

SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ROLAND DURIER

Noyaux non positifs en théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 12 (1967-1968), exp. n° 15, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1967-1968__12__A12_0

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOYAUX NON POSITIFS EN THEORIE DU POTENTIEL

par Roland DURIER

Un des aspects actuels de la théorie du potentiel consiste à envisager des propriétés vérifiées essentiellement par le noyau newtonien, et à trouver, pour des noyaux plus généraux, des relations entre ces propriétés. Dans ce travail, le modèle est le noyau logarithmique plutôt que le noyau newtonien. On introduit et compare des principes d'équilibre et de maximum ainsi que des principes de semi-balayage et des principes semi-complets du maximum. On donne également des résultats concernant le signe de l'énergie.

I. Définitions et notations.

X est un espace topologique localement compact. \mathfrak{M} (resp. \mathfrak{M}^1) est l'ensemble des mesures de Radon sur X , positives et à support compact (resp. de masse 1); \mathfrak{M} est muni de la topologie vague. On note S_μ le support d'une mesure μ de \mathfrak{M} .

Un noyau G sur X est une fonction $(x, y) \rightarrow G(x, y)$ définie sur $X \times X$, à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$ et semi-continue inférieurement. On pose

$$\check{G}(x, y) = G(y, x) .$$

Le potentiel (ou G -potentiel) d'une mesure μ de \mathfrak{M} est la fonction G_μ à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$ définie sur X par

$$G_\mu(x) = \int G(x, y) d\mu(y) .$$

L'énergie mutuelle de deux mesures μ et ν de \mathfrak{M} est le nombre (fini ou $+\infty$)

$$G(\mu, \nu) = \int G_\mu(x) d\nu(x) .$$

L'énergie de μ est le nombre (fini ou $+\infty$): $G(\mu, \mu)$. On note

$$\mathcal{E} = \{ \mu \in \mathfrak{M}, G(\mu, \mu) < +\infty \}$$

$$\mathcal{F} \text{ (resp. } \check{\mathcal{F}} \text{)} = \{ \mu \in \mathfrak{M}, G_\mu \text{ (resp. } \check{G}_\mu \text{)} \text{ fini continu sur } X \} ,$$

et, K étant un compact de X ,

$$\mathfrak{M}(K) = \{ \mu \in \mathfrak{M}, S_\mu \subset K \} \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}^1(K) = \{ \mu \in \mathfrak{M}(K), \int d\mu = 1 \} .$$

On définit de façon analogue

$$\mathcal{E}(K), \quad \mathcal{E}^1(K), \quad \mathcal{F}(K), \quad \mathcal{F}^1(K), \quad \check{\mathcal{E}}(K), \quad \check{\mathcal{E}}^1(K) .$$

Une partie A de X est dite \mathcal{E} -négligeable (resp. \mathcal{F} -négligeable) si elle est de mesure nulle pour toute mesure de \mathcal{E} (resp. \mathcal{F}). Une propriété vraie sauf sur un ensemble \mathcal{E} -négligeable est dite vraie a. p. p. p. (à peu près partout).

Un noyau G est dit régulier (ou vérifiant le principe de continuité) si, quelle que soit la mesure μ de \mathcal{M} , la continuité de la restriction de G_μ à S_μ entraîne la continuité de G_μ sur X .

Pour un noyau quelconque, toute partie \mathcal{E} -négligeable est \mathcal{F} -négligeable. Mais pour un noyau régulier, une partie de X est \mathcal{E} -négligeable si, et seulement si, elle est \mathcal{F} -négligeable. C'est cette propriété qui donne son importance à la notion de régularité pour un noyau.

Principes.

Maximum : On note (M) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à

$$\forall \mu \in \mathcal{M}, \quad \forall a \in \underline{\mathbb{R}} \quad (G_\mu \leq a \text{ sur } S_\mu \implies G_\mu \leq a \text{ sur } X)$$

Equilibre : On note (E) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à : Pour tout compact K de X , il existe k dans $\underline{\mathbb{R}}$ et λ dans $\mathcal{M}^1(K)$ tels que

$$G\lambda = k \text{ a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\lambda \leq k \text{ sur } X .$$

Principes du semi-balayage : On note (SB) (resp. (SB+)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à : Pour tout compact K non \mathcal{E} -négligeable de X et pour toute mesure μ de \mathcal{M} , il existe ν dans $\mathcal{M}(K)$ et k dans $\underline{\mathbb{R}}$ (resp. dans $[0, +\infty[$) avec

$$\int d\mu = \int d\nu$$

$$G\nu = G_\mu + k \text{ a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\nu \leq G_\mu + k \text{ sur } X .$$

Principes semi-complets du maximum : On note (SCM) (resp. (SCM+)) l'ensemble des noyaux G qui satisfont à

$$\forall \mu \in \mathcal{E}, \quad \forall \nu \in \mathcal{M}, \quad \forall a \in \underline{\mathbb{R}},$$

$$\left(\int d\mu = \int d\nu \text{ (resp. } \int d\mu \geq \int d\nu) \text{ et } G_\mu \leq G_\nu + a \text{ sur } S_\mu \right)$$

$$\implies (G_\mu \leq G_\nu + a \text{ sur } X)_{\sim}$$

Le noyau logarithmique défini dans $\underline{\mathbb{R}}^2$ par

$$G(x, y) = \log \frac{1}{|x - y|} \quad \text{si } x \neq y$$

$$G(x, x) = +\infty$$

vérifie toutes ces propriétés [8]. Il en est de même pour le noyau associé à certains processus de Markoff récurrents sur un espace de phase dénombrable (chaînes normales [5]). Le cas des semi-groupes sous-markoviens de convolution sur \mathbb{R} a été étudié par C. HERZ ; c'est à lui que nous empruntons la terminologie "principe semi-complet du maximum" [4].

II. Relations entre principes.

Les démonstrations des théorèmes que nous avons en vue reposent sur un résultat analogue au théorème d'existence de Kishi [1], [7], mais adapté au cas des noyaux non nécessairement positifs.

1. Lemme fondamental.

Soit G un noyau tel que \check{G} soit régulier. Pour tout compact K non ε -négligeable de X et pour toute fonction u continue sur K , il existe σ dans $\mathcal{E}^1(K)$ et k réel tels que $G\sigma \leq u + k$ sur $S\sigma$ et $G\sigma \geq u + k$ a. p. p. p. sur K .

Démonstration.

1° Si G est symétrique ($G = \check{G}$), on peut utiliser une méthode variationnelle analogue à la méthode de Gauss. Toute mesure σ qui réalise le minimum sur le compact $\mathcal{M}^1(K)$ de la fonction s. c. i.

$$\alpha \rightarrow G(\alpha, \alpha) - \int u d\alpha$$

convient avec la constante

$$k = G(\sigma, \sigma) - \int u d\sigma .$$

2° Dans le cas général, cette méthode ne donne aucun résultat. Comme dans le théorème de Kiski, l'outil fondamental est le théorème du point fixe de Ky Fan et Glicksberg [2], [3].

On définit une application du compact $\mathcal{M}^1(K)$ dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{M}^1(K))$ de la façon suivante : Pour μ dans $\mathcal{M}^1(K)$, on pose

$$\Gamma(\mu) = \{ \nu \in \mathcal{M}^1(K) ; \forall \lambda \in \check{\mathcal{E}}^1(K), G(\mu, \nu) - \int u d\nu \leq G(\mu, \lambda) - \int u d\lambda \} .$$

$\Gamma(\mu)$ est convexe et non vide : il contient en particulier toute mesure ν de $\mathcal{M}^1(K)$ qui réalise le minimum sur le compact $\mathcal{M}^1(K)$ de la fonction s. c. i.

$$\lambda \rightarrow G(\mu, \lambda) - \int u d\lambda .$$

Le graphe Γ est fermé ; en effet, soit (μ_i, ν_i) une famille filtrante de

couples de mesures de $\mathfrak{M}^1(K)$ avec

$$\lim \mu_i = \mu, \quad \lim \nu_i = \nu \quad \text{et} \quad \nu_i \in \Gamma(\mu_i) .$$

Soit λ dans $\check{\mathfrak{F}}^1(K)$, on a

$$G(\mu_i, \nu_i) - \int u \, d\nu_i \leq G(\mu_i, \lambda) - \int u \, d\lambda .$$

$G(\mu_i, \lambda)$ tend vers $G(\mu, \lambda)$ ($\check{G}\lambda$ est continu)

$$\underline{\lim} [G(\mu_i, \nu_i) - \int u \, d\nu_i] \geq G(\mu, \nu) - \int u \, d\nu$$

(u est continue et G est s. c. i.). Donc

$$G(\mu, \nu) - \int u \, d\nu \leq G(\mu, \lambda) - \int u \, d\lambda ,$$

et ceci pour tout λ dans $\mathfrak{F}^1(K)$, c'est-à-dire $\nu \in \Gamma(\mu)$. Les hypothèses du théorème de Ky Fan et Glicksberg sont réalisées; donc il existe σ dans $\mathfrak{M}^1(K)$ tel que $\sigma \in \Gamma(\sigma)$, c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in \check{\mathfrak{F}}^1(K), \quad G(\sigma, \sigma) - \int u \, d\sigma \leq G(\sigma, \lambda) - \int u \, d\lambda .$$

Comme $\check{\mathfrak{F}}^1(K)$ n'est pas vide, σ est dans \mathcal{E} . On pose

$$k = G(\sigma, \sigma) - \int u \, d\sigma .$$

On a alors $G\sigma - u \geq k$ sur K sauf sur un ensemble $\check{\mathfrak{F}}$ -négligeable donc a. p. p. p. (\check{G} est régulier). Si, en un point x_0 de S_σ , on avait

$$G\sigma(x_0) - u(x_0) > k$$

on en déduirait $G(\sigma, \sigma) - \int u \, d\sigma > k$, donc $G\sigma - u \leq k$ sur S_σ .

Remarque 1. - Dans le lemme fondamental, on ne peut pas en général préciser le signe de k . Voici toutefois une condition suffisante, utile dans la suite, pour que k soit positif: S'il existe une mesure μ dans \mathfrak{M}^1 avec

$$u \leq G\mu \quad \text{sur } K$$

et si le noyau \check{G} est dans (E), alors $k \geq 0$. En effet, sous ces hypothèses, il existe λ dans $\mathcal{E}^1(S_\sigma)$ et c réel tels que

$$\check{G}\lambda = c \quad \text{sur } S_\sigma \quad \text{a. p. p. p.} \quad \text{et} \quad \check{G}\lambda \leq c \quad \text{sur } X .$$

D'où $k = G(\sigma, \lambda) - \int u \, d\lambda = c - \int u \, d\lambda \geq c - \int G\mu \, d\lambda \geq 0$.

2. Principe d'équilibre et principe du maximum.

THÉOREME 1. - Soit G un noyau sur X

1° Si \check{G} est régulier, $G \in (M) \implies G \in (E)$;

2° Si G est régulier, $G \in (E) \implies G \in (M)$.

Dans le cas où G est positif, on retrouve un théorème connu.

Démonstration.

1° Soit K un compact non \mathcal{E} -négligeable. On applique le lemme fondamental à G , au compact K avec $u = 0$: Il existe λ dans $\mathcal{E}^1(K)$ et k réel tels que $G\lambda \leq k$ sur $S\lambda$ et $G\lambda \geq k$ a. p. p. p. sur K . Si G est dans (M) , alors $G\lambda \leq k$ sur X .

2° Soit μ dans \mathfrak{M} et a dans $\underline{\mathbb{R}}$ avec $G\mu \leq a$ sur $S\mu$. Alors μ est dans \mathcal{E} et on peut supposer μ de masse 1. Soit x_0 n'appartenant pas à $S\mu$ et soit u_i une famille filtrante croissante de fonctions sur K , continues, et telle que

$$\lim u_i = \check{G}_{\varepsilon_{x_0}}.$$

On applique le lemme fondamental au noyau \check{G} , au compact $S\mu$ et à la fonction u_i : il existe σ_i dans $\mathcal{E}^1(S\mu)$ et k_i dans $\underline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\check{G}_{\sigma_i} \leq u_i + k_i \quad \text{sur } S\sigma_i \quad \text{et} \quad \check{G}_{\sigma_i} \geq u_i + k_i \quad \text{a. p. p. p. sur } S\mu.$$

k_i est positif d'après la remarque 1. Donc

$$\int u_i d\mu \leq G(\mu, \sigma_i) - k_i \leq a - k_i \leq a.$$

Comme $G\mu(x_0) = \lim \int u_i d\mu$, on a $G\mu(x_0) \leq a$.

3. Principes du semi-balayage et principes semi-complets du maximum.

THÉOREME 2. - On considère des noyaux G tels que G et \check{G} soient réguliers.

Alors,

$$1^\circ G \in (SCM) \iff G \in (SB) \iff \check{G} \in (SCM) \iff \check{G} \in (SB);$$

$$2^\circ G \in (SCM+) \iff \check{G} \in (SB+)$$

Démonstration.

$$(a) \check{G} \in (SB) \implies G \in (SCM).$$

Soient μ dans \mathcal{E} , ν dans \mathfrak{M} et a réel avec $\int d\mu = \int d\nu = 1$ et $G\mu \leq G\nu + a$ sur $S\mu$. Soient x_0 n'appartenant pas à $S\mu$, k_0 réel et ε'_{x_0} dans $\mathfrak{M}^1(S\mu)$ tels que

$$\check{G}_{\varepsilon'_{x_0}} = \check{G}_{\varepsilon_{x_0}} + k_0 \quad \text{a. p. p. p. sur } S\mu$$

$$\check{G}_{\varepsilon'_{x_0}} \leq \check{G}_{\varepsilon_{x_0}} + k_0 \quad \text{sur } X \quad (\check{G} \in (SB))$$

On établit $G_\mu(x_0) \leq G_\nu(x_0) + a$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_\mu(x_0) &= \int G_\mu d\varepsilon_{x_0} = \int \check{G}_{\varepsilon_{x_0}} d\mu = \int \check{G}_{\varepsilon'_{x_0}} d\mu - k_0 = \int G_\mu d\varepsilon'_{x_0} - k_0 \leq \int G_\nu d\varepsilon'_{x_0} - k_0 + a \\ &= \int \check{G}_{\varepsilon'_{x_0}} d\nu - k_0 + a \leq \int \check{G}_{\varepsilon_{x_0}} d\nu + a = G_\nu(x_0) + a . \end{aligned}$$

Remarque 2. - Ce même raisonnement prouve, sous les mêmes hypothèses, que si on a $G_\mu < G_\nu + a$ sur S_μ , on a la même inégalité stricte dans X .

$$(b) \quad \check{G} \in (SB+) \implies G \in (SCM+) .$$

Le raisonnement de (a) s'adapte immédiatement avec $\int d\mu = 1$, $\int d\nu \leq 1$ et $k_0 \geq 0$.

$$(c) \quad G \in (SCM) \implies G \in (SB) .$$

On suppose donnés un compact K non ε -négligeable et une mesure μ de \mathcal{M}^1 . Soit u_i une famille filtrante croissante de fonctions continues sur K telle que

$$\lim u_i = G_\mu \quad \text{sur } K .$$

On applique le lemme fondamental à G , u_i et K : Il existe k_i réel, σ_i dans $\mathcal{E}^1(K)$ tels que

$$G\sigma_i \leq u_i + k_i \quad \text{sur } S\sigma_i \quad \text{et} \quad G\sigma_i \geq u_i + k_i \quad \text{a. p. p. p. sur } K .$$

La famille (σ_i) est contenue dans le compact $\mathcal{M}^1(K)$. La famille (k_i) est :

1° majorée : soit λ dans $\mathcal{F}^1(K)$:

$$k_i \leq G(\sigma_i, \lambda) - \int u_i d\lambda .$$

$G(\sigma_i, \lambda)$ est majoré par $\sup_{x \in K} \check{G}\lambda(x)$ et $\int u_i d\lambda$ est minoré indépendamment de i .

2° minorée : on a

$$G\sigma_i \leq u_i + k_i \leq G_\mu + k_i \quad \text{sur } S\sigma_i ,$$

donc $G\sigma_i \leq G_\mu + k_i$ sur X . Soit λ dans $\mathcal{F}^1(K)$:

$$k_i \geq G(\sigma_i, \lambda) - G(\mu, \lambda) \geq \inf_{(x,y) \in K \times K} G(x, y) - \int \check{G}\lambda d\mu .$$

La famille (σ_i, k_i) est donc relativement compacte dans $\mathcal{M}^1(K) \times \underline{\mathbb{R}}$. Donc il existe σ dans $\mathcal{M}^1(K)$, k dans $\underline{\mathbb{R}}$ et une sous-famille filtrante (σ_j, k_j) telle que

$$\lim \sigma_j = \sigma \quad \text{et} \quad \lim k_j = k .$$

En prenant des lim dans les inégalités ci-dessus, on obtient le résultat annoncé.

$$(d) \quad G \in (SCM+) \implies \check{G} \in (SB+) .$$

On sait que

$$\begin{aligned} G \in (SCM+) &\implies G \in (SCM) \implies \check{G} \in (SB) \\ G \in (SCM+) &\implies G \in (M) \implies G \in (E) . \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue à celui de la remarque 1 permet de voir que

$$(G \in (E) \text{ et } \check{G} \in (SB)) \implies \check{G} \in (SB+)$$

Remarque 3. - Principe du balayage ordinaire et principe du balayage inverse.

On considère l'ensemble (B) des noyaux G qui satisfont à : Pour tout compact K non \mathcal{E} -négligeable et pour toute mesure μ de \mathcal{M} , il existe ν dans $\mathcal{M}(K)$ tel que

$$G\nu = G\mu \quad \text{a. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\nu \leq G\mu \quad \text{sur } X .$$

Si G est positif (resp. négatif), on dit que G (resp. $-G$) vérifie le principe du balayage ordinaire (resp. inverse). On peut comparer ces propriétés à celles qui interviennent dans les semi-principes.

1° Soit G tel que, quels que soient x et y de X ,

$$G(x, y) \geq 0 \quad \text{et} \quad G(x, x) > 0 .$$

$$(G \in (B) , G \in (E) \text{ et } \check{G} \in (E)) \implies (G \in (SB+)) .$$

Une conséquence de cette observation est que le noyau newtonien et les noyaux de Riesz dans \mathbb{R}^n ($n \geq 3$) sont dans (SB+).

2° Soit G tel que, quels que soient x et y de X ,

$$G(x, y) < 0$$

$$(G \in (E) , \check{G} \in E \text{ et } G \in (SB)) \implies (G \in B) ,$$

c'est-à-dire, $-G$ vérifie le principe du balayage inverse. Les réciproques de ces propositions ne sont pas vraies en général. En effet, si on définit sur un espace à trois points les noyaux G_1 et G_2 par les matrices

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix} ,$$

On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} G_1 \in (E) , \quad \check{G}_1 \in (E) , \quad G_1 \in (SB+) \quad \text{et} \quad G_1 \notin (B) \\ G_2 \in (E) , \quad \check{G}_2 \in (E) , \quad G_2 \in (B) \quad \text{et} \quad G_2 \notin (SB) \end{aligned}$$

On notera cependant que le noyau G défini sur $\underline{\underline{R}}$ par

$$G(x, y) = -1 - (x - y)$$

est dans (B) et dans (SB+).

III. Energie.

NINOMIYA [9] a étudié des propriétés relatives au signe de l'énergie de noyaux symétriques positifs ou de signe quelconque. On donne ici des résultats pour des noyaux non symétriques.

DEFINITIONS. - Un noyau G est dit de type positif si, quels que soient μ et ν dans \mathcal{E} , on a

$$G(\mu, \mu) + G(\nu, \nu) \geq G(\mu, \nu) + G(\nu, \mu) .$$

Un noyau G est dit de type semi-positif si, quels que soient μ et ν dans \mathcal{E} avec $\int d\mu = \int d\nu$, on a

$$G(\mu, \mu) + G(\nu, \nu) \geq G(\mu, \nu) + G(\nu, \mu) .$$

1. Noyau de signe quelconque.

Dans ce paragraphe, on considère un noyau G , à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$, s. c. i. mais continu en tout point (x, y) avec $x \neq y$.

Le résultat suivant est dû à NINOMIYA.

PROPOSITION 1. - Si G est symétrique ($G = \check{G}$), il y a équivalence entre les propriétés :

(a) G est de type semi-positif ;

(b) $\forall \mu \in \mathcal{E}$, $\forall \nu \in \mathcal{E}$, $\forall a \in \underline{\underline{R}}$:

$$\left(\int d\mu = \int d\nu, S_\mu \cap S_\nu = \emptyset \text{ et } G_\mu \leq G_\nu + a \text{ sur } S_\mu \right) \\ \implies (\exists y_0 \in S_\nu, G_\mu(y_0) \leq G_\nu(y_0) + a).$$

Pour un noyau non nécessairement symétrique, on a la condition suffisante suivante :

THEOREME 3. - Si G et \check{G} sont réguliers, et si G est dans (SCM), alors G est de type semi-positif.

Démonstration. - On suppose que le noyau $G + \check{G}$ (symétrique) ne vérifie pas la propriété (b) de la proposition 1, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \exists \mu \in \mathcal{E}, \exists \nu \in \mathcal{E}, \exists a \in \underline{\mathbb{R}}, \quad \int d\mu = \int d\nu = 1, \quad S_\mu \cap S_\nu = \emptyset, \\ G_\mu + \check{G}_\mu \leq G_\nu + \check{G}_\nu + a \quad \text{sur } S_\mu \\ G_\mu + \check{G}_\mu > G_\nu + \check{G}_\nu + a \quad \text{sur } S_\nu. \end{aligned}$$

On pose

$$b = \sup_{x \in S_\mu} [\check{G}_\nu(x) - \check{G}_\mu(x)].$$

D'une part, la fonction $x \rightarrow \check{G}_\nu(x) - \check{G}_\mu(x)$ est s. c. s. sur S_μ , donc il existe x_1 dans S_μ tel que

$$b = \check{G}_\nu(x_1) - \check{G}_\mu(x_1).$$

D'autre part, on a $G_\mu \leq G_\nu + a + b$ sur S_μ donc partout, ($G \in (\text{SCM})$). On déduit

$$\check{G}_\nu \leq \check{G}_\mu + G_\mu - G_\nu - a < \check{G}_\mu + b \quad \text{sur } S_\nu.$$

Comme \check{G} est dans (SCM) d'après le théorème 2, on obtient en utilisant la remarque 2

$$b > \check{G}_\nu + \check{G}_\mu \quad \text{sur } X, \text{ en particulier en } x_1.$$

Cette contradiction achève la démonstration du théorème 3.

2. Noyau positif.

Dans ce paragraphe, on considère un noyau G , à valeurs dans $]0, +\infty]$, s. c. i. mais continu en tout point (x, y) avec $x \neq y$.

(A) Noyau symétrique.

Le résultat suivant est dû à NINOMIYA.

PROPOSITION 2. - Si G est symétrique, il y a équivalence entre les propriétés :

(a) G est de type positif ;

(b) $\forall \mu \in \mathcal{E}, \forall \nu \in \mathcal{E} :$

$$(G_\mu \leq G_\nu \text{ sur } S_\mu) \implies (\exists y_0 \in S_\nu : G_\mu(y_0) \leq G_\nu(y_0)).$$

On peut donner de cette propriété (b) une formulation d'apparence plus faible qui sera utile, d'une part pour le cas d'un noyau positif dans (SCM) (corollaire de la proposition 2'), d'autre part pour le cas d'un noyau positif non symétrique (théorème 4).

PROPOSITION 2'. - Si G est symétrique, il y a équivalence entre les propriétés :

(a) G est de type positif ;

(b') $\forall \mu \in \mathcal{E} , \forall \nu \in \mathcal{E} :$

$$\left(\int d\mu > \int d\nu , S_\mu \cap S_\nu = \emptyset , G_\mu \leq G_\nu \text{ sur } S_\mu \right) \implies (\exists y_0 \in S_\nu : G_\mu(y_0) \leq G_\nu(y_0)).$$

Il suffit évidemment de montrer que (b') entraîne (a), et pour cela la technique de Ninomiya, avec quelques précisions, convient. Si A et B sont deux compacts disjoints de X, non \mathcal{E} -négligeables, on pose

$$N(A, B) = \inf \left(\frac{G(\mu, \mu) G(\nu, \nu)}{[G(\mu, \nu)]^2} ; \mu \in \mathcal{M}^1(A) , \nu \in \mathcal{M}^1(B) \right) .$$

La propriété (a) est vérifiée si, quels que soient A et B, on a $N(A, B) \geq 1$. On suppose donnés deux tels courants A et B. D'après les hypothèses faites sur G, il existe μ_0 dans $\mathcal{E}^1(A)$ et ν_0 dans $\mathcal{E}^1(B)$ tels que

$$N(A, B) = \frac{G(\mu_0, \mu_0) G(\nu_0, \nu_0)}{[G(\mu_0, \nu_0)]^2} .$$

On pose $a = G(\mu_0, \mu_0)$, $b = G(\mu_0, \nu_0)$ et $c = G(\nu_0, \nu_0)$. Par une méthode variationnelle classique et en utilisant la symétrie de G, on trouve

$$bG_{\mu_0} \leq aG_{\nu_0} \text{ sur } S_{\mu_0} \quad \text{et} \quad bG_{\nu_0} \leq cG_{\mu_0} \text{ sur } S_{\nu_0} .$$

On établit maintenant que la propriété (b') entraîne

$$b^2 \leq a.c$$

en distinguant trois cas :

1er cas. - $b > a$.

$$\left(\begin{array}{l} b \int d\mu_0 > a \int d\nu_0 \\ bG_{\mu_0} \leq aG_{\nu_0} \text{ sur } S_{\mu_0} \end{array} \right) \implies (\exists y_0 \in S_{\nu_0} : bG_{\mu_0}(y_0) \leq aG_{\nu_0}(y_0)) ,$$

or $bG_{\nu_0}(y_0) \leq cG_{\mu_0}(y_0)$, donc $b^2 \leq a.c$.

2e cas. - $b \leq a$ et $b > c$.

$$\left(\begin{array}{l} b \int d\nu_0 > c \int d\mu_0 \\ bG_{\nu_0} \leq cG_{\mu_0} \text{ sur } S_{\nu_0} \end{array} \right) \implies (\exists x_0 \in S_\mu : bG_{\nu_0}(x_0) \leq cG_{\mu_0}(x_0)) ,$$

or $bG_{\mu_0}(x_0) \leq aG_{\nu_0}(x_0)$, donc $b^2 \leq a.c$.

3e cas. - $(b \leq a \text{ et } b \leq c) \implies (b^2 \leq ac)$.

COROLLAIRE. - Si un noyau symétrique positif est dans (SCM) , alors il est de type positif.

(B) Noyau non symétrique.

Une condition suffisante pour qu'un noyau non symétrique positif soit de type positif a été donnée récemment dans un autre cadre, par M. ITO [6]. La proposition 2' permet de donner une démonstration simple de ce résultat dont l'énoncé utilise les définitions suivantes :

DÉFINITIONS.

- On dit qu'un noyau G vérifie le principe complet du maximum ($G \in (CM)$) si
 $\forall \mu \in \mathcal{E} , \forall \nu \in \mathcal{M} , \forall a \in [0 , +\infty[, (G_\mu \leq G_\nu + a \text{ sur } S_\mu) \implies (G_\mu \leq G_\nu + a \text{ sur } X)$.

- On dit qu'un noyau G vérifie le principe de positivité des masses si

$$\forall \mu \in \mathcal{E} , \forall \nu \in \mathcal{M} : (G_\nu \geq G_\mu \text{ sur } X) \implies \left(\int d\nu \geq \int d\mu \right) .$$

THÉORÈME 4. - Si G et \check{G} sont réguliers, si G est dans (CM) et vérifie le principe de positivité des masses, alors G est de type positif.

Démonstration. - Sous les hypothèses faites, on a [1] les propriétés suivantes :

1° \check{G} est dans (CM) ;

2° Pour tout compact K et pour tout point x n'appartenant pas à K , il existe ε'_x dans $\mathcal{M}(K)$ telle que $G_{\varepsilon'_x} = G_{\varepsilon_x}$ a. p. p. p. sur K , $G_{\varepsilon'_x} \leq G_{\varepsilon_x}$ sur X et $\int d\varepsilon'_x \leq 1$.

3° Si on a $\check{G}_\nu < \check{G}_\mu + a$ sur S_ν (inégalité stricte) avec ν dans \mathcal{E} , μ dans \mathcal{E} et a dans $[0 , +\infty[$, alors $\check{G}_\nu < \check{G}_\mu + a$ sur X (inégalité stricte).

On fait ensuite un raisonnement par l'absurde analogue à celui du théorème 3.

On suppose que le noyau $G + \check{G}$ ne vérifie pas la condition (b') de la proposition 2' , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \exists \mu \in \mathcal{E} , \exists \nu \in \mathcal{E} , \quad \int d\mu > \int d\nu , \quad S_\mu \cap S_\nu = \emptyset \\ G_\mu + \check{G}_\mu \leq G_\nu + \check{G}_\nu \quad \text{sur } S_\mu \\ G_\mu + \check{G}_\mu > G_\nu + \check{G}_\nu \quad \text{sur } S_\nu \end{aligned}$$

On pose

$$a = \text{Max}[0 , \sup_{x \in S_\mu} [\check{G}_\nu(x) - \check{G}_\mu(x)]] ,$$

alors $0 \leq a < +\infty$, et $G_\mu \leq G_\nu + a$ sur S_μ , donc partout, ($G \in (CM)$). Si $a = 0$, alors $\int d\nu \geq \int d\mu$ (positivité des masses). Comme $\int d\nu < \int d\mu$, on déduit

$$0 < a = \sup_{x \in S_\mu} (\check{G}_\nu(x) - \check{G}_\mu(x)) .$$

D'une part, la fonction $x \rightarrow \check{G}_\nu(x) - \check{G}_\mu(x)$ est s. c. s. sur S_μ ; donc il existe x_1 dans S_μ tel que $a = \check{G}_\nu(x_1) - \check{G}_\mu(x_1)$.

D'autre part, $\check{G}_\nu < \check{G}_\mu + G_\mu - G_\nu \leq \check{G}_\mu + a$ sur S_ν , donc $\check{G}_\nu < \check{G}_\mu + a$ sur X , en particulier en x_1 . Cette contradiction achève la démonstration du théorème 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DURIER (Roland). - Principe des condensateurs pour un noyau dissymétrique, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, 10e année, 1965/66, n° 9, 22 p.
- [2] FAN (Ky). - Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 38, 1952, p. 121-126.
- [3] GLICKSBERG (I. L.). - A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. math. Soc., t. 3, 1952, p. 170-174.
- [4] HERZ (Carl S.). - Les théorèmes de renouvellement, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 1, p. 169-187.
- [5] HUNT (G. A.). - La théorie du potentiel et les processus récurrents, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fasc. 1, p. 3-12.
- [6] ITO (Masayuki). - Sur la régularité des noyaux de Dirichlet, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, Série A, p. 867-868.
- [7] KISHI (Masanori). - An existence theorem in potential theory, Nagoya math. J., t. 27, 1966, p. 133-137.
- [8] LA VALLÉE POUSSIN (Charles J. de). - Le potentiel logarithmique, Balayage et représentation conforme. - Paris, Gauthier-Villars; Louvain, Librairie universitaire, 1949.
- [9] NINOMIYA (Nobuyuki). - Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. of Inst. of Polyt., Osaka City Univ., Series A : Math., t. 8, 1957, fasc. 2, p. 147-179.