Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Daniel Sibony

Le théorème de James

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n^{o} 4, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A4_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
12e année, 1967/68, n° 4

11 janvier 1968

LE THÉORÈME DE JAMES

par Daniel SIBONY

On se propose de démontrer le théorème suivant de compacité dû à R. C. JAMES ([1] et [2]). Nous avons, en réduisant le problème au cas séparable, quelque peu raccourci la démonstration de J. D. PRYCE ([4]), laquelle suivait essentiellement les idées de JAMES.

THÉORÈME 1. - Soient E un espace localement compact (e. l. c.) complet, et $C \subset E$ un ensemble faiblement fermé borné. Si toute forme linéaire φ, continue sur E, atteint son sup dans C (i. e. est telle que $\sup_{y\in C} \varphi(y) = \varphi(y_0)$, $y_0 \in C$), alors C est faiblement compact.

Démonstration. - Si C n'était pas faiblement compact, il existerait (cf. KELLEY [3], p. 159) une suite $(z_n) \subset C$, et $(f_n) \subset E'$ équicontinue, telles que

$$\lim_i \lim_j f_i(z_j) \qquad \text{et} \qquad \lim_j \lim_i f_i(z_j)$$

existent et soient distinctes ; ce qu'on utilisera sous la forme suivante :

($\star$) Il existe r réel > 0, tel que, pour tout k, il existe j_0 avec

$$(j \geqslant j_0) \implies f_k(z_j) - \lim_i f_i(z_j) \geqslant r \ .$$

Dans E' faible, soient F le sous-espace fermé engendré par (f_n), F^0 son polaire dans E. Le dual de E/F^0 s'identifie à F. Soit π la projection de E sur E/F^0, et $C_1 = \pi(C)$. Muni de la topologie quotient, E/F^0 est séparable, ainsi que son complété E_1. Dans E_1, le convexe fermé borné $\overline{C_1}$ vérifie l'hypothèse de James pour la dualité avec F, et $\overline{C_1} \supset (y_j)$ avec $y_j = \pi(z_j)$, $\forall j$. La condition ($\star$) est vérifiée avec y_j au lieu de z_j ; mais cette fois, on peut affirmer que la suite $(f_n) \subset F$ contient une sous-suite faiblement convergente (i. e. pour $\sigma(F, E/F^0)$), qu'on notera encore (f_n).

Ceci montre qu'on peut se replacer dans la situation initiale avec (E, E'), $C \subset E$, et suites (f_n) et (z_n) vérifiant ($\star$) avec, de plus, $f = \lim f_n$ (faible).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par K_n l'enveloppe convexe de $(f_i)_{i \geqslant n}$; pour toute φ, fonction bornée sur C, posons $p(\varphi) = \sup_C \varphi$.

L'inégalité (☆) servira sous la forme suivante :

(1) Pour tout $u \in K_1$, on a $p(u - f) \geqslant r$; car

$$p(u - f) \geqslant (u - f)(z_j) = \sum_1^s \lambda_i [f_{n_i}(z_j) - \lim_i f_i(z_j)]$$

$$\geqslant r \sum_1^s \lambda_i = r \quad ,$$

pour j assez grand.

LEMME 1. - <u>Soit</u> (β_n) <u>une suite de nombres réels</u> > 0 . <u>Il existe</u> (g_n) , <u>avec pour tout</u> n , $g_n \in K_n$, <u>et</u>

$$p[\sum_{i=1}^n \beta_i(g_i - f)] > \frac{1}{2} \beta_n r + p[\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i(g_i - f)] \quad .$$

La suite (g_n) se construit par récurrence en utilisant à chaque étape le lemme suivant.

LEMME 2. - <u>Soient</u> Y <u>un espace vectoriel,</u> p <u>une forme sous-linéaire,</u> β , β' <u>et</u> ρ <u>trois nombres réels</u> > 0 , $A \subset Y$ <u>un convexe, et</u> $u \in Y$. <u>Si</u>

$$\inf_{a \in A} p(u + \beta a) > \beta\rho + p(u) \quad ,$$

<u>alors il existe</u> $a_0 \in A$ <u>tel que</u>

$$\inf_{a \in A} p(u + \beta a_0 + \beta' a) > \beta'\rho + p(u + \beta a_0) \quad .$$

Pour montrer le lemme 1, on applique le lemme 2, pour $n = 1$, à $A = K_1 - f$, $u = 0$, $\beta = \beta_1$, $\beta' = \beta_2$ et $\rho = \frac{r}{2}$. L'hypothèse du lemme 2 n'est autre que l'inégalité (1) déjà établie. On choisit alors $g_1 \in K_1$ tel que

$$\inf_{\psi \in K_1} p[\beta_1(g_1 - f) + \beta_2(\psi - f)] > \frac{1}{2} \beta_2 r + p[\beta_1(g_1 - f)] \quad .$$

Au rang n , on applique le lemme 2 avec $A = K_n - f$, $u = \sum_1^{n-1} \beta_i(g_i - f)$, $\beta = \beta_n$ et $\beta' = \beta_{n+1}$, sachant que

$$\inf_{\psi \in A} p(u + \beta\psi) \geqslant \inf_{\psi \in K_{n-1} - \varphi} p(u + \beta\psi) > \frac{1}{2} \beta_n r + p(u) \quad .$$

<u>Preuve du lemme</u> 2. - L'hypothèse s'écrit

$$- p(u) = \beta\rho - \inf_{a\in A} p(u + \beta a) + \delta \qquad (\delta > 0) \quad .$$

Soient a_0 , $b \in A$ et $c = \dfrac{\beta a_0 + \beta' b}{\beta + \beta'} \in A$. Par sous-linéarité de p , on a

$$p(u + \beta a_0 + \beta' b) \geqslant p((1 + \frac{\beta'}{\beta})(u + \beta c)) - p(\frac{\beta'}{\beta} u) \quad .$$

Donc

$$\inf_{b\in A} p(u + \beta a_0 + \beta' b) \geqslant (1 + \frac{\beta'}{\beta}) \inf_{a\in A} p(u + \beta a) - \frac{\beta'}{\beta} p(u)$$

$$= (1 + \frac{\beta'}{\beta}) \inf_{a\in A} p(u + \beta a) + \frac{\beta'}{\beta} [\beta\rho - \inf_{a\in A} p(u + \beta a)] + \frac{\beta'}{\beta} \delta$$

$$= \beta'\rho + \inf_{a\in A} p(u + \beta a) + \frac{\beta'}{\beta} \delta \quad .$$

Il suffit alors de choisir $a_0 \in A$ tel que

$$p(u + \beta a_0) < \inf_{a\in A} p(u + \beta a) + \frac{\beta'}{\beta} \delta \quad ,$$

d'où le résultat.

<u>Fin de la démonstration</u>. - Soit $(\beta_n) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que

$$\lim_n \frac{1}{\beta_n} \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i = 0 \quad .$$

Posons

$$g = \sum_{i\geqslant 1} \beta_i (g_i - f) \quad ,$$

où (g_n) est associée à (β_n) par le lemme 1. On a $g \in E'$, et on va montrer que g n'atteint pas son sup sur C . Car si elle l'atteignait en $x_0 \in C$, on aurait

$$\sum_1^n \beta_i (g_i - f)(x_0) = g(x_0) - \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i (g_i - f)(x_0) \geqslant g(x_0) - M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \quad ,$$

où M est une constante > 0 telle que $|h(t)| \leqslant M$, $\forall\ t \in C$ et $\forall\ h \in K_1 - f$.
Donc

$$\sum_1^n \beta_i(g_i - f)(x_0) \geqslant p(g) - M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \geqslant p[\sum_1^n \beta_i(g_i - f)] - p[\sum_1^n \beta_i(g_i - f) - g] - M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i$$

$$\geqslant p[\sum_1^n \beta_i(g_i - f)] - 2M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i$$

$$> \frac{1}{2} \beta_n \, r + p[\sum_1^{n-1} \beta_i(g_i - f)] - 2M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \qquad \text{(lemme 1)}$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \beta_n \, r + \sum_1^{n-1} \beta_i(g_i - f)(x_0) - 2M \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \ .$$

D'où

$(g_n - f)(x_0) > \frac{1}{2} r - 2M \frac{Z}{\beta_n}$ avec $Z = \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i$, et $\lim\inf(g_n - f)(x_0) \geqslant \frac{r}{2}$,

ce qui contredit le fait que $\lim g_n(x_0) = f(x_0)$ (ou $\lim f_n = f$), et achève la démonstration du théorème.

Remarquons que la démonstration est valable si on suppose seulement que C est complet dans E , donc :

THÉORÈME 1 bis. - Dans un e. l. c. quasi-complet E , si C est un ensemble faiblement fermé borné tel que toute forme linéaire continue y atteigne son sup , alors C est faiblement compact.

On peut constater que ce théorème entraîne des résultats classiques et importants sur la compacité faible, notamment les théorèmes suivants.

THÉORÈME (KREIN). - Dans un e. l. c. quasi-complet E , si C est faiblement compact, il en est de même de son enveloppe convexe fermée.

En effet, soit Γ cette enveloppe. On voit aisément que

$$\Gamma = \bigcap_{\varphi \in E'} \varphi^{-1}(\overline{\varphi(C)}) \ .$$

Donc Γ vérifie l'hypothèse de James, et est compact pour $\sigma(E , E')$.

THÉORÈME (EBERLEIN). - Soit E un e. l. c. quasi-complet, et soit $A \subset E$ tel que toute suite $(x_n) \subset A$ ait une valeur d'adhérence faible dans E . Alors A est faiblement relativement compact.

En effet, $\overline{A}$ est nécessairement borné ; toute $\varphi \in E'$ atteint dans $\overline{A}$ son sup , car si $a = \sup_A \varphi$ $(= \sup_{\overline{A}} \varphi)$, soit $x_n \in A \cap (\varphi \geqslant a - \frac{1}{n})$. La suite x_n a une valeur d'adhérence faible y dans $\bar{A}$, et $\varphi(y) = a$; on conclut donc par le théorème de James.

BIBLIOGRAPHIE

[1] JAMES (R. C.). - Characterization of reflexivity, Studia Math., Warszawa, t. 23, 1964, p. 205-216.

[2] JAMES (R. C.). - Weakly compact sets, Trans. Amer. math. Soc., t. 113, 1964, p. 129-140.

[3] KELLEY (J. L.) and NAMIOKA (I.). - Linear topological spaces. - Princeton, D. Van Nostrand Company, 1963 (The University Series in higher Mathematics).

[4] PRYCE (J. D.). - Weak compactness in locally compact spaces.

(Texte remis le 31 janvier 1969)