $\alpha_H \geqslant \alpha_{F_n}$, $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$, $H \supset \bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n$. Inversement soit G la plus petite face complémentable contenant $\bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n$. On a $G \supset F_n$, donc $\alpha_G \geqslant \alpha_{F_n}$ pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, ainsi $\alpha_G \geqslant \alpha_H$, ou en d'autre termes, $G \supset H$. Par suite, $G = H$ et $\alpha_G = \alpha_H = f$.

THÉORÈME 38. - <u>Soient</u> K <u>un simplexe compact et</u> A <u>un cône convexe de fonctions Ω-approchables tel que</u>

(1) $1 \in A$.

(2) $D(A) = A$.

(3) <u>Si</u> $f, g \in A$, $\sup_a(f, g) \in A$ <u>et</u> $\inf_a(f, g) \in A$.

<u>Alors, la famille</u> $\mathfrak{F}(A)$ <u>des faces</u> A-<u>exposées vérifie les propriétés suivantes</u> :

(a) <u>Si</u> (F_n) <u>est une suite de faces de</u> $\mathfrak{F}(A)$, <u>on a</u> $\bigcap_{n \in N} F_n \in \mathfrak{F}(A)$.

(b) <u>Si</u> $F_1, \dots, F_n \in \mathfrak{F}(A)$, <u>alors</u> $\mathrm{conv}(\bigcup_{k \leqslant n} F_k) \in \mathfrak{F}(A)$.

(c) <u>Si</u> (F_n) <u>est une suite de faces de</u> $\mathfrak{F}(A)$, <u>et si</u> F <u>est la plus petite face complémentable contenant</u> $\bigcup_{n \in N} F_n$, $F \in \mathfrak{F}(A)$.

<u>De plus, si</u> A <u>est un espace vectoriel, on a</u>

(d) <u>Si</u> $F \in \mathfrak{F}(A)$, <u>alors</u> $F' \in \mathfrak{F}(A)$.

<u>Démonstration</u>. - Considérons $A_1 = A \cap \mathfrak{A}_{comp}(K)$. D'après le théorème 34, $\mathfrak{F}(A)$ coïncide avec l'ensemble des faces A_1-exposées. D'après le lemme 35, on a

$$D_{\searrow}(A_1) = D_{\nearrow}(A_1) = A_1 \quad ,$$

par suite, de la proposition 37 et de la propriété (3), il résulte que $\mathfrak{F}(A)$ vérifie (a) et (c). Quant à la propriété (b), elle apparaît comme un cas particulier de (c) du fait de la proposition 12(b). Enfin, si A est un espace vectoriel, (d) est naturellement vrai à cause de la relation $\alpha_{F'} = 1 - \alpha_F$, vraie pour toute face complémentable F de K .

REMARQUE 39.

(a) Si dans le théorème 38, on remplace la propriété (3) par la propriété plus faible (3'). Si f , $g \in A$, alors $\sup_a(f , g) \in A$, la famille $\mathfrak{F}(A)$ ne vérifie plus la propriété (a), à moins que la suite ne soit décroissante. Si en outre, on affaiblit la condition (2) en (2'), $D \nearrow (A) = A$, alors la propriété (a) ne subsiste plus du tout.

(b) Au lieu de se donner un cône convexe de fonctions Ω-approchables, on pourrait se donner directement un sous-espace de $\mathcal{C}^{app}_{comp}(K)$ satisfaisant à (1), (2) et (3). On verrait que la famille $\mathfrak{F}(A)$ vérifie encore les propriétés (a), (b) et (c).

(c) Il est en général faux que, dans la propriété (c) du théorème 48, on ait $F = \operatorname{conv}(\bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n)$. Prenons par exemple $K = \mathcal{M}_1^+([0 , 1])$ et $F_n = \mathcal{M}_1^+(\{0\} \cup [1/n , 1])$. On a $F'_n \equiv \{\mu \in K \mid \mu(]0 , 1/n[) = 1\}$; donc $\bigcap_{n \in N} F'_n = \emptyset$. En d'autres termes, la plus petite face complémentable contenant $\bigcup_{n \in N} F_n$ est K tout entier. Cependant, on a $K \neq \operatorname{conv}(\bigcup_{n \in \underset{\sim}{N}} F_n)$, car, par exemple, ce dernier ensemble ne contient pas la mesure de Lebesgue sur $[0 , 1]$.

Indiquons quelques cas d'application du théorème 38.

- Prenons $A = A_s^{\Omega}(K)$. Dans ce cas, $\mathfrak{F}(A)$ est formé d'ensemble boréliens de classe α-multiplicative pour α ordinal dénombrable pair quelconque (soit F , $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma\delta}$, etc.) . La famille $\mathfrak{F}^c(A)$ des faces complémentaires de faces de $\mathfrak{F}(A)$ vérifie naturellement les propriétés (a), (b) et (c), et $\mathfrak{F}^c(A)$ est formé d'ensembles boréliens de classe α-multiplicative pour α ordinal dénombrable impair quelconque (soit G_δ , $G_{\delta\sigma\delta}$, etc.).

- Prenons $A = \mathcal{C}^{\Omega}_{app}(K)$. Dans ce cas, $\mathfrak{F}(A)$ est formé d'ensemble universellement mesurables et satisfait aux propriétés (a), (b), (c) et (d).

- Supposons maintenant que K soit un simplexe analytique ([11], p. 28 et suivantes). Prenons pour A le plus petit espace de fonctions affines contenant l'espace $A_c(K)$ des fonctions affines continues et stable par limite simple. D'après le théorème 60 de [11] et la proposition 44 de [8], A est réticulé pour l'ordre usuel et la borne supérieure $f \underset{A}{\vee} g$ de deux fonctions de A n'est autre que $\sup_a(f , g)$. $\mathfrak{F}(A)$ vérifie donc les propriétés (a), (b), (c), (d) du théorème 38. Dans ce cas, $\mathfrak{F}(A)$ est formé d'ensembles de Baire. $\mathfrak{F}(A)$ contient en particulier l'ensemble des faces fermées de K qui sont **un** G_δ ([9], corollaire 7.12). En appliquant ces résultats à un simplexe métrisable, on trouve le théorème 3 de [2].

- Supposons de nouveau que K est un simplexe compact quelconque. Nous allons déterminer explicitement la plus petite famille de faces complémentables satisfaisant aux propriétés (a), (b) et (c) et contenant les faces fermées de K. Pour ce faire, nous ferons appel à la remarque 39(b).

Définissons par récurrence transfinie les ensembles $A^{\alpha}_{comp,s}$ comme suit :

$$A^{0}_{comp,s} = \mathfrak{A}_{comp}(K) \cap A^{0}_{s}(K) \quad ,$$

puis pour α ordinal dénombrable pair :

$$A^{\alpha}_{comp,s} = D \searrow \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} A^{\beta}_{comp,s} \Big) \quad ,$$

$$A^{\alpha+1}_{comp,s} = D \nearrow (A^{\alpha}_{comp,s}) \quad ,$$

puis

$$A^{\Omega}_{comp,s} = \bigcup_{\alpha<\Omega} A^{\alpha}_{comp,s} \quad .$$

Il est facile de voir, par récurrence tranfinie que $A^{\Omega}_{comp,s}$ est réticulé pour l'ordre usuel et que la borne supérieure de deux éléments f et g de $A^{\Omega}_{comp,s}$ n'est autre que $\sup_a(f , g)$. De plus, $A^{\Omega}_{comp,s}$ est stable par limite simple. Enfin, puisque $A^{0}_{comp,s} \subset \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$, il résulte du lemme 35 que $A^{\Omega}_{comp,s} \subset \mathfrak{A}^{app}_{comp}(K)$. Donc $\mathfrak{F}(A^{\Omega}_{comp,s})$ vérifie les propriétés (a), (b) et (c).du théorème 38. D'après le corollaire 23, $\mathfrak{F}(A^{0}_{comp,s})$ est exactement l'ensemble des faces fermées de K. Par suite, d'après la proposition 37, $\mathfrak{F}(A^{1}_{comp,s})$ est le plus petit ensemble de faces complémentables contenant $\mathfrak{F}(A^{0}_{comp,s})$ et vérifiant la propriété (c) ; de même $\mathfrak{F}(A^{2}_{comp,s})$ est le plus petit ensemble de faces complémentables contenant $\mathfrak{F}(A^{1}_{comp,s})$ et vérifiant la propriété (a). Par récurrence transfinie, on voit que

- $\mathfrak{F}(A^{\Omega}_{comp,s})$ est le plus petit ensemble $\mathfrak{F}$ de faces complémentables contenant les faces fermées et vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) Si $F_1 , \dots , F_n , \dots \in \mathfrak{F}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathfrak{F}$.

(b) Si $F_1 , \dots , F_n , \dots \in \mathfrak{F}$, et si F est la plus petite face complémentable contenant $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, $F \in \mathfrak{F}$.

De plus, si $F \in \mathfrak{F}(A^{\alpha}_{comp,s})$, F est borélien de classe α-multiplicative (resp. $(\alpha + 1)$-multiplicative) si α est pair (resp. impair).

5. Points extrémaux et faces complémentables.

LEMME 40. - *Soient* K *un simplexe et* $\mathfrak{F}_c(K)$ *la famille des faces complémentables de* K . *On a les propriétés suivantes* :

(a) *Si* $F \in \mathfrak{F}_c(K)$,

$$\mathcal{E}(F') = F' \cap \mathcal{E}(K) = (K \setminus F) \cap \mathcal{E}(K) \quad .$$

(b) *Si* $(F_i)_{i \in I}$ *est une famille de faces de* $\mathfrak{F}_c(K)$ *et si* $F = \bigcap_{i \in I} F_i$,

$$\mathcal{E}(F) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}(F_i) \quad .$$

(c) *Si* $(F_i)_{i \in I}$ *est une famille de faces de* $\mathfrak{F}_c(K)$ *et si* F *est la plus petite face de* $\mathfrak{F}_c(K)$ *contenant* $\bigcup_{i \in I} F_i$,

$$\mathcal{E}(F) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}(F_i) \quad .$$

Démonstration. - D'abord on sait que si F est une face d'un simplexe K , $\mathcal{E}(F) \subset \mathcal{E}(K)$, donc $\mathcal{E}(F) = F \cap \mathcal{E}(K)$. Montrons la deuxième égalité de (a), d'abord $F' \cap \mathcal{E}(K) \subset (K \setminus F) \cap \mathcal{E}(K)$. Inversement, si $x \in (K \setminus F) \cap \mathcal{E}(K)$, $\{x\}$ est une face disjointe de F , donc $x \in F' \cap \mathcal{E}(K)$. Montrons (b). On a

$$\mathcal{E}(F) = \mathcal{E}(K) \cap F = \mathcal{E}(K) \cap (\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{E}(K) \cap F_i) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}(F_i) \quad .$$

Montrons (c). Si F_i' dénote la face complémentaire de F_i , $\bigcap_{i \in I} F_i'$ est la plus grande face complémentable disjointe de F_i . Donc $(\bigcap_{i \in I} F_i')' = F$. Par suite,

$$\mathcal{E}(F) = \mathcal{E}(K) \cap (K \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i')) = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{E}(K) \cap F_i) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{E}(F_i) \quad .$$

COROLLAIRE 41. - *Sous les hypothèses du théorème* 38, *la famille* $\mathcal{E}(K) \cap \mathfrak{F}(A)$ *des traces sur* $\mathcal{E}(K)$ *des faces* A-*exposées est stable par réunion et intersection dénombrables. De plus, si* A *est un espace vectoriel* $\mathcal{E}(K) \cap \mathfrak{F}(A)$ *est stable par passage au complémentaire ; c'est donc une tribu.*

Il est naturel de se demander si la connaissance de la trace d'une face détermine entièrement celle-ci. Pour cela il faut que K ait "suffisamment" de points extrémaux comme le suggère la proposition suivante :

PROPOSITION 42. - *Soit* K *un simplexe compact. Il est équivalent de dire,*

(a) $(f , g \in \mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$ *et* $f = g$ *sur* $\mathcal{E}(K)) \Longrightarrow (f = g)$.

(b) Si A est une partie de $\mathcal{E}(K)$, il existe au plus une face $\mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$-exposée telle que $F \cap \mathcal{E}(K) = A$.

(c) Si F est une face $\mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$-exposée telle que $F \supset \mathcal{E}(K)$, alors $F = K$.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Supposons qu'on ait deux faces $\mathcal{A}^{\Omega}_{app}$-exposées F_1 et F_2 telles que $F_1 \cap \mathcal{E}(K) = F_2 \cap \mathcal{E}(K) = A$. Alors, les fonctions α_{F_1} et α_{F_2} , qui sont Ω-approchables, sont telles que $\alpha_{F_1} = \alpha_{F_2} = 1$ sur A et $\alpha_{F_1} = \alpha_{F_2} = 0$ sur $\mathcal{E}(K) \setminus A$. D'après (a), on a $\alpha_{F_1} = \alpha_{F_2}$, donc $F_1 = F_2$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) est évident en prenant $A = \mathcal{E}(K)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a). Soient f , $g \in \mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$ telles que $f = g$ sur $\mathcal{E}(K)$. Alors $h = f - g \in \mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$ est nulle sur $\mathcal{E}(K)$. Montrons qu'elle est identiquement nulle. Soit $h_1 = \sup_a(0 , h)$. On a $h_1 \in \mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$, $h_1 = 0$ sur $\mathcal{E}(K)$ et $h_1 \geqslant 0$ partout. Donc $F_1 = h_1^{-1}(0)$ est une face $\mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$-exposée telle que $F_1 \supset \mathcal{E}(K)$. Donc $F_1 = K$ et $h_1 = 0$. On montrerait de même que $h_2 = \inf_a(h , 0) = 0$. Donc $h = 0$ et $f = g$.

PROPOSITION 43. - Soit K un simplexe compact tel que $\mathcal{A}_{app}(K) = \mathcal{A}_{bar}(K)$. Alors, on a les propriétés suivantes, d'ailleurs équivalentes :

(a) $(f , g \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ et $f = g$ sur $\mathcal{E}(K)) \Longrightarrow (f = g)$.

(b) Si A est une partie de $\mathcal{E}(K)$, il existe au plus une face $\mathcal{A}_{bar}(K)$-exposée F telle que $F \cap \mathcal{E}(K) = A$.

Démonstration. - L'équivalence de (a) et (b) résulte de la proposition précédente. Montrons (a). Soient f et $g \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ avec $f = g$ sur $\mathcal{E}(K)$. Soit $h = f - g$. On a $h \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ et $h = 0$ sur $\mathcal{E}(K)$. Considérons comme dans la proposition précédente, $h_1 = \sup_a(h , 0)$. Puisque $\mathcal{A}_{bar}(K) = \mathcal{A}_{app}(K)$, $h_1 \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ et $h_1 = \sup\{\ell \in A_s(K) \mid \ell \leqslant h_1\}$. Or si $\ell \leqslant h_1$, $\ell \leqslant 0$ sur $\mathcal{E}(K)$ donc $\ell \leqslant 0$ sur K . Par suite, $h_1 = 0$. On montrerait de même que $h_2 = \inf_a(h , 0) = 0$. Donc $h = 0$.

Avant d'énoncer le corollaire suivant, rappelons qu'un bon simplexe ([8], définition 34) est un simplexe compact dont l'ensemble des points extrémaux est universellement mesurable et pour lequel toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}(K)$.

COROLLAIRE 44. - Si K est un bon simplexe, l'application $F \to F \cap \mathcal{E}(K)$ est une bijection de l'ensemble des faces $\mathcal{A}_{bar}$-exposées sur l'ensemble des parties universellement mesurables de $\mathcal{E}(K)$.

Démonstration. - D'après le théorème 36 de [8], on sait qu'un bon simplexe est tel que $\mathfrak{a}_{app}(K) = \mathfrak{a}_{bar}(K)$. Par suite, d'après la proposition précédente, $F \to F \cap \mathcal{E}(K)$ est une injection de l'ensemble des faces $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposées dans l'ensemble des parties universellement mesurables de $\mathcal{E}(K)$. Réciproquement, soit A une partie universellement mesurable de $\mathcal{E}(K)$ et soit f l'application $x \to \mu_x(1_A) : K \to [0 , 1]$. Naturellement, f est affine. De plus, si μ est une mesure maximale, on a $\mu(f) = \mu(f|_{\mathcal{E}(K)}) = \mu(1_{A|\mathcal{E}(K)}) = \mu(1_A)$. En d'autre termes f est intégrable pour toute mesure maximale et satisfait au calcul barycentrique pour toute mesure maximale. Alors, d'après la remarque 32(b) de [8], $f \in \mathfrak{a}_{bar}(K)$; enfin, on a $\{f = 1\} = A$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 45.

(a) Même lorsque K a une structure très régulière, par exemple lorsque K est un simplexe de Bauer, une face complémentable qui n'est pas $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposée, n'est pas uniquement déterminée par sa restriction à $\mathcal{E}(K)$. L'exemple de la remarque 33 est particulièrement instructif à cet égard. On a pris $K = \mathfrak{M}_1^+([0 , 1])$ et $F = \{\mu \in K$ ne changeant aucun point de $[0 , 1]\}$. Alors F' est la face formée des mesures atomiques ; $\alpha_{F'}$ est l'application qui à μ fait correspondre la masse totale de sa partie atomique. On sait (cf. [5]) que $\alpha_{F'}$ est de 2-ième classe de Baire, de manière précise $\alpha_{F'}$ est la limite d'une suite croissante de fonctions s. c. s. On a $\alpha_{F'} = 1$ sur $\mathcal{E}(K)$ bien que $\alpha_{F'} \neq 1$ sur K . Ainsi on a $F' \supset \mathcal{E}(K)$ et $F' \not\supseteq K$, bien que F' ait une structure borélienne très forte puisque c'est un $F_{\sigma\delta}$.

(b) Les propriétés d'unicité que donnent les bons simplexes ont été remarquées indépendamment de ce travail par ROGALSKI ([11], p. 34 et suivantes).

(c) Indiquons quelques traces de faces $\mathfrak{a}_{bar}(K)$-exposées. D'abord, la trace de toute tranche fermée est la trace d'une face $(- A_s(K))$-exposée. En effet, soit $T = \{f \geq \alpha\}$, avec $f \in \mathfrak{a}_c(K)$ une telle tranche et soit $f_1 = \inf_a(\alpha , f)$; on sait que $f_1 \in - A_s(K)$ et la face $\{f_1 = \alpha\}$ a naturellement pour trace $T \cap \mathcal{E}(K)$. Par suite (cf. démonstration du théorème 34) la trace d'une tranche ouverte est la trace d'une face $(D \searrow (A_s(K))$-exposée. On en déduit que la trace sur $\mathcal{E}(K)$ de tout sous-convexe fermé de K qui est un G_δ de K est la trace d'une face $(- A_s^1(K))$-exposée. Lorsque K est un simplexe métrisable, on en déduit que $F \to F \cap \mathcal{E}(K)$ est une bijection de l'ensemble des faces $A_s^\Omega(K)$-exposées sur l'ensemble des boréliens de $\mathcal{E}(K)$ (notons que dans ce cas, $A_s^\Omega(K)$ est le plus petit espace de fonctions affines stable par limite simple de suites contenant $\mathfrak{a}_c(K)$); on retrouve ainsi la seconde partie du théorème 3 de [2].

Terminons par un résultat sur la localisation des mesures maximales au moyen de faces lorsque K est un simplexe pour lequel toute fonction satisfaisant au calcul barycentrique est approchable.

PROPOSITION 46. - Soit K un simplexe compact tel que $\mathcal{A}_{app}(K) = \mathcal{A}_{bar}(K)$. Alors, pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) μ est maximale ;

(b) Pour toute famille (F_n) de faces $\mathcal{A}_{bar}(K)$-exposées telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \supset \mathcal{E}(K)$, μ est portée par $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

(c) Pour toute famille finie $F_1 , \dots , F_n$, de faces $(- A_s(K))$-exposées, telle que $\bigcup_{k\leqslant n} F_n \supset \mathcal{E}(K)$, μ est portée par $\bigcup_{k\leqslant n} F_k$.

Démonstration.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Soit (F_n) une famille de faces $\mathcal{A}_{bar}(K)$-exposées. On sait que $\alpha_{F_n} \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ (théorème 34). Donc $\alpha = \sup_a(\alpha_{F_n} , n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{A}_{bar}(K)$. Comme $\alpha = 1$ sur $\mathcal{E}(K)$, on a $\alpha = 1$ partout d'après la proposition 43. De plus, d'après la formule 50 de [8], on a

$$1 = \mu(\alpha) = \mu(\sup_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_{F_n})) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\mu(\sup_{m\leqslant n} (\alpha_{F_m})) \quad .$$

Mais, comme μ est maximale, on a $\mu(\sup_{m\leqslant n} (\alpha_{F_m})) = \mu(\bigcup_{m\leqslant n} F_m)$, donc finalement $1 = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n)$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) est naturel. Montrons (c) $\Longrightarrow$ (a). Rappelons qu'une mesure μ est maximale si, et seulement si, μ est portée par tout ensemble bordant $\{g = \hat{g}\}$ où g est de la forme $g = \sup(f_1 , \dots , f_n)$ avec $f_1 , \dots , f_n \in \mathcal{A}_c(K)$. Explicitons l'ensemble bordant $\{g = \hat{g}\}$. Nous avons vu ([8], remarque 19) que $\hat{g} = \sup_a(f_1 , \dots , f_n)$, de sorte que

$$\{g - \hat{g}\} = \{(\sup_a(f_1 , \dots , f_n) - \sup(f_1 , \dots , f_n)) = 0\} \quad ,$$

soit

$$\{g - \hat{g}\} = \bigcup_{k\leqslant n} \{(\sup_a(f_1 , \dots , f_n) - f_k) = 0\} \quad .$$

Or, $F_k = \{(\sup_a(f_1 , \dots , f_n) - f_k) = 0\}$ est une face $(- A_s(K))$-exposée. Ainsi, tout ensemble bordant du type considéré est une réunion finie de faces $(- A_s(K))$-exposées. Donc si μ vérifie (c), μ est portée par tout ensemble bordant, donc μ est maximale.

REMARQUE 47. - Il ressort de la démonstration que les implications (a) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftarrow$ (b) sont vraies pour un simplexe compact quelconque.

Index des notations et définition

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALFSEN (Erik M.). - On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces, Math. Scand., t. 17, 1965, p. 169-176.

[2] ALFSEN (Erik M.). - A note on the Borel structure of a metrisable Choquet simplex and its extreme boundary, Math. Scand., t. 19, 1966, p. 161-171.

[3] BISHOP (Erret) and LEEUW (Karel de). - The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 305-331.

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Eléments de mathématiques. Livre 6 : Intégration, chap. 1 à 4, 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[5] CHOQUET (Gustave). - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 6e année, 1961/62, n° 8, 13 p.

[6] Colloquium on Convexity, Proceeding of the colloquium on convexity [1965. Kobenhavn]. - Kobenhavn, Kobenhavns Universitets matematiske Institut, 1967.

[7] GOULLET de RUGY (Alain). - Quelques propriétés des fonctions numériques linéaires et semi-continues sur un cône convexe saillant faiblement complet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, série A, 1967, p. 841-844.

[8] GOULLET de RUGY (Alain). - Caractère réticulé de certains cônes de fonctions linéaires sur un cône convexe décomposable, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 5, 24 p.

[9] GOULLET de RUGY (Alain). - Géométrie des simplexes. - C. D. U. Paris (à paraître).

[10] ROGALSKI (Marc). - Opérateurs simpliciaux, structure borélienne des simplexes, simplexes analytiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, série A, 1967, p. 610-613.

[11] ROGALSKI (Marc). - Opérateurs de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques. Cours de la Faculté des Sciences d'Orsay, 1967/68.