SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

ALAIN GOULLET DE RUGY

Caractère réticulé de certains cônes de fonctions linéaires sur un cône convexe décomposable

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. nº 5, p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A5_0>

18 janvier 1968

CARACTÈRE RÉTICULÉ DE CERTAINS CÔNES DE FONCTIONS LINÉAIRES SUR UN CÔNE CONVEXE DÉCOMPOSABLE

par Alain GOULLET de RUGY

1. Introduction.

Soit K un cône convexe réticulé ou seulement décomposable (c'est-à-dire vérifiant seulement la propriété de décomposition de Riesz [1], p. 19). Soit $\mathcal{L}(K)$ l'espace des fonctions linéaires de K dans $\underline{R}$. Si f, g et $h \in \mathcal{L}(K)$ et si $f , g \leqslant h$, il existe une plus petite fonction de $\mathcal{L}(K)$, que nous convenons de noter $\sup_a(f , g)$, qui majore f et g. Cette fonction est donnée explicitement par la formule suivante :

$$\text{(0)} \qquad \sup_a(f , g)(x) = \sup\{\sum_i \sup(f , g)(x_i) \mid (x_i) \in \Sigma_x\} ,$$

où Σ_x est l'ensemble des suites finies (x_i) de points de K, dont la somme, $\sum_i x_i$ est égale à x.

Le travail qui suit a pour but de mettre en évidence, lorsque $K \in \mathcal{S}$, (c'est-à-dire lorsque K est saillant et faiblement complet ; cf. Appendice), le caractère réticulé de certains espaces de fonctions linéaires boréliennes de Baire sur K, ordonnés pour l'ordre usuel. Ces espaces auront la propriété que la borne supérieure de deux fonctions f et g ne sera autre que leur "sup affine", $\sup_a(f , g)$. On déduira de cette étude des résultats analogues pour des espaces de fonctions affines sur un simplexe appartenant à $\mathcal{S}$, et, en particulier, pour un simplexe compact.

Dans un simplexe compact K, nous étudierons l'espace $\mathfrak{a}_{bar}(K)$ des fonctions satisfaisant au calcul barycentrique, c'est-à-dire des fonctions telles que

$$f(x) = \mu(f) ,$$

pour tout x dans K et toute mesure de Radon sur K de résultante x. Dans des cas assez étendus, comprenant en particulier les simplexes métrisables, nous verrons que cet espace est réticulé pour l'ordre usuel, et que la borne supérieure de deux fonctions pour cet ordre coïncide encore avec le "sup affine". Dans le cas d'un simplexe compact quelconque, nous serons amenés à considérer un sous-espace de $\mathfrak{a}_{bar}(K)$ suffisamment grand pour contenir tous les espaces de fonctions affines considérés jusqu'à présent, et qui sera réticulé pour l'ordre usuel. Ce sera l'espace des fonctions Ω-approchables (définition 33). On verra que cet espace est stable par limite simple de suites. Ces propriétés en feront un outil très utile pour l'étude des faces complémentables d'un simplexe, étude qui sera décrite dans un travail ultérieur.

Nous supposerons connus les notations et les résultats usuels relatifs aux convexes et aux simplexes compacts : notations $\hat{f}$, $\check{f}$, définition de l'ordre de Choquet, d'une mesure maximale, le théorème de représentation intégrale, etc. (voir [5] ou l'appendice 1 de [9]). Par contre, à la fin de ce papier, nous avons mis un appendice rappelant quelques résultats, généralement moins connus, relatifs aux convexes faiblement complets. Nous nous y réfèrerons par "propriété A, B, C ou D".

2. Résultats préliminaires.

DÉFINITION 1. - Soient X un ensemble, A une partie de $\mathfrak{F}(X , \underset{\sim}{R})$. Nous appellerons ordre usuel (pour un espace de fonctions à valeurs dans $\underset{\sim}{R}$), l'ordre

$$f \geq g \iff (f(x) \geq g(x) , \forall x \in K) .$$

Lorsque A est un espace vectoriel, cet ordre est aussi l'ordre induit dans A par le cône

$$A^+ = \{f \in A \mid f(x) \geq 0 , \forall x \in K\} .$$

Si f et $g \in A$, nous noterons $f \underset{A}{\vee} g$ la borne supérieure, lorsqu'elle existe, de f et g pour l'ordre usuel.

LEMME 2. - Soit K un cône convexe décomposable. Soit L un sous-cône convexe de $\mathfrak{L}(K)$ semi-réticulé supérieurement pour l'ordre usuel.

On suppose que la borne supérieure $f \underset{L}{\vee} g$ de deux fonctions f et g de L coïncide avec leur borne supérieure $\sup_a(f , g)$ dans $\mathfrak{L}(K)$. Alors $\mathfrak{L} = L - L$ est réticulé pour l'ordre usuel et de plus

$$f \underset{\mathfrak{L}}{\vee} g = \sup_a(f , g) \qquad (\forall f , g \in \mathfrak{L}) . \tag{3}$$

Démonstration. - Soient f et $g \in \mathfrak{L}$. f et g peuvent s'écrire $f = \ell_1 - \ell_2$, $g = \ell_1' - \ell_2'$ avec ℓ_i et $\ell_i' \in L$ $(i = 1 , 2)$. Considérons

$$h = (\ell_1 + \ell_2') \underset{L}{\vee} (\ell_1' + \ell_2) - (\ell_2' + \ell_2) .$$

Par définition, $h \in \mathfrak{L}$. De plus, comme $(\ell_1 + \ell_2')$ et $(\ell_1' + \ell_2) \in L$, puisque L

est convexe, on a, en fait :

$$h = \sup_a(\ell_1 + \ell'_2 , \ell'_1 + \ell_2) - (\ell'_2 + \ell_2)$$
$$= \sup_a(f , g) .$$

On conclut que la borne supérieure de f et g dans $\mathcal{L}(K)$ est en fait la borne supérieure de f et g dans $\mathcal{L}$, ce qui est exactement le résultat cherché.

LEMME 4. - Soit K un cône convexe, et soient f_j , g_j $(1 \leqslant j \leqslant 2)$, des fonctions de $\mathcal{L}(K)$ telles que $f_j \leqslant g_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 2)$. Supposons que, pour un $x \in K$ et un $\varepsilon > 0$ donnés, on ait

$$g_j(x) - f_j(x) < \varepsilon \qquad (j = 1 , 2) ,$$

alors, pour toute suite (x_i) de points de K telle que $\sum_i x_i = x$

(5) $$\sum_i \sup(g_1 , g_2)(x_i) - \sum_i \sup(f_1 , f_2)(x_i) < 2\varepsilon .$$

Démonstration. - Notons $f = \sup(f_1 , f_2)$, $g = \sup(g_1 , g_2)$. Puisque $g_j - f_j \geqslant 0$ et $g_j(x) - f_j(x) < \varepsilon$, on a

$$0 \leqslant \sum_i g_j(x_i) - \sum_i f_j(x_i) = g_j(x) - f_j(x) < \varepsilon \qquad (j = 1 , 2) .$$

Pour montrer (5), il suffit donc, de montrer :

(6) $$0 \leqslant g(x_i) - f(x_i) \leqslant \sup(g_1 - f_1)(x_i) , (g_2 - f_2)(x_i)) .$$

Il y a quatre cas à considérer, suivant que

$$g(x_i) = \left| \begin{array}{ll} g_1(x_i) & (\alpha) \\ g_2(x_i) & (\beta) \end{array} \right. ; \qquad f(x_i) = \left| \begin{array}{ll} f_1(x_i) & (\gamma) \\ f_2(x_i) & (\delta) \end{array} \right. .$$

Les cas (α) et (γ) ou (β) et (δ) réalisent (6). Considérons les cas (β) et (γ). On a : $g(x_i) = g_2(x_i)$ et $f(x_i) = f_1(x_i) \geqslant f_2(x_i)$. Donc

$$g(x_i) - f(x_i) = g_2(x_i) - f_1(x_i) \leqslant g_2(x_i) - f_2(x_i) .$$

Ainsi (6) est encore vrai. Finalement, comme les cas (α) et (δ) se résolvent de la même manière, (6) est toujours vrai, ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque 7. - Naturellement, ce lemme reste vrai, si l'on considère n fonctions f_i et n fonctions g_i . Dans ce cas, on obtient une majoration finale par $n\varepsilon$.

Ce lemme, bien qu'élémentaire, a des conséquences assez importantes. Les résultats qui suivent en sont des conséquences directes.

PROPOSITION 8. - Soit K un cône convexe décomposable et soient f et g deux fonctions de $\mathfrak{L}(K)$ telles que $\sup_a(f, g)$ existe. Alors, pour tout couple (f', g') de fonctions de $\mathfrak{L}(K)$, tel que $f \leqslant f'$, $g \leqslant g'$, $\sup_a(f', g')$ existe.

Démonstration. - Posons $h = \sup(f, g)$, $h' = \sup(f', g')$. Compte tenu de la formule (0), nous devons montrer que, pour tout $x \in K$, l'expression

$$\sup\{\sum_i h'(x_i) \mid (x_i) \in \Sigma_x\}$$

est majorée. Soit donc $x \in K$, $\alpha = \sup_a(f, g)(x)$ et $\varepsilon = \sup((f' - f)(x), (g'-g)(x))$. Soit, enfin $(x_i) \in \Sigma_x$. D'après les formules (1) et (5), nous avons

$$\sum_i h'(x_i) \leqslant \alpha + 2\varepsilon .$$

THÉORÈME 9. - Soient K un cône convexe décomposable, f et g deux fonctions de $\mathfrak{L}(K)$ telles que $\sup_a(f, g)$ existe, (f_i), $i \in I$, (g_j), $j \in J$, deux familles de fonctions de $\mathfrak{L}(K)$ dont les enveloppes inférieures respectives sont f et g. Alors

$$\sup_a(f, g) = \inf_{(i,j)\in I\times J} (\sup_a(f_i, g_j)) . \tag{10}$$

Démonstration. - D'abord, il convient de remarquer que, d'après la proposition 8, $\sup_a(f_i, g_j)$ existe pour tout $(i, j) \in I \times J$.

Notons $h_{i,j} = \sup_a(f_i, g_j)$ et $h = \sup_a(f, g)$. Il est clair que

$$h \leqslant \inf_{(i,j)\in I\times J} (h_{i,j}) .$$

Montrons l'inégalité inverse. Soient $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que

$$f_{i_0}(x) - f(x) < \varepsilon/3 \qquad \text{et} \qquad g_{j_0}(x) - g(x) < \varepsilon/3 .$$

Soit maintenant une suite $(x_i) \in \Sigma_x$ telle que

$$\sum_i \sup(f_{i_0}, g_{j_0})(x_i) \geqslant h_{i_0,j_0}(x) - \varepsilon/3 . \tag{11}$$

D'après le lemme 4,

$$\sum_i \sup(f_{i_0}, g_{j_0})(x_i) - \sum_i \sup(f, g)(x_i) < 2\varepsilon/3 .$$

A fortiori,

(12) $$\sum_i \sup(f_{i_0}, g_{j_0})(x_i) - h(x) < 2\varepsilon/3 .$$

La comparaison de (11) et (12) montre que

$$0 \leqslant h_{i_0}(x) - h(x) < \varepsilon .$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 13. - <u>Soient</u> K <u>un cône convexe décomposable</u>, f <u>et</u> g <u>deux fonctions de</u> $\mathfrak{L}(K)$ <u>telles que</u> $\sup_a(f, g)$ <u>existe</u>, (f_i), $i \in I$, (g_j), $j \in J$, <u>deux familles de fonctions de</u> $\mathfrak{L}(K)$ <u>dont les enveloppes supérieures respectives sont</u> f <u>et</u> g. <u>Alors</u> :

(14) $$\sup_a(f, g) = \sup_{(i,j)\in I\times J} (\sup_a(f_i, g_j)) .$$

<u>Démonstration</u>. - Notons encore $h = \sup_a(f, g)$ et $h_{i,j} = \sup_a(f_i, g_j)$. Soient $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que

$$f(x) - f_{i_0}(x) < \varepsilon/3 \qquad \text{et} \qquad g(x) - g_{j_0}(x) < \varepsilon/3 .$$

Soit une suite $(x_i) \in \Sigma_x$ telle que

(15) $$\sum_i \sup(f, g)(x_i) \geqslant h(x) - \varepsilon/3 .$$

D'après le lemme 4,

$$\sum_i \sup(f, g)(x_i) - \sum_i \sup(f_{i_0}, g_{j_0})(x_i) < 2\varepsilon/3 .$$

D'après (15), on a donc

$$h(x) - \sum_i \sup(f_{i_0}, g_{j_0})(x_i) < \varepsilon .$$

A fortiori,

(16) $$h(x) - \varepsilon \leqslant h_{i_0,j_0}(x) .$$

Ainsi, pour tout $x \in K$ et tout $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un couple d'indices $(i_0, j_0) \in I \times J$ satisfaisant (16). Donc

$$h \leqslant \sup_{(i,j)\in I\times J} h_{i,j} .$$

Comme l'inégalité inverse est trivialement vérifiée, nous avons bien l'égalité (14) annoncée.

C. Q. F. D.

Remarque 17. - Il convient de noter que les théorèmes 9 et 13 tirent une grande partie de leur intérêt de ce qu'on ne suppose pas les familles (f_i) et (g_j) filtrantes croissantes ou décroissantes. Si on le supposait, la démonstration du théorème 13, en particulier, serait triviale.

3. Caractère réticulé de certains espaces de fonctions affines sur un cône de $\mathcal{S}$.

Notations. - Soit X un ensemble, et soit A une partie de $\mathcal{F}(X , \underset{\sim}{R})$ espace des fonctions de X dans $\underset{\sim}{R}$. Nous noterons

$$D \nearrow (A) \qquad (\text{resp. } D \searrow (A) , D(A))$$

l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}(X , \underset{\sim}{R})$ qui sont limite simple d'une suite croissante (resp. d'une suite décroissante, d'une suite) de fonctions de A .

Soit K un cône convexe dans un e. v. t. E . On note $\mathcal{L}_c(K)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{L}(K)$ qui sont continues ; $L_s(K)$ le cône convexe des fonctions de $\mathcal{L}(K)$ qui sont s. c. s. Puis on définit par récurrence transfinie sur l'ensemble des ordinaux $\alpha \leqslant \Omega$, où Ω est le premier ordinal non dénombrable, les cônes suivants :

$$L_s^0(K) = L_s(K)$$

$$\ldots$$

$$L_s^\alpha(K) = D \searrow \Big(\bigcup_{\beta<\alpha} L_s^\beta(K)\Big) , \qquad \text{pour } \alpha \text{ pair } < \Omega$$

$$L_s^{\alpha+1}(K) = D \nearrow (L_s^\alpha(K)) .$$

On pose $L_s^\Omega(K) = \bigcup_{\alpha<\Omega} L_s^\alpha(K)$. Et enfin, pour tout $\alpha \leqslant \Omega$, on note

$$\mathcal{L}_s^\alpha(K) = L_s^\alpha(K) - L_s^\alpha(K) .$$

PROPOSITION 18. - <u>Soit K un cône appartenant à $\mathcal{S}$. Si K est réticulé, le cône $L_s^0(K)$ est semi-réticulé supérieurement pour l'ordre usuel. De plus, si $f \overset{0}{\vee} g$ désigne la borne supérieure, dans $L_s^0(K)$, de deux fonctions f et g de $L_s^0(K)$, on a</u>

$$f \overset{0}{\vee} g = \sup_a(f , g) .$$

Démonstration. - Supposons donc K réticulé, et soient f et $g \in L_s^0(K)$. D'après la propriété C (Appendice), il existe φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{L}_c(K)^+$ avec $\varphi_1 \geqslant f$ et $\varphi_2 \geqslant g$; nous avons donc $\varphi_1 + \varphi_2 \geqslant f , g$. Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{L}(K)$, posons

$$\Gamma_\varphi = \{(x , y) \in K \times \underset{\sim}{R} , \ y \leqslant \varphi(x)\} .$$

On sait que si φ est s. c. s., Γ_φ est un cône convexe fermé. Comme Γ_φ est contenu dans $K \times \underset{\sim}{R}$ qui est faiblement complet, nous avons $\Gamma_\varphi \in \mathbb{S}$, car Γ_φ est saillant (cf. Appendice). Dans le cas qui nous intéresse, nous avons Γ_f, Γ_g et $\Gamma_{\varphi_1+\varphi_2} \in \mathbb{S}$, et de plus, Γ_f et $\Gamma_g \subset \Gamma_{\varphi_1+\varphi_2}$. D'après la propriété A, $C = \Gamma_f + \Gamma_g$ est un cône appartenant à $\mathbb{S}$, donc en particulier un cône convexe fermé. Par suite, c'est l'ensemble des points au-dessous du graphe d'une fonction s. c. s. h, que l'on définit explicitement de la manière suivante :

$$h(x) = \sup\{\sum y_i \mid (y_i) \in S\}$$

où S est l'ensemble des suites finies (y_i) de points de $\underset{\sim}{R}$ telles qu'il existe une suite $(x_i) \in \Sigma_x$ avec :

$$y_i \leqslant \sup(f, g)(x_i) .$$

Il est clair, compte tenu de la formule (0) que

$$h = \sup_a(f, g) .$$

Donc $h \in L_s^0(K)$, et c'est la plus petite fonction de $L_s^0(K)$ majorant f et g. Soit, $h = f \overset{0}{\vee} g$.

<u>Remarque 19</u>. - En utilisant les notations de la propriété D (Appendice), il est utile de remarquer qu'on a aussi, sous les hypothèses de la proposition 18

$$\widehat{\sup(f, g)} = f \overset{0}{\vee} g = \sup_a(f, g) \qquad (\forall f, g \in L_s^0(K)) .$$

THÉORÈME 20. - <u>Pour tout cône</u> $K \in \mathbb{S}$, <u>et tout ordinal</u> $\leqslant \Omega$ <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) K <u>est réticulé pour son ordre propre</u> ;

(α) $L_s^\alpha(K)$ <u>est semi-réticulé supérieurement pour l'ordre usuel</u> ;

(α') $\mathcal{L}_s^\alpha(K)$ <u>est réticulé pour l'ordre usuel</u>.

<u>De plus, si ces propriétés sont réalisées et si</u> $f \underset{\alpha}{\vee} g$ (<u>resp</u>. $f \overset{\alpha}{\vee} g$) <u>désigne la borne supérieure, dans</u> $\mathcal{L}_s^\alpha(K)$ (<u>resp</u>. $L_s^\alpha(K)$) <u>de deux fonctions</u> f <u>et</u> g <u>de</u> $\mathcal{L}_s^\alpha(K)$ (<u>resp</u>. $L_s^\alpha(K)$), <u>on a</u>

$$f \underset{\alpha}{\vee} g = \sup_a(f, g) \qquad (\text{resp. } f \overset{\alpha}{\vee} g = \sup_a(f, g)) .$$

<u>Démonstration</u>. - Pour α ordinal $\leqslant \Omega$, introduisons la propriété auxiliaire suivante :

(α'') $L^{\alpha}_{s}(K)$ est semi-réticulé supérieurement pour l'ordre usuel et de plus, pour f et $g \in L^{\alpha}_{s}(K)$,

$$f \overset{\alpha}{\vee} g = \sup_a(f\ ,\ g)\ .$$

Clairement, (α'') $\Longrightarrow$ (α), et d'après le lemme 2, (α'') $\Longrightarrow$ (α') ($\forall\ \alpha \leqslant \Omega$). Nous allons montrer qu'on a les implications ((a) $\Longrightarrow$ (α'') $\Longrightarrow$ (α) $\Longrightarrow$ (a)) et ((a) $\Longrightarrow$ (α'') $\Longrightarrow$ (α') $\Longrightarrow$ (a)), ($\forall\ \alpha \leqslant \Omega$).

1° (a) $\Longrightarrow$ (α''), (pour $\alpha < \Omega$). D'abord, d'après la proposition 18, (a) $\Longrightarrow$ ($0''$) Montrons ($0''$) $\Longrightarrow$ (α'') par récurrence transfinie. Commençons par supposer que α est pair et que, pour tout $\beta < \alpha$, (β'') est vrai ; et prenons f et $g \in L^{\alpha}_{s}(K)$. Par définition, il existe deux suites décroissantes (f_n) et (g_n) de fonctions de $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} L^{\beta}_{s}(K)$, telles que $f = \inf\limits_{n\in \mathbb{N}} (f_n)$, $g = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (g_n)$. D'après le théorème 9, on a

$$\sup_a(f\ ,\ g) = \inf_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} (\sup_a(f_n\ ,\ g_m))\ .$$

Comme $\sup_a(f_n\ ,\ g_m) \geqslant \sup_a(f_k\ ,\ g_k)$, avec $k = \sup(n\ ,\ m)$ ($\forall\ (n\ ,\ m) \in \mathbb{N}^2$), on a aussi,

$$\sup_a(f\ ,\ g) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_a(f_n\ ,\ g_n)\ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_a(f_n\ ,\ g_n) \in \bigcup_{\beta<\alpha} L^{\beta}_{s}(K)\ .$$

Donc $\sup_a(f\ ,\ g) \in L^{\alpha}_{s}(K)$.

Supposons maintenant α impair. La démonstration est tout-à-fait analogue, en utilisant les suites croissantes et en faisant appel au théorème 13.

2° (a) $\Longrightarrow$ (Ω''). C'est une conséquence immédiate du 1° et du fait que, pour toute suite (f_n) de fonctions de $L^{\Omega}_{s}(K)$, il existe $\alpha < \Omega$ tel que $f_n \in L^{\alpha}_{s}(K)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3° (α) ou (α') $\Longrightarrow$ (a). Ce sera une conséquence du lemme suivant :

LEMME 21. - <u>Soit</u> K <u>un cône appartenant à</u> $\mathcal{S}$. <u>Si</u> L <u>est un sous-cône de</u> $\mathcal{L}(K)$ <u>contenant</u> $\mathcal{L}_c(K)$ <u>et semi-réticulé supérieurement pour l'ordre usuel, alors</u> K <u>est une cône réticulé</u>.

<u>Démonstration</u>. - Grâce à la propriété D (Appendice), nous avons seulement à montrer que, pour $f_1\ ,\ \ldots\ ,\ f_n \in \mathcal{L}_c(K)$, on a, en posant $f = \sup(f_1\ ,\ \ldots\ ,\ f_n)$,

$\hat{f} \in \mathcal{L}(K)$. Dans ces conditions, considérons $h = (f_1 \underset{L}{\vee} f_2 \vee \dots \underset{L}{\vee} f_n)$. Reprenant les notations de la démonstration de la proposition 18, nous avons

$$\Gamma_{\hat{f}} = \sum \Gamma_{f_i} = \mathrm{conv}(\cup \Gamma_{f_i}) .$$

Si $\varphi \in L$ avec $\varphi \geqslant f$, $\Gamma_\varphi \supset \Gamma_{\hat{f}}$ donc, $\varphi \geqslant \hat{f}$. Ainsi $h \geqslant \hat{f}$. Mais par définition :

$$\hat{f} = \inf\{\varphi \in \mathcal{L}_c(K) \mid \varphi \geqslant f\} \geqslant \inf\{\varphi \in L \mid \varphi \geqslant f\} = h .$$

Finalement $\hat{f} = h$. En particulier, $\hat{f}$ est linéaire.

En prenant $L = L_s^\alpha(K)$, on déduit de ce lemme l'implication $(\alpha) \Longrightarrow (a)$. Et en prenant $L = \mathcal{L}_s^\alpha(K)$, on déduit $(\alpha') \Longrightarrow (a)$.

C. Q. F. D.

4. Application aux simplexes appartenant à $\mathbb{S}$.

Rappelons qu'un convexe K est appelé un simplexe si, $\tilde{K}$ étant un cône pointé de base K , $\tilde{K}$ est réticulé.

Usuellement, on considère un espace vectoriel E contenant K , on identifie K au convexe $K \times \{1\}$ de $E \times \mathbb{R}$, et on prend pour $\tilde{K}$ le cône pointé engendré par K dans $E \times \mathbb{R}$.

Lorsque $K \in \mathbb{S}$, on prend pour E un e. l. c. faible contenant K . Alors, comme K est linéairement compact, on a $\tilde{K} \in \mathbb{S}$.

Notations. - Soit K un convexe d'un e. v. t. E . On reprend toutes les notations du paragraphe 3, mais en remplaçant le mot linéaire par le mot affine, la lettre L par A et $\mathcal{L}$ par $\mathcal{A}$. Ainsi $\mathcal{A}(K)$ est l'espace des fonctions affines de K dans $\mathbb{R}$, $A_s(K)$ l'espace des fonctions s. c. s. de $\mathcal{A}(K)$, etc. Nous noterons encore $\sup_a(f , g)$ la borne supérieure dans $\mathcal{A}(K)$ de deux fonctions f et g de $\mathcal{A}(K)$, lorsqu'elle existe.

Pour appliquer les résultats du paragraphe 3 qui viennent d'être montrés, il faut avoir un moyen de passage simple de $\mathcal{A}_c(K)$ à $\mathcal{L}_c(\tilde{K})$, de $A_s(K)$ à $L_s(\tilde{K})$, etc. La proposition suivante le fournit.

PROPOSITION 22. - Soit K une base d'un cône convexe fermé $\tilde{K}$ dans un e. v. t. séparé E . Alors, toute fonction $f \in A_s(K)$ se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f} \in L_s(\tilde{K})$.

Démonstration. - Définissons $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(y) = \lambda f(\frac{y}{\lambda})$ pour $y \in \lambda K$ avec $\lambda > 0$. $\tilde{f}$ est évidemment linéaire sur K . Vérifions qu'elle est s. c. s., ou, ce qui revient au même, que l'ensemble

$$\Gamma_{\tilde{f}} = \{(x , y) \mid y \leqslant \tilde{f}(x)\}$$

est fermé dans $\tilde{K} \times \underset{\sim}{R}$. En posant $\Gamma_f = \{(x , y) \mid y \leqslant f(x)\}$, nous avons

$$\Gamma_{\tilde{f}} = (\bigcup_{\lambda>0} \lambda\Gamma_f) \cup \{0\} \times \underset{\sim}{R}_- .$$

Mais $\{0\} \times \underset{\sim}{R}_- = \alpha(\Gamma_f)$ car K est linéairement compact (c'est-à-dire que $\alpha(K) = \{0\}$). Par suite,

$$\Gamma_{\tilde{f}} = (\bigcup_{\lambda>0} \lambda\Gamma_f) \cup \alpha(\Gamma_f) .$$

De la propriété B (Appendice), il résulte que $\Gamma_{\tilde{f}}$ est fermé.

COROLLAIRE 23. - Sous les hypothèses de la proposition 22,

1° Toute fonction $f \in \mathfrak{A}_c(K)$ se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f} \in \mathfrak{L}_c(L)$.

2° Pour tout ordinal $\alpha \leqslant \Omega$, toute fonction $f \in A_s^\alpha(K)$ se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f} \in L_s^\alpha(K)$.

Démonstration.

1° Si $f \in \mathfrak{A}_c(K)$, on a f et $-f \in A_s(K)$, donc $\tilde{f}$ et $-\tilde{f} \in L_s(K)$, soit $\tilde{f} \in \mathfrak{L}_c(K)$.

2° On procède par une récurrence transfinie tout à fait usuelle à partir de la proposition 22.

De ces résultats, on déduit le théorème suivant, adaptation du théorème 20 aux simplexes.

THÉORÈME 24. - Pour tout convexe $K \in \mathfrak{S}$, linéairement compact, c'est-à-dire ne contenant aucune demi-droite, et tout ordinal $\alpha \leqslant \Omega$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) K est un simplexe ;

(α) $A_s^\alpha(K)$ est semi-réticulé pour l'ordre usuel ;

(α') $\mathfrak{A}_s^\alpha(K)$ est réticulé pour l'ordre usuel.

De plus, si ces propriétés sont réalisées et si $f \underset{\alpha}{\vee} g$ (resp. $f \overset{\alpha}{\vee} g$) désigne la borne supérieure dans $\mathfrak{A}_s^\alpha(K)$ (resp. $A_s^\alpha(K)$) de deux fonctions f et g de $\mathfrak{A}_s^\alpha(K)$ (resp. $A_s^\alpha(K)$), on a

$$f \underset{\alpha}{\vee} g = \sup_a(f\ ,\ g) \qquad (\text{resp. } f \overset{\alpha}{\vee} g = \sup_a(f\ ,\ g)\ ) .$$

5. Fonctions satisfaisant au calcul barycentrique.

Notations. - Soit K un convexe compact. Nous noterons $\mathfrak{M}^+(K)$ le cône convexe des mesures de Radon positives sur K , $\mathfrak{M}_1^+(K)$ la base de ce cône formée des mesures de masse 1 , $\mathfrak{M}$ le cône des mesures maximales sur K , et $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_1^+(K)$.

Enfin, nous noterons S_i le cône convexe des fonctions convexes s. c. i. de K dans $\underline{R}$.

DÉFINITION 25. - Soit K un convexe compact. On dit qu'une fonction satisfait au calcul barycentrique si :

1° f est universellement intégrable (c'est-à-dire μ-intégrable pour toute mesure de Radon μ sur K) ;

2° Pour tout point x de K et toute mesure maximale de masse 1 et de résultante x , $\mu(f) = f(x)$.

On note $\mathfrak{A}_{bar}(K)$ l'espace des fonctions satisfaisant au calcul barycentrique.

PROPOSITION 26.

1° Toute fonction $f \in \mathfrak{A}_{bar}(K)$ est bornée sur K .

2° $D(\mathfrak{A}_{bar}(K)) = \mathfrak{A}_{bar}(K)$.

Démonstration.

1° Supposons qu'on ait une fonction $f \in \mathfrak{A}_{bar}(K)$ telle que $\sup_K(f) = +\infty$. Alors, pour tout $n \in \underline{N}$, il existerait $x_n \in K$ avec $f(x_n) > 2^{2n}$. Considérons la mesure $\mu = \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\, \delta_{x_n}$. On a $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(K)$; on devrait donc avoir $|\mu(f)| < +\infty$. Or,

$$\mu(f) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} f(x_n) \geq \sum_{n\geq 1} 2^n = +\infty .$$

Ainsi, on aurait une contradiction.

2° Ce sera une conséquence du lemme suivant et du théorème de Lebesgue.

LEMME 27 (CHOQUET). - Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathfrak{A}_{bar}(K)$ qui converge simplement vers une fonction $f \in \mathfrak{A}(K)$. Alors, la suite (f_n) est uniformément bornée.

Démonstration. - Supposons que la suite ne soit pas uniformément bornée. Alors

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N} \,,\quad \exists\, k_n > n \,,\quad \exists\, x_n \in K \quad \text{avec} \quad f_{k_n}(x_n) > 2^{2n} \;.$$

Définissons les mesures positives

$$\mu_m = 2^m\Big(\sum_{n>m} 2^{-n}\, \delta_{x_n}\Big) \qquad (\forall\, m > 0)\;.$$

Soit y_m la résultante de μ_m $(m \geqslant 0)$. On a

$$y_0 = \sum_{n\leqslant m} 2^{-n}\, x_n + 2^{-m}\, y_m \qquad (\forall\, m \in \underset{\sim}{N})\;.$$

Ainsi, $f_{k_m}(y_0) = \sum_{n\leqslant m} 2^{-n} f_{k_m}(x_n) + 2^{-m} f_{k_m}(y_m)$. D'où, puisque $f_{k_m}(y_m) = \mu_m(f_{k_m}) \geqslant 0$,

$$f_{k_m}(y_0) \geqslant 2^{-m}\, f_{k_m}(x_m) \geqslant 2^m \;.$$

Donc, $f(y_0) = +\infty$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 28. - Soit K un convexe compact. Pour une fonction $f \in \mathfrak{A}(K)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $f \in \mathfrak{A}_{bar}(K)$;

(b) $\forall\, \varepsilon$, $\forall\, \mu \in \mathfrak{M}_1$, $\exists\, \psi \in S_i$, $\exists\, \varphi \in -S_i$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$$

$$\int (\psi - \varphi)\, d\mu < \varepsilon \;.$$

(c) $\forall\, \mu \in \mathfrak{M}_1^+(K)$, $\forall\, n \in \underset{\sim}{N}$, $\exists\, f_n \in \mathfrak{A}_c(K)$ telles que limite simple $(f_n) = f$ (μ - presque-partout).

Démonstration. - (a) $\Longrightarrow$ (b). Soit $\varepsilon > 0$, $\mu \in \mathfrak{M}_m$ et $x \in K$ la résultante de μ .

Ecrivons que f est μ-intégrable (théorème 3, p. 147 de [1]). Il existe φ s. c. s. de X dans $\underset{\sim}{R}$ et ψ s. c. i. de X dans $\underset{\sim}{R}$, telles que

(29) $$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$$

(30) $$\int (\psi - \varphi)\, d\mu < \varepsilon \;.$$

Montrons qu'on peut choisir φ et ψ respectivement concave et convexe. Démontrons d'abord que

(31) $$\hat{\varphi} \leqslant f \leqslant \check{\psi} \; .$$

Rappelons (Appendice 1 de [9]) que

$$\hat{\varphi}(y) = \sup\{\nu(\varphi) \mid \nu \in M_y\} \qquad (\forall\ y \in K)$$

où $M_y = \{\nu \in \mathfrak{M}_1^+(K)$ de résultante $y\}$.

Soit $\nu \in M_y$. A cause de (29),

$$\nu(\varphi) \leqslant \nu(f) \leqslant \nu(\psi) \; .$$

Mais, comme f satisfait au calcul barycentrique, on a

$$\nu(\varphi) \leqslant f(y) \leqslant \nu(\psi) \; .$$

Donc, $\hat{\varphi}(y) = \sup\limits_{\nu \in M_y} \nu(\varphi) \leqslant f(y) \leqslant \inf\limits_{\nu \in M_y} \nu(\psi) = \check{\psi}(y)$, ce qui prouve (31). D'autre part, comme $\varphi \leqslant \hat{\varphi} \leqslant f \leqslant \check{\psi} \leqslant \psi$, on a aussi $\int (\check{\psi} - \hat{\varphi})\, d\mu < \varepsilon$.

Cette dernière relation ajoutée à (31) montre bien qu'on peut supposer φ et ψ respectivement concave et convexe. On a donc bien (a) $\Longrightarrow$ (b) .

(b) $\Longrightarrow$ (c). Montrons d'abord que (b) implique la propriété suivante :

(b') $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \mu \in \mathfrak{M}_1^+(K)$, $\exists\ \varphi \in -S_i$, $\exists\ \psi \in S_i$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi$$

$$\int (\psi - \varphi)\, d\mu < \varepsilon \; .$$

Soit $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(K)$ et soit $\nu \in \mathfrak{M}_1$ une mesure maximale telle que $\mu \prec \nu$ pour l'ordre de Choquet, c'est-à-dire telle que

$$\mu(f) \leqslant \nu(f)$$

pour toute fonction convexe continue de K dans $\underset{\sim}{R}$. Il est alors connu que $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ pour toute $f \in S_i$. Par suite, si $\int (\psi - \varphi)\, d\nu < \varepsilon$, pour $\varphi \in -S_i$ et $\psi \in S_i$, avec $\varphi \leqslant \psi$, on a

$$\int (\psi - \varphi)\, d\mu \leqslant \int (\psi - \varphi)\, d\nu < \varepsilon \; .$$

Il est alors facile de conclure que (b) $\Longrightarrow$ (b') .

Montrons que (b') $\Longrightarrow$ (c) . Soit $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(K)$. Alors, $\forall\ n \in \underset{\sim}{N}$, $\exists\ \varphi_n \in -S_i$, $\exists\ \psi_n \in S_i$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \qquad \text{et} \qquad \int (\psi_n - \varphi_n)\, d\mu < \frac{1}{2^n} \; .$$

Pour tout n, il existe $f_n \in \mathcal{A}_c(K)$ avec $\varphi_n \leq f_n \leq \psi_n$. Pour cette suite (f_n) nous avons $\mu(|f_n - f|) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par suite, en extrayant, si besoin est, une sous-suite (f_{n_k}) de (f_n), nous avons $f_n \to f$, μ-presque-partout.

(c) $\Longrightarrow$ (a). C'est évident, puisque (c) signifie que, pour toute $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$, f est la limite μ-presque-partout d'une suite de fonctions satisfaisant au calcul barycentrique.

Remarque 32.

(a) Il est utile de noter que, puisque toute fonction satisfaisant au calcul barycentrique est bornée, on peut supposer dans les caractérisations (b) ou (b') que les fonctions ψ et φ peuvent toujours être choisies bornées. De même, dans la caractérisation (c), on peut toujours choisir la suite f_n uniformément bornée.

(b) Il résulte de la caractérisation (b) du théorème 28 que, si f est une fonction μ-intégrable pour toute mesure maximale et si f satisfait au calcul barycentrique pour les seules mesures maximales, f est universellement intégrable et satisfait au calcul barycentrique pour toute mesure de Radon sur K. En particulier, f est affine.

Lorsque K est un simplexe compact, il est naturel de se demander si toute fonction satisfaisant au calcul barycentrique peut se caractériser par la condition (b) du théorème 28 où l'on supposerait, de plus, φ et ψ affines. Nous allons voir que c'est vrai lorsque K est un "bon" simplexe en un sens que nous allons préciser.

6. Fonctions approchables.

DÉFINITION 33. - Soit K un convexe compact. On dit qu'une fonction affine f sur K est approchable si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(S) $$f = \sup\{\varphi \in A_s(K)\ ,\ \ \varphi \leq f\}$$

(I) $$f = \inf\{\psi \in -A_s(K)\ ,\ \ \psi \geq f\}$$

On dit que f est Ω-approchable si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(ΩS) $$f = \sup\{\varphi \in A_s^{\Omega}(K)\ ,\ \ \varphi \leq f\}$$

(ΩI) $$f = \inf\{\psi \in -A_s^{\Omega}(K)\ ,\ \ \psi \geq f\}\ .$$

On note $\mathcal{A}_{app}(K)$ (resp. $\mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$) l'espace des fonctions approchables (resp. Ω-approchables).

DÉFINITION 34. - On dit qu'un simplexe compact est un "bon simplexe" si l'ensemble $\mathcal{E}(K)$ des points extrémaux de K est universellement mesurable et si toute mesure maximale est portée par $\mathcal{E}(K)$.

PROPOSITION 35. - Toute fonction Ω-approchable sur un convexe compact satisfait au calcul barycentrique.

Démonstration. - Il est connu (cf. lemme 4.11 de [6]) que toute fonction de $A_s(K)$ satisfait au calcul barycentrique. Par suite, d'après la proposition 26, il en est de même pour toute fonction de $A_s^{\Omega}(K)$. Soit maintenant une fonction f , Ω-approchable. $\varepsilon > 0$ et $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$ étant donnés, il existe $\varphi \in A_s^{\Omega}(K)$ et $\psi \in -A_s^{\Omega}(K)$ telles que :

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon ,$$

où x est la résultante de μ . Comme φ et ψ satisfont au calcul barycentrique, on a

$$\varphi(x) = \int \varphi \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu \leqslant \int \psi \, d\mu = \psi(x) \qquad \text{et} \qquad \int (\psi - \varphi) \, d\mu < \varepsilon .$$

D'où l'on déduit que $|\int f \, d\mu - f(x)| < \varepsilon$. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ et toute $\mu \in \mathcal{M}_1^+(K)$, f satisfait bien au calcul barycentrique.

THÉORÈME 36. - Pour tout bon simplexe K , on a

$$\mathcal{A}_{bar}(K) = \mathcal{A}_{app}(K) .$$

Pour la démonstration, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 37. - Soit K un bon simplexe. Alors, pour toute fonction satisfaisant au calcul barycentrique et toute mesure maximale μ sur K , il existe une suite croissante (F_n) de faces fermées de K telles que

1° $\mu(K \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = 0$.

2° La restriction de f à toute face F_n est continue.

Démonstration. - Soit $f \in \mathcal{A}_{bar}(K)$ et $\mu \in \mathcal{M}$. Utilisant les résultats du paragraphe 5 du chapitre IV de [1], nous voyons qu'il existe une suite croissante (K_n) de compacts contenus dans $\mathcal{E}(K)$ tels que

1° $\mu(K \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n) = 0$.

2° La restriction de f à chaque compact K_n est continue.

Puisque $K_n \subset \mathcal{E}(K)$, K_n est une σ-face fermée de K , et par suite $F_n = \overline{\mathrm{conv}(K_n)}$ est une face fermée de K . De plus, la restriction de f à F_n est continue (cf. proposition 4.24 et 4.25 de [6]). Ce qui achève la démonstration du lemme 37.

Démonstration du théorème 36. - Soient $f \in \mathcal{A}_{bar}(K)$, x un point de K , μ la mesure maximale de résultante x , et (F_n) la suite croissante de faces fermées de K associée à f et μ dans le lemme 37. Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, soit f_n la restriction de f à F_n . Soit enfin M un minorant de f sur K . D'après le théorème 14 de [7], f_n se prolonge, de manière unique, en une fonction g_n affine semi-continue supérieurement, égale à M sur la face complémentaire F'_n de F_n . On a $g_n \leqslant f$ par construction, et on a

$$g_n(x) = \mu(g_n) = \mu_{|F_n}(f_n) + M\mu(K \setminus F_n) \ .$$

En passant à la limite, on voit que $\sup g_n(x) = f(x)$. Ceci montre que la propriété (S) est vérifiée par f . En suivant le même raisonnement appliqué à $-f$, on voit que f vérifie aussi la propriété (I).

C. Q. F. D.

Lorsque K n'est pas un bon simplexe, nous ignorons si on a encore

$$\mathcal{A}_{bar}(K) = \mathcal{A}_{app}(K) \ .$$

C'est d'autant moins certain que les fonctions approchables possèdent des propriétés très fortes. Anticipant sur des résultats que nous établirons dans une étude ultérieure sur les faces complémentables d'un simplexe, disons que si K est un simplexe compact et si $f \in \mathcal{A}_{app}(K)$, pour tout $x \in K$, il existe une face complémentable F de K , contenant x , qui est un $F_{\sigma\delta}$ de K , telle que f coïncide sur F avec une fonction $g \in A_s^1(K)$. Par suite, s'il existe un point x de K tel que la plus petite face complémentable F_x , contenant x , soit K tout entier, toute fonction approchable sur K est une limite d'une suite décroissante de fonctions affines s. c. s. ; c'est en particulier une fonction borélienne. Un exemple de tel simplexe est un simplexe dont l'ensemble des points extrémaux est dénombrable. Pour un tel simplexe, on retrouve le résultat, d'ailleurs facile à montrer directement, que toute fonction satisfaisant au calcul barycentrique est limite croissante d'une suite de fonctions affines s. c. s.

Pour l'étude des faces complémentables d'un simplexe compact K , il faut disposer d'espaces de fonctions réticulés et stables par limite simple de suites. Comme nous ignorons si $\mathcal{A}_{bar}(K)$ est réticulé, nous avons été amené à considérer un sous-espace de $\mathcal{A}_{bar}(K)$, ayant toutes les propriétés voulues et "suffisamment grand" pour contenir les espaces considérés jusqu'à présent : $\mathfrak{A}_s^{\Omega}(K)$ et $\mathfrak{A}_{app}(K)$. Ce sous-espace est l'espace des fonctions Ω-approchables dont nous commençons maintenant l'étude.

PROPOSITION 38. - <u>Soit</u> K <u>un simplexe compact. Alors,</u>

$$D \nearrow (\mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K)) = D \searrow (\mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K)) = \mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K) .$$

<u>Démonstration</u>. - Nous devons montrer que si (f_n) est une suite croissante de fonctions Ω-approchables qui converge vers une fonction f, f est aussi Ω-approchable. Soit donc une telle suite.

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, posons $\mathfrak{F}_n = \{\varphi \in A_s^{\Omega}(K) , \varphi \leqslant f_n\}$ et $\mathfrak{G}_n = \{\psi \in -A_s^{\Omega}(K), \psi \geqslant f_n\}$. Comme $f_n = \sup_{\mathfrak{F}_n} (\varphi)$, nous avons certainement $f = \sup\{\varphi \in A_s^{\Omega}(K) , \varphi \leqslant f\}$. Montrons maintenant que $f = \inf\{\psi \in -A_s^{\Omega}(K) , \psi \geqslant f\}$. D'abord, d'après le lemme 27, nous pouvons supposer qu'il existe un nombre M tel que $M \geqslant f_n \geqslant 0$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$. Soit maintenant $x \in K$ et $\varepsilon > 0$; par définition,

$$\forall\, n \in \underset{\sim}{N} , \quad \exists\, h_n \in -A_s^{\Omega}(K) , \quad \text{avec} \quad h_n \geqslant f_n \quad \text{et} \quad h_n(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon .$$

Comme $-A_s^{\Omega}(K)$ est semi-réticulé inférieurement (théorème 24), on peut remplacer h_n par $\inf_a(h_n , M)$, et supposer $h_n \leqslant M$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$. Soit maintenant $h'_n = \inf_{k \in \underset{\sim}{N}} (\inf_a(f_n , f_{n+1} , \dots , f_{n+k}))$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$ et $h = \sup_{n \in \underset{\sim}{N}} (h'_n)$. Comme $-A_s^{\Omega}(K)$ est stable par limite croissante ou décroissante, $h \in -A_s^{\Omega}(K)$. D'autre part, l'inégalité $h'_n \geqslant f_n$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$ implique $h \geqslant f$, et l'inégalité $h'_n(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon$ $(\forall\, n \in \underset{\sim}{N})$ implique $h(x) \leqslant f(x) + \varepsilon$. Ainsi f vérifie aussi la propriété (I).

COROLLAIRE 39. - <u>Pour un simplexe compact</u> K, <u>on a</u>

$$\mathfrak{A}_s^{\Omega}(K) \subset \mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K) .$$

THÉORÈME 40. - <u>Pour un convexe compact</u> K, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(a) K <u>est un simplexe</u> ;

(b) $\mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K)$ <u>est réticulé pour l'ordre usuel.</u>

<u>De plus, si ces propriétés sont vérifiées et si</u> $f \underset{app}{\vee} g$ <u>désigne la borne supérieure dans</u> $\mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K)$ <u>de deux fonctions</u> f <u>et</u> g <u>de</u> $\mathfrak{A}_{app}^{\Omega}(K)$, <u>on a</u>

$$f \underset{app}{\vee} g = \sup_a(f , g) . \tag{41}$$

<u>Démonstration</u>. - ((a) $\Longrightarrow$ (b) et (41)). Soient f_1 et $f_2 \in \mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$. En appliquant les théorèmes 9 et 13 à un cône de base K , on voit que

(42) $$\sup_a(f_1 , f_2) = \sup_{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} (\sup_a(\varphi_1 , \varphi_2)) = \inf_{\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2} (\sup_a(\psi_1 , \psi_2)) ,$$

où on a posé,

$$\mathcal{F}_i = \{\varphi_i \in A^{\Omega}_s(K) , \varphi_i \leqslant f\} ; \quad \mathcal{G}_i = \{\psi_i \in - A^{\Omega}_s(K) , \psi_i \geqslant f\} \quad (i = 1 , 2) .$$

Or, pour φ_1 et $\varphi_2 \in A^{\Omega}_s(K)$,

$$\sup_a(\varphi_1 , \varphi_2) \in A^{\Omega}_s(K) ,$$

et, pour ψ_1 et $\psi_2 \in - A^{\Omega}_s(K)$,

$$\sup_a(\psi_1 , \psi_2) \in \mathfrak{A}^{\Omega}_s(K) = A^{\Omega}_s(K) - A^{\Omega}_s(K) .$$

De la relation (42), il résulte que $\sup_a(f_1 , f_2)$ vérifie la propriété $(S\Omega)$, et, grâce au corollaire précédent, la propriété suivante manifestement équivalente à $(I\Omega)$:

$$f = \inf\{\varphi \in \mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K) , \varphi \geqslant f\} .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a). C'est une conséquence immédiate du lemme 21.

DÉFINITION 43. - <u>Soit</u> K <u>un simplexe. Soit</u> $\mathcal{B}_u(K)$ <u>l'espace des fonctions universellement intégrables sur</u> K . <u>On définit une application linéaire</u> Λ <u>de</u> $\mathcal{B}_u(K)$ <u>dans</u> $\mathfrak{A}(K)$ <u>par</u> :

$$f \longmapsto (x \longmapsto \mu_x(f)) ,$$

<u>où</u> μ_x <u>désigne la mesure maximale de résultante</u> $x \in K$.

PROPOSITION 44. - <u>Soit</u> K <u>un simplexe compact. Pour tout couple</u> f , g <u>de fonctions de</u> $\mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$, <u>on a</u>

(45) $$f \underset{app}{\vee} g = \sup_a(f , g) = \Lambda(\sup(f , g)) .$$

<u>Démonstration</u>. - Compte tenu de la proposition 4.15 de [6] on sait que, si f et $g \in A_s(K)$,

$$\sup_a(f , g) = \Lambda(\sup(f , g)) .$$

Par suite, par récurrence transfinie sur des suites croissantes ou décroissantes, on montre que (45) est vrai pour tout couple (f , g) de fonctions de $A_s^\Omega(K)$. Montrons-le maintenant pour des fonctions f , g de $-A_s^\Omega(K)$ et plus généralement de $\mathcal{A}_s^\Omega(K)$. Par définition, on a $f = f_1 - f_2$ et $g = g_1 - g_2$ avec $f_i , g_i \in A_s^\Omega(K)$ $(i = 1 , 2)$. Alors,

$$\begin{aligned} \sup{}_a(f , g) &= \sup{}_a(f_1 + g_2 , g_1 + f_2) - (f_2 + g_2) \\ &= \Lambda(\sup(f_1 + g_2 , g_1 + f_2)) - \Lambda(f_2 + g_2) , \end{aligned}$$

car $(f_2 + g_2)$ satisfait au calcul barycentrique. Par suite,

$$\sup{}_a(f , g) = \Lambda(\sup(f_1 + g_2 , g_1 + f_2) - (f_2 + g_2)) .$$

Soit : $\sup_a(f , g) = \Lambda(\sup(f , g))$.

Montrons enfin que la relation (45) est vraie pour f et $g \in \mathcal{A}_{app}^\Omega(K)$. Notons pour simplifier $f = f_1$, $g = f_2$ et posons :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= \{\varphi_i \in A_s^\Omega(K) , \quad \varphi_i \leqslant f_i\} \\ \mathcal{G}_i &= \{\psi_i \in - A_s^\Omega(K) , \quad \psi_i \geqslant f_i\} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1 , 2)$$

D'après les théorèmes 9 et 13, on a

$$\sup_{\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2} (\sup{}_a(\varphi_1 , \varphi_2)) = \sup{}_a(f_1 , f_2) = \inf_{\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2} (\sup{}_a(\psi_1 , \psi_2)) .$$

Comme la relation (45) est vraie pour les fonctions de $\mathcal{A}_s^\Omega(K)$, nous avons

$$\sup_{\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2} (\Lambda(\sup(\varphi_1 , \varphi_2)) = \sup{}_a(f_1 , f_2) = \inf_{\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2} (\Lambda \sup(\psi_1 , \psi_2)) .$$

Par suite, comme pour $(\varphi_1 , \varphi_2) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ et $(\psi_1 , \psi_2) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$, on a naturellement,

$$\Lambda(\sup(\varphi_1 , \varphi_2)) \leqslant \Lambda(\sup(f_1 , f_2)) \leqslant \Lambda(\sup(\psi_1 , \psi_2)) ,$$

on a donc

$$\sup{}_a(f_1 , f_2) = \Lambda(\sup(f_1 , f_2)) .$$

COROLLAIRE 46. - <u>Sous les hypothèses de la proposition 44, si</u> $f_1 , \ldots , f_n$ <u>sont des fonctions</u> Ω<u>-approchables</u>,

$$\sup{}_a(f_1 , \ldots , f_n) = \Lambda(\sup(f_1 , \ldots , f_n)) .$$

Démonstration. - Posons $f = \sup_a(f_1, \ldots, f_{n-1})$. On a

$$\sup_a(f_1, \ldots, f_n) = \sup_a(f, f_n) = \Lambda(\sup(f, f_n)) .$$

D'autre part, la fonction $\varphi = \Lambda(\sup(f_1, \ldots, f_n))$ est affine, et $\varphi \geq f_k$ $(1 \leq k \leq n)$, donc $\varphi \geq \sup_a(f_1, \ldots, f_n)$; mais on a aussi $\varphi \leq \Lambda(\sup(f, f_n))$. D'où l'égalité annoncée.

COROLLAIRE 47. - Soient K un simplexe compact et A une partie de $\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)$ semi-réticulée supérieurement, pour laquelle la borne supérieure $f \underset{A}{\vee} g$ coïncide avec le "sup affine", $\sup_a(f, g)$. Alors, l'adhérence $\overline{A}$ de A pour la norme uniforme et $D(A)$ sont semi-réticulés supérieurement, et la borne supérieure $f \underset{\overline{A}}{\vee} g$ (resp. $f \underset{D(A)}{\vee} g$) coïncide avec $\sup_a(f, g)$.

Démonstration. - C'est une conséquence directe de la proposition précédente, du lemme 27 et du théorème de convergence de Lebesgue.

COROLLAIRE 48. - Sous les hypothèses du corollaire 47, le plus petit espace A' de fonctions Ω-approchables, contenant A et stable par limite simple de suites, est semi-réticulé supérieurement, et la borne supérieure $f \underset{A'}{\vee} g$ coïncide avec $\sup_a(f, g)$.

COROLLAIRE 49. - Soit K un simplexe compact. Soit A une partie de $\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)$ telle que

1° $(f, g \in A) \Longrightarrow (\Lambda(\sup(f, g)) \in A)$;

2° $D \nearrow (A) = A$.

Alors, si f_n est une suite de fonctions de A, majorée par une fonction de $\mathfrak{a}(K)$ ou, ce qui revient au même, par un nombre réel, $\sup_a(f_n, n \in \underset{\sim}{N})$ existe et appartient à A. De plus,

(50) $$\sup_a(f_n, n \in \underset{\sim}{N}) = \Lambda(\sup(f_n, n \in \underset{\sim}{N})) .$$

Démonstration. - Du fait de la proposition 44, la condition 19 signifie que $(f, g \in A \Longrightarrow \sup_a(f, g) \in A)$. Cela étant, soit (f_n) une suite majorée de fonctions de A. Posons

$$\varphi_n = \sup_{m \geq n}(f_m), \quad \psi_n = \sup_a(f_m, m \leq n) \qquad (\forall n \in \underset{\sim}{N}),$$

$$\varphi = \sup_{n \in \underset{\sim}{N}}(\varphi_n) \qquad \text{et} \qquad \psi = \sup_{n \in \underset{\sim}{N}}(\psi_n) .$$

Du fait du 2°, $\psi \in A$ et ψ est manifestement la plus petite fonction affine majorant φ, donc $\psi = \sup_a(f_n\ ,\ n \in \underset{\sim}{N})$. D'autre part, d'après le corollaire 46

$$\psi_n = \Lambda(\varphi_n) \qquad (\forall\ n \in \underset{\sim}{N}) .$$

Soit

$$\psi_n(x) = \mu_x(\varphi_n) \qquad (\forall\ x \in K)\ (\forall\ n \in \underset{\sim}{N}) .$$

Par suite, comme la suite (f_n) est majorée, ainsi que la suite (φ_n), nous avons, grâce au théorème de convergence dominée,

$$\psi(x) = \mu_x(\varphi) \qquad \forall\ x \in K .$$

Ainsi nous avons bien la formule (50).

DÉFINITION 51. - Soit (f_n) une suite bornée de fonctions de $\mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$. Nous poserons, par définition

$$\lim_{n\to\infty} \sup{}_a(f_n) = \inf_{n\in\underset{\sim}{N}} (\sup{}_a(f_m\ ,\ m \geqslant n)) ,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \inf{}_a(f_n) = \sup_{n\in\underset{\sim}{N}} (\inf{}_a(f_m\ ,\ m \geqslant n)) .$$

D'après le corollaire précédent, ces limites existent bien. Il reste à voir que, lorsque la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f,

$$f = \lim_{n\to\infty} \sup{}_a(f_n) = \lim_{n\to\infty} \inf{}_a(f_n) .$$

THÉORÈME 52. - Soit K un simplexe compact. Soit A une partie de $\mathfrak{A}^{\Omega}_{app}(K)$ telle que

1° $D\nearrow(A) = A$; $D\searrow(A) = A$;

2° $f\ ,\ g \in A \implies \sup_a(f\ ,\ g) \in A$ (resp. $f\ ,\ g \in A \implies \inf_a(f\ ,\ g) \in A$).

Alors,

(a) $D(A) = A$.

(b) Si (f_n) est une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f, on a la formule

(53) $$f = \lim_{n\to\infty} \sup{}_a(f_n) \qquad (\text{resp. } f = \lim_{n\to\infty} \inf{}_a(f_n)\ ) .$$

Démonstration. - Il est clair que (b) $\Longrightarrow$ (a). Par conséquent, il nous suffit de montrer (b).

Soit f_n une suite de fonctions de A qui converge simplement vers une fonction f. D'après le lemme 27, la suite est uniformément bornée. Par conséquent, nous pouvons considérer $\psi = \lim_{n\to\infty} \sup_a(f_n)$ (resp. $\psi = \lim_{n\to\infty} \inf_a(f_n)$). Il reste à voir que $\psi = f$. Considérons dans ce but, $\varphi_n = \sup(f_m\ ,\ m \geqslant n)$ (resp. $\varphi_n = \inf(f_m\ ,\ m \geqslant n)$) ($\forall\ n \in \underset{\sim}{N}$). D'après le corollaire 46, nous avons $\psi_n(x) = \mu_x(\varphi_n)$ ($\forall\ x \in K$) ($\forall\ n \in \underset{\sim}{N}$). Par suite, grâce au théorème de convergence dominée,

$$\psi(x) = \inf_{n\in\underset{\sim}{N}} (\psi_n(x)) = \inf_{n\in\underset{\sim}{N}} (\mu_x(\varphi_n)) = \mu_x(\inf_{n\in\underset{\sim}{N}} (\varphi_n)) = \mu_x(f)$$

$$(\text{resp. } \psi(x) = \sup_{n\in\underset{\sim}{N}} (\psi_n(x)) = \sup_{n\in\underset{\sim}{N}} (\mu_x(\varphi_n)) = \mu_x(\sup_{n\in\underset{\sim}{N}} (\varphi_n)) = \mu_x(f))..$$

Mais f satisfait au calcul barycentrique (proposition 26), donc $\mu_x(f) = f(x)$. Ainsi $\psi = f$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 54. - Soit K un simplexe compact. Alors,

$$D(\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)) = \mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K) .$$

COROLLAIRE 55. - Soient K un simplexe et A une partie de $\mathfrak{a}^{\Omega}_{app}(K)$, telle que $(f\ ,\ g \in A \Longrightarrow \sup_a(f\ ,\ g) \in A)$. Soit B (resp. B') le plus petit espace de fonctions Ω-approchables contenant A et stable par limite simple de suites (resp. de suites croissantes ou décroissantes). Alors, $B = B'$.

Regardons à titre d'exemple les espaces suivants, considérés par ROGALSKI dans [8]. Soit K un simplexe, on pose $D_0 = \overline{A_s - A_s}$ et, pour tout ordinal dénombrable, $D_\alpha = D(\bigcup_{\beta<\alpha} D_\beta)$; puis $\mathfrak{D} = \bigcup_{\alpha<\Omega} D_\alpha$. $A_s - A_s$ est réticulé pour l'ordre usuel, et la borne supérieure de deux éléments f, g de $A_s - A_s$ est $\sup_a(f\ ,\ g)$. Par suite, d'après le corollaire 47, D_0, D_1, ... , D_α sont réticulés pour l'ordre usuel, et la borne supérieure de deux éléments f, g de D_α est encore $\sup_a(f, g)$. Il en est encore de même pour $\mathfrak{D}$. Et, d'après le corollaire 54, $\mathfrak{D}$ est le plus petit espace de fonctions contenant $A_s - A_s$ et stable par limite croissante ou décroissante. De plus, pour chaque ordinal dénombrable, le fait que D_α soit réticulé pour l'ordre usuel, c'est-à-dire pour l'ordre induit par

$$D^+_\alpha = \{f \in D_\alpha\ ,\ \ f(x) \geqslant 0\ ,\ \ \forall\ x \in K\} ,$$

est caractéristique du fait que K est un simplexe (cf. lemme 21).

APPENDICE

Quelques propriétés des ensembles de $\mathcal{S}$.

Soit X un convexe d'un e. l. c. faible E . On dit que $X \in \mathcal{S}$ si X a les propriétés suivantes :

1° X est saillant, c'est-à-dire ne contient aucune droite ;

2° X est (faiblement) complet.

On trouvera les principales propriétés des convexes appartenant à $\mathcal{S}$ dans [2] et [3] ; elles sont très bien résumées dans [4] .

PROPRIÉTÉ A. - Soient X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, et K des cônes appartenant à $\mathcal{S}$ tels que $X_i \subset K$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors,

$$\overline{\operatorname{conv}(\cup X_i)} = \operatorname{conv}(\cup X_i) = \sum X_i \ .$$

PROPRIÉTÉ B. - Si X est un convexe fermé dans un e. v. t. E , on appelle cône asymptote de X , et l'on note $\alpha(X)$, l'ensemble :

$$\alpha(X) = \bigcap_{\lambda>0} \lambda(X - x_0)$$

où x_0 est un point quelconque de X . Le cône $\alpha(X)$ est fermé, et si $0 \notin X$, on a

$$\overline{\bigcup_{\lambda\geqslant 0} \lambda X} = \bigcup_{\lambda\geqslant 0} \lambda X + \alpha(X) \qquad (\text{cône noté } \widetilde{\widetilde{X}}) \ .$$

De plus, si $X \in \mathcal{S}$, on a aussi $\widetilde{\widetilde{X}} \in \mathcal{S}$.

PROPRIÉTÉ C. - Soit X un cône appartenant à $\mathcal{S}$. Alors,

$$\mathcal{E}_c(X) = \mathcal{E}_c(X)^+ - \mathcal{E}_c(X)^+ \ .$$

PROPRIÉTÉ D. - Soit K un cône appartenant à $\mathcal{S}$. Pour une fonction f de K dans $\mathbb{R}$ majorée par une fonction de $\mathcal{E}_c(K)$, on pose

$$\hat{f} = \inf\{\varphi \in \mathcal{E}_c(K) \ \text{ et } \ \varphi \geqslant f\} \ .$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) K est réticulé pour son ordre propre ;

(b) Pour toute fonction f de la forme $f = \sup(f_1 , \dots , f_n)$ avec $f_1 , \dots , f_n \in \mathcal{E}_c(K)$, $\hat{f}$ est linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 1 à 4. 2e édition. - Paris, Hermann, 1965 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1 et 2. 2e édition. - Paris, Hermann, 1966 (Act. scient. et ind., 1189 ; Bourbaki, 15).

[3] CHOQUET (Gustave). - Ensembles et cônes convexes faiblement complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1908-1910 et p. 2123-2125.

[4] CHOQUET (Gustave). - Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse, Proceedings of the international Congress of Mathematicians [14. 1962. Stockholm], p. 317-330. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[5] CHOQUET (Gustave) et MEYER (Paul-André). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1963, p. 139-154.

[6] GOULLET de RUGY (Alain). - Faces d'un convexe, simplexes et fonctions affines sur un simplexe. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1968 (Thèse 3e cycle Fac. Sc. Paris, 1967).

[7] GOULLET de RUGY (Alain). - Quelques propriétés des fonctions numériques linéaires et semi-continues sur un cône convexe faiblement complet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, 1967, Série A, p. 841-844.

[8] ROGALSKI (Marc). - Opérateurs de Lion, projecteurs boréliens et simplexes analytiques, Faculté des Sciences d'Orsay, 1967/68.

[9] ROGALSKI (Marc). - Étude du quotient d'un simplexe par une face fermée, application à un théorème d'Alfsen, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 12e année, 1967/68, n° 2, 17 p.

Index des définitions et notations

approchable, Ω-approchable. . . p. 14

A^+ . . . . p. 2

$\mathcal{A}(K)$, $A_s(K)$, etc. . . . . p. 9

$\mathcal{A}_{bar}(K)$ . . . . p. 11

$\mathcal{A}_{app}(K)$, $\mathcal{A}^{\Omega}_{app}(K)$ . . . . p. 14

"bon" simplexe. . . . . p. 15

$\mathcal{B}_u(K)$ . . . . p. 18

Calcul barycentrique. . . . . . p. 11

$D(A)$, $D \searrow (A)$, $D \nearrow (A)$ . . . . p. 6

$\tilde{f}$, $\tilde{K}$ . . . . p. 9

$\lim\sup_{n\to+\infty}{}_a(f_n)$, $\lim\inf_{n\to+\infty}{}_a(f_n)$ . . p. 21

$\mathcal{L}(K)$ . . . . p. 1

$\mathcal{L}_c(K)$, $L^{\alpha}_s(K)$, $\mathcal{L}^{\alpha}_s(K)$, etc. . . p. 6

Λ . . . . p. 18

$\mathcal{M}^+(K)$, $\mathcal{M}^+_1(K)$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$ . . . . . p. 11

μ_x . . . . p. 18

Ordre usuel. . . . . p. 2

$\sup_a(f , g)$ . . . . p. 1

S_i . . . . p. 11

$f \underset{\alpha}{\vee} g$, $f \overset{\alpha}{\vee} g$ . . . . p. 7,11

$f \underset{app}{\vee} g$ . . . . p. 17

$\alpha(K)$ . . . . p. 23