Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Khélifa Harzallah
Erik Thomas

Espaces nucléaires

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 13, p. 1-29
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A7_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
11e année, 1966/67, n° 13

16 février et 9 mars 1967

ESPACES NUCLÉAIRES

par Khélifa HARZALLAH et Erik THOMAS

0. Introduction.

Les espaces nucléaires furent introduits par GROTHENDIECK [5] qui en a exposé la théorie en termes de produits tensoriels topologiques. Ici, on expose quelques propriétés des espaces nucléaires sans référence explicite aux produits tensoriels, les résultats étant, bien entendu, essentiellement dus à GROTHENDIECK.

Les espaces vectoriels topologiques considérés dans la suite seront des espaces localement convexes séparés sur R ou sur C . Suivant [5], on associe à un tel espace E deux sortes d'espace normé :

(a) A tout voisinage convexe équilibré U de 0 (dont on désigne la jauge par P_U), on associe l'espace normé E_U , obtenu en munissant l'espace vectoriel quotient $E/P_U^{-1}(0)$ de la norme quotient

$$\dot{x} \longmapsto P_U(x) \qquad (x \text{ représentant de } \dot{x}).$$

L'application canonique

$$E \to E_U$$

de E sur l'espace quotient est alors continue. Quand V est un voisinage convexe équilibré contenu dans U , il existe une application unique, qui sera appelée canonique, de E_V sur E_U , telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_U \\ & E_V \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(b) A tout ensemble borné convexe équilibré B de E , on associe l'espace E_B obtenu en munissant l'espace vectoriel engendré par B de la norme jauge de B . L'injection naturelle

$$E_B \to E$$

est alors continue. Il y a un diagramme commutatif analogue au précédent, mais on se servira seulement de la propriété suivante : L'espace de Banach dual de E_U est précisément E'_{U^0} (E' désignant le dual de E , et U^0 le polaire de U).

1. Applications nucléaires.

DÉFINITION [1]. - Soient E et F deux espaces localement convexes, et soit u une application linéaire continue de E dans F. L'application u sera dite nucléaire quand elle peut être écrite sous la forme

$$u(x) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x \, , \, x'_n \rangle \, y_n \, , \tag{1}$$

où :

x'_n est une suite équicontinue de formes linéaires sur E,

y_n est une suite bornée d'éléments de F,

λ_n est une suite sommable de scalaires.

Remarque. - Dans le cas où E et F sont des espaces normés, u est nucléaire si, et seulement si,

$$u(x) = \sum_n u_n(x) \, ,$$

où u_n est une suite d'applications linéaires de rang 1, telle que $\sum_n \|u_n\| < +\infty$.

PROPRIÉTÉS.

1° Toute application nucléaire est précompacte.

2° La composée à gauche ou à droite d'une application nucléaire par une application linéaire continue est une application nucléaire.

3° (Prolongement) Soient E et F deux e. l. c. séparés, F étant complet. Soient E_1 un sous-espace vectoriel topologique de E, u_1 une application nucléaire de E_1 dans F. Alors, il existe une application nucléaire de E dans F, dont la restriction à E_1 est u_1.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, "u_1"'] & E \arrow[d, dashed] \\ & F \end{tikzcd}$$

---

[1] On obtiendrait une définition équivalente à celle de GROTHENDIECK, en imposant à la suite y_n d'appartenir à un ensemble borné convexe équilibré B, tel que l'espace F_B soit complet (voir [5], chap. 1, définition 4, p. 80 et 83). Suivant A. PIETSCH [6], nous n'avons pas imposé cette condition. Quand F est un espace complet, la présente définition coïncide avec celle de GROTHENDIECK, car alors l'enveloppe convexe équilibrée fermée B de la suite y_n est complète, et l'espace F_B est complet a fortiori.

4° La transposée d'une application nucléaire est nucléaire quand les espaces duaux sont munis de la topologie forte.

Les démonstrations sont immédiates :

1° Il suffit de remarquer que, dans la représentation (1), on peut, sans restreindre la généralité, supposer que y_n est une suite tendant vers zéro. Alors l'image par u d'un voisinage convenable de zéro est contenue dans l'enveloppe convexe équilibrée fermée de la suite y_n, et par conséquent précompacte.

2° La forme (1) est conservée en composant à gauche ou à droite par une application linéaire continue.

3° C'est une application du théorème de Hahn-Banach suivant lequel on peut prolonger les formes linéaires x'_n, définies sur E_1, à E, de sorte que la suite des prolongements soit équicontinue. Le fait que F est complet assure que la somme (1) converge encore pour tout x de E.

4° ${}^t u(y') = \sum_n \lambda_n \langle y_n , y' \rangle \, x'_n$, $y' \in F'$. La somme, convergeant normalement dans l'espace de Banach E'_{V^0} lorsque x'_n appartient à V^0, converge a fortiori dans l'espace E'_b. La suite y_n, étant bornée dans F, définit une suite équicontinue de formes linéaires sur F'_b. ${}^t u$ est donc nucléaire.

C. Q. F. D.

La propriété 2° entraîne, en particulier, que si l'application $u : E \to F$ est nucléaire, si E_1 est un sous-espace de E, et F un sous-espace de F_1, l'application composée $u : E_1 \to E \to F \to F_1$ est encore nucléaire. Par contre, si $u(E)$ est un sous-espace strict de F, l'application $u : E \to u(E)$ n'est pas, en général, nucléaire [2]. Cependant, on a la propriété suivante (voir PIETSCH [6]) :

5° Soient E un e. l. c., F un espace normé, et u une application nucléaire de E dans F, dont l'image est contenue dans un sous-espace dense G de F. Alors l'application $u : E \to G$ est nucléaire.

Démonstration. - Par hypothèse,

$$u(x) = \sum_n \langle x , x'_n \rangle \, y_n$$

([2]) Si $u(E)$ est contenue dans un facteur direct G dans F, l'application $u : E \to G$ est nucléaire, d'après la propriété de composition ; cela explique plus loin l'emploi des espaces hilbertiens.

où x'_n est une suite équicontinue de formes linéaires sur E , y_n une suite dans F telle que

$$\sum_n \|y_n\| < +\infty .$$

Comme G est dense dans F , on peut trouver une suite $\{y_{n,m}\}_m$ dans G , telle que

$$y_n = \sum_m y_{n,m} , \qquad \text{avec } \sum_m \|y_{n,m}\| \leq 2\|y_n\| .$$

Alors, si $x'_{n,m} = x'_n$, pour tout m ,

$$u(x) = \sum_{n,m} \langle x , x'_{n,m} \rangle y_{n,m} ,$$

où

$$\sum_{n,m} \|y_{n,m}\| < +\infty ,$$

ce qui prouve l'assertion.

Remarque. - En particulier, soient E un e. l. c., F un espace normé, u une application linéaire continue de E dans F ; soit, en outre, $\hat{u}$ le prolongement continu de u aux espaces complétés, et soit u_1 la restriction de $\hat{u}$ à E .

$$u : E \to F , \qquad \hat{u} : \hat{E} \to \hat{F} , \qquad u_1 : E \to \hat{F} .$$

Il y a alors équivalence entre les propositions suivantes :

u est nucléaire ;

$\hat{u}$ est nucléaire ;

u_1 est nucléaire.

2. Espaces nucléaires (définition et propriétés immédiates).

PROPOSITION. - Soit E un espace localement convexe séparé. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout espace normé F , toute application linéaire continue de E dans F est nucléaire ;

(b) E admet une base de voisinages convexes équilibrés $\mathcal{B}$, ayant la propriété suivante : Quel que soit le voisinage U dans $\mathcal{B}$, l'application canonique

$$E \to E_U$$

est nucléaire :

(c) E admet une base de voisinages convexes équilibrés $\mathcal{B}'$, ayant la propriété suivante : Quel que soit le voisinage U dans $\mathcal{B}'$, il existe V dans $\mathcal{B}'$, V contenu dans U , tel que l'application canonique $E_V \to E_U$ soit nucléaire.

DÉFINITION. - On appelle espace nucléaire, un espace localement convexe séparé satisfaisant aux propriétés (a), (b), (c) ci-dessus (3).

Démonstration de l'équivalence de (a), (b), (c).

(a) implique (b) : C'est trivial.

(b) implique (c) : En effet, on peut prendre $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Soit U un voisinage dans la base $\mathcal{B}$, et notons $x \mapsto \ddot{x}$ l'application canonique $E \to E_U$, qui est nucléaire par hypothèse, et s'écrit

$$\ddot{x} = \sum_n \lambda_n \langle x \, , \, x'_n \rangle \, \ddot{x}_n \, ,$$

où x'_n est une suite équicontinue de formes linéaires sur E . x'_n appartient au polaire V^0 d'un voisinage V , et on peut, quitte à diminuer V , supposer que V est contenu dans U et appartient à $\mathcal{B}$. Alors l'application canonique $\dot{x} \to \ddot{x}$ de E_V sur E_U s'écrit

$$\ddot{x} = \sum_n \lambda_n \langle \dot{x} \, , \, \dot{x}'_n \rangle \, \ddot{x}_n \, ,$$

où $\dot{x}'_n$ désigne la forme linéaire (de norme inférieure à 1) sur E_V , obtenue par passage au quotient à partir de x'_n . La suite $\ddot{x}_n$ étant bornée dans E_U , et la suite λ_n étant sommable par hypothèse, l'application canonique $E_V \to E_U$ est bien nucléaire ; $\mathcal{B}$ satisfait la propriété (c).

(c) implique (a) : Soit F un espace normé arbitraire, et soit $u : E \to F$ une application linéaire continue. Soit U un voisinage de la base $\mathcal{B}'$ contenu dans l'image réciproque par u de la boule unité de F . Soit V un voisinage de la base $\mathcal{B}'$ contenu dans U tel que l'application canonique $E_V \to E_U$ soit nucléaire, alors l'application u étant composée,

$$u : E \to E_V \to E_U \to F$$

est nucléaire d'après la propriété 2° des applications nucléaires.

---

(3) Cette définition est bien équivalente à celle de GROTHENDIECK (voir [5], chap. 2, p. 34, théorème 6, et, dans cet exposé, la propriété 5 des applications nucléaires, ainsi que la remarque à la fin du § 1).

Exemple (trivial) : Tout e. l. c. séparé muni de sa topologie affaiblie est nucléaire (voir § 5, pour d'autres exemples).

Remarque. - Pour que E soit un espace nucléaire, il suffit que la propriété (a) de la définition soit vérifiée pour tout espace de Banach : E est nucléaire, si les applications linéaires continues, à valeurs dans les espaces de Banach, sont nucléaires (voir la propriété 5° des applications nucléaires). Il s'ensuit, en particulier, que E est nucléaire si, et seulement si, son complété est nucléaire.

PROPOSITION. - Dans un espace nucléaire, toute partie bornée est précompacte. Dans un espace nucléaire complet, toute partie fermée bornée est compacte.

Démonstration. - Il suffit de prouver la première assertion. C'est une conséquence du fait que E est un sous-espace vectoriel topologique du produit $\prod_{V \in \mathfrak{B}} E_V$ ($\mathfrak{B}$ base de voisinages de E) et du fait que les projections $E \to E_V$ sont nucléaires donc précompactes.

DÉFINITION. - Soient E et F deux e. l. c., et soit B une forme bilinéaire continue sur $E \times F$. On dira que B est nucléaire, quand elle peut être écrite sous la forme

$$B(x , y) = \sum_n \lambda_n \langle x , x'_n \rangle \langle y , y'_n \rangle , \tag{2}$$

où x'_n (resp. y'_n) est une suite équicontinue de formes linéaires sur E (resp. F), et où λ_n est une suite sommable de scalaires.

THÉORÈME (des noyaux). - Soient E un espace nucléaire, et F un espace localement convexe quelconque. Alors toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ est nucléaire.

Ce théorème généralise, dans un sens, le théorème des noyaux de L. SCHWARTZ, selon lequel toute forme bilinéaire continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est de la forme

$$B(\varphi , \psi) = \langle T , \varphi \otimes \psi \rangle ,$$

où T est une distribution sur l'espace produit.

Le théorème des noyaux ci-dessus est caractéristique des espaces nucléaires, et est à l'origine du terme "nucléaire" (voir § 3 du présent exposé).

Démonstration. - Soit B une forme bilinéaire sur $E \times F$. Il existe des semi-normes continues p et q telles que

$$|B(x\ ,\ y)| \leqslant p(x)\ q(y)\ , \qquad \forall\ x \in E\ ,\ \forall\ y \in F\ .$$

Soit $U = \{x \in E\ :\ p(x) \leqslant 1\}$. L'application bilinéaire B se décompose en facteurs :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[rr, dashed, "B"'] \arrow[dr] & & \underset{\sim}{C} \\ & E_U \times F \arrow[ur, "\dot{B}"'] & \end{tikzcd}$$

$\dot{B}$ étant une forme bilinéaire continue sur $E_U \times F$.

L'application canonique $x \to \dot{x}$ de E sur E_U est nucléaire, donc s'écrit

$$\dot{x} = \sum \lambda_n \langle x\ ,\ x'_n\rangle\ \dot{x}_n\ ,$$

où x'_n est une suite équicontinue de formes linéaires sur E , $\dot{x}_n$ est une suite de normes inférieures à 1 dans E_U , et λ_n est une suite de scalaires sommables. Alors,

$$\begin{aligned} B(x\ ,\ y) = \dot{B}(\dot{x}\ ,\ y) &= \sum \lambda_n \langle x\ ,\ \dot{x}_n\rangle\ \dot{B}(\dot{x}_n\ ,\ y) \\ &= \sum \lambda_n \langle x\ ,\ x'_n\rangle\ B(x_n\ ,\ y) \end{aligned}$$

(x_n représentant de $\dot{x}_n$).

Définissons la suite y'_n par $\langle y\ ,\ y'_n\rangle = B(x_n\ ,\ y)$.

$$|\langle y\ ,\ y'_n\rangle| \leqslant p(x_n)\ q(y) \leqslant q(y)\ .$$

Cela prouve que la suite y'_n est équicontinue, et achève la démonstration.

Remarque. - On a démontré plus précisément que, sous les hypothèses du théorème, on peut représenter sous la forme (2) un ensemble équicontinu de formes bilinéaires, la suite λ_n et la suite x'_n demeurant fixes, la suite y'_n étant extraite d'une partie équicontinue fixe de F' .

3. Critères de nucléarité en termes de mesures de Radon.

Soit E un e. l. c., et soit A une partie équicontinue du dual E' , fermée pour la topologie faible $\sigma(E'\ ,\ E)$. Alors A est compacte pour cette topologie.

DÉFINITION. - On dira qu'une semi-norme p sur E est de type L^1 , si elle peut être écrite sous la forme

$$p(x) = \int_A |\langle x\ ,\ x'\rangle|\ d\mu(x')\ ,$$

où A est une partie équicontinue faiblement fermée du dual, et μ est une mesure de Radon positive sur A.

Une semi-norme de type L^1 est évidemment continue. La représentation ci-dessus n'est pas unique. On peut, si $\mu \neq 0$, se ramener au cas où la masse de μ est 1 (prendre à la place de μ l'image de $\frac{1}{\mu(A)}\mu$ par l'homothétie de rapport $\mu(A)$).

On définit de la même manière les semi-normes de type L^2 :

$$q(x) = \left(\int_A |\langle x , x' \rangle|^2 \, d\mu(x')\right)^{\frac{1}{2}}$$

et plus généralement de type L^p.

Ceci étant, on a le critère suivant :

CRITÈRE (PIETSCH) (4). - Un e. l. c. séparé E est nucléaire si, et seulement si, chaque semi-norme continue est majorée par une semi-norme de type L^1.

C'est une conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit E un e. l. c. séparé. Alors, chacune des propriétés suivantes est équivalente à la nucléarité de E :

1° Les semi-normes de type L^1 forment un système fondamental de semi-normes continues de E ;

2° Les semi-normes de type L^2 forment un système fondamental de semi-normes continues de E ;

3° (i) Il existe une base $\mathcal{B}_2$ de voisinages convexes équilibrés de 0 dans E, telle que pour $U \in \mathcal{B}_2$, $\hat{E}_U$ soit un espace de Hilbert ;

(ii) Pour tout U dans $\mathcal{B}_2$, il existe V dans $\mathcal{B}_2$, $V \subset U$ tel que l'application canonique

$$\hat{E}_V \to \hat{E}_U$$

soit une application de Hilbert-Schmidt (5).

Démonstration. - Dans l'ordre :

$$E \text{ nucléaire} \Longrightarrow 1° \Longrightarrow 2° \Longrightarrow 3° \Longrightarrow E \text{ nucléaire.}$$

---

(4) Ce critère a été énoncé par A. PIETSCH [6]. C'est une conséquence de [5] (chap. 1, définition 7, p. 126-127, et corollaire du théorème 10, p. 134). On en donne ici une démonstration élémentaire, suivant SCHAEFER [7].

(5) $\hat{E}_U$ désigne le complété de E_U.

Supposons E nucléaire, et soit p une semi-norme continue. Soit

$$U = \{x : p(x) \leq 1\} ,$$

l'application canonique $E \to E_U$, étant nucléaire, s'écrit

$$x \longmapsto \dot{x} = \sum_n \lambda_n \langle x , x'_n \rangle \dot{x}_n ,$$

où x'_n est une suite de formes linéaires équicontinue, λ_n une suite de scalaires sommable, et x_n une suite dans E telle que $p(x_n) \leq 1$. Si $\dot{p}$ désigne la norme quotient sur E_U,

$$p(x) = \dot{p}(\dot{x}) \leq \sum_n |\lambda_n| \, |\langle x , x'_n \rangle| ,$$

mais le membre de droite est la semi-norme de type L^1, définie par la mesure de masse $|\lambda_n|$ au point x'_n. Les semi-normes de type L^1 forment bien un système fondamental.

1° implique 2° : C'est évident, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\int_A |\langle x , x' \rangle| \, d\mu(x') \leq \mu(A)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_A |\langle x , x' \rangle|^2 \, d\mu(x')\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

2° implique 3° : D'après 2°, l'ensemble des voisinages de la forme

$$U = \{x : q(x) \leq 1\} ,$$

où q parcourt l'ensemble des semi-normes de type L^2, forme une base de voisinages que nous prenons comme base $\mathcal{B}_2$. Si

$$q(x) = \Big(\int_A |\langle x , x' \rangle|^2 \, d\mu(x')\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad U = \{x \mid q(x) \leq 1\} ,$$

E_U s'identifie à un sous-espace de $L^2(A , \mu)$, donc $\hat{E}_U$ est bien un espace de Hilbert.

Pour satisfaire à (ii), montrons que, si V est un voisinage de $\mathcal{B}_2$ tel que $V \subset U \cap A^0$, l'application canonique

$$\varphi : \hat{E}_V \to \hat{E}_U$$

est une application de Hilbert-Schmidt. On doit démontrer pour cela que, si $(\hat{x}_\alpha)_\alpha$ est une base orthonormée de $\hat{E}_V$,

$$\sum_\alpha \|\varphi(\hat{x}_\alpha)\|_U^2 < +\infty \qquad (\| \ \|_U \text{ , norme dans } \hat{E}_U) .$$

Soit x un élément de E, et $\dot{x}$ (resp. $\ddot{x}$) son image canonique dans E_V (resp. E_U). Alors,

$$\varphi(\dot{x}) = \ddot{x} \quad \text{et} \quad \|\varphi(\dot{x})\|_U^2 = \int_A |\langle x , x'\rangle|^2 \, d\mu(x') .$$

Le dual de $\hat{E}_V$ est E'_{V^0}. $\hat{E}_V$ étant hilbertien, on a un anti-isomorphisme

$$\theta : E'_{V^0} \to \hat{E}_V$$

tel que

$$(\dot{x}|\theta x')_V = \langle x , x'\rangle , \qquad \forall\, x' \in E'_{V^0} .$$

θ est en outre faiblement continu, et transforme la boule unité V^0 de E'_{V^0} en la boule unité B de $\hat{E}_V$.

Soit alors ν l'image par θ de la mesure μ ; comme $V \subset A^0$, $A \subset V^0$, donc ν est portée par B. ν a d'ailleurs la même <u>masse finie</u> que μ.

$$\|\varphi(\dot{x})\|_U^2 = \int_A |(\dot{x}|\theta x')_V|^2 \, d\mu(x') = \int_B |(\dot{x}|y)_V|^2 \, d\nu(y) .$$

Par continuité, on a

$$\|\varphi(\hat{x})\|_U^2 = \int_B |(\hat{x}|y)_V|^2 \, d\nu(y) , \qquad \forall\, \hat{x} \in \hat{E}_V .$$

Si $(\hat{x}_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une base orthonormée, dans $\hat{E}_V$, on a, pour toute partie finie J de I,

$$\sum_{\alpha\in J} \|\varphi(\hat{x}_\alpha)\|^2 = \int_B \sum_{\alpha\in J} |(\hat{x}_\alpha|y)_V|^2 d\nu(y) \leq \int_B \|y\|_V^2 \, d\nu(y) \leq \int_B d\nu ,$$

donc

$$\sum_{\alpha\in I} \|\varphi(\hat{x}_\alpha)\|^2 \leq \int_B d\nu < +\infty ,$$

ce qui prouve que φ est une application de Hilbert-Schmidt, et que $\mathfrak{B}_2$ satisfait aux propriétés (i) et (ii).

3° entraîne que E est nucléaire. Cela découle immédiatement du critère (c) de nucléarité et du lemme suivant :

LEMME. - <u>Soient</u> H_1, H_2, H_3 <u>des espaces de Hilbert ; et soient</u> $u : H_1 \to H_2$ <u>et</u> $v : H_2 \to H_3$ <u>des applications de Hilbert-Schmidt. Alors l'application composée</u>

$$w = v \circ u : H_1 \to H_3$$

est nucléaire.

Rappelons qu'une application linéaire $u : H_1 \to H_2$ est dite application de Hilbert-Schmidt, quand il existe une base orthonormée $(x_\alpha)_\alpha$ de H_1 telle que la somme

$$(\Sigma) \qquad \sum_{\alpha \in I} \|u(x_\alpha)\|^2 < +\infty$$

est finie.

Dans ce cas, tous les termes de cette somme, sauf au plus une infinité dénombrable d'entre eux, sont nuls, donc l'image $u(H_1)$ est séparable.

D'autre part, si $(y_\beta)_\beta$ est une base orthonormée de H_2,

$$u(x_\alpha) = \sum_\beta (u(x_\alpha)|y_\beta)\, y_\beta ,$$

de sorte que

$$\sum_\alpha \|u(x_\alpha)\|^2 = \sum_{\alpha,\beta} (u(x_\alpha)|y_\beta)^2 = \sum_{\alpha,\beta} (x_\alpha|u^*(y_\beta)) = \sum_\beta \|u^*(y_\beta)\|^2 .$$

Il s'ensuit que la somme (Σ) ci-dessus est indépendante de la base orthonormée $(x_\alpha)_\alpha$ choisie, et que l'adjoint u^* de u est aussi une application de Hilbert-Schmidt.

Ceci étant, montrons que l'application $w = v \circ u$ est nucléaire, v et u étant de Hilbert-Schmidt. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée dans $u(H_1)$,

$$u(x) = \sum_n (u(x)|y_n)\, y_n ,$$

alors

$$w(x) = \sum_n w_n(x) ,$$

où

$$w_n(x) = (u(x)|y_n)\, v(y_n) = (x|u^*(y_n))\, v(y_n) ;$$

w_n est de rang 1, et

$$\|w_n\| \leq \|u^*(y_n)\|\, \|v(y_n)\| ,$$

u^* et v étant de Hilbert-Schmidt,

$$\sum \|w_n\| \leq \left(\sum_n \|u^*(y_n)\|^2 \sum_n \|v(y_n)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty .$$

Cela prouve que w est nucléaire, d'où le lemme.

Pour achever la démonstration du théorème, on remarque qu'une base $\mathcal{B}_2$ satisfaisant aux propriétés (i) et (ii), satisfait aussi à la propriété (c) : $\forall\, U \in \mathcal{B}_2$, $\exists\, V \in \mathcal{B}_2$, $V \subset U$ tel que l'application canonique $E_V \to E_U$ soit nucléaire. Cela découle du lemme précédent et de la remarque suivant la propriété 5° des applications nucléaires, et cela termine la démonstration du théorème.

Remarque. - La caractérisation 3° permet le lien avec le point de vue de GEL'FAND et VILENKIN [3] sur les espaces nucléaires. Il est facile, en effet, d'en déduire le critère suivant :

CRITÈRE. - Un espace de Fréchet est nucléaire si, et seulement si, il est limite projective

$$F = \varprojlim p_{n,m}\, H_n$$

d'une suite d'espaces de Hilbert, les projections $p_{n,m}$ étant nucléaires (ou seulement Hilbert-Schmidt, ou seulement pour m assez grand par rapport à n).

COROLLAIRE (Réciproque du théorème des noyaux). - Soit E un e. l. c. tel que, pour tout espace de Banach F , les formes bilinéaires continues sur $E \times F$ soient nucléaires. Alors E est un espace nucléaire.

Démonstration. - On montre que le critère de Pietsch est satisfait : Soit p une semi-norme continue sur E . Soit $U = \{x :\ p(x) \leq 1\}$. La forme bilinéaire continue

$$(x\ ,\ x') \longmapsto \langle x\ ,\ x'\rangle \quad \text{sur} \quad E \times E'_{U^0}$$

est nucléaire.

$$\langle x\ ,\ x'\rangle = \sum \lambda_n \langle x\ ,\ x'_n\rangle \langle x'\ ,\ x''_n\rangle ,$$

où x'_n est une suite équicontinue de formes linéaires sur E , x''_n une suite de formes linéaires sur E'_{U^0} de norme inférieure à 1 , et où (λ_n) est une suite de scalaires sommable. Alors

$$p(x) = \sup_{x' \in U^0} |\langle x\ ,\ x'\rangle| \leq \sum |\lambda_n|\ |\langle x\ ,\ x'_n\rangle| ,$$

p est majoré par la semi-norme de type L^1, définie par la mesure de masse $|\lambda_n|$ au point x'_n.

4. Théorèmes de permanence.

THÉORÈME 1. - Tout sous-espace vectoriel topologique d'un espace nucléaire est nucléaire.

THÉORÈME 2. - Tout espace quotient séparé d'un espace nucléaire est nucléaire.

THÉORÈME 3. - La somme directe localement convexe d'une suite d'espaces nucléaires est nucléaire.

THÉORÈME 4. - Tout produit d'espaces nucléaires est nucléaire.

Il s'ensuit que toute limite projective d'espaces nucléaires est nucléaire (sous-espace d'un produit), et que la limite inductive d'une suite d'espaces nucléaires est nucléaire (quotient séparé d'une somme directe localement convexe).

Rappelons qu'un espace localement convexe est nucléaire si, et seulement si, son complété est nucléaire. Nous énonçons sans démonstration le théorème suivant :

THÉORÈME 5. - Un espace de Fréchet est nucléaire si, et seulement si, son dual (fort) est nucléaire.

Nous donnons ici des démonstrations des théorèmes 1 à 4 à peu près telles qu'elles sont indiquées dans [7]. Pour la démonstration du théorème 5, on pourrait consulter, outre [5], les travaux de SCHAEFER [7] et SCHWARTZ [11].

Démonstration du théorème 1. - Soient E un espace nucléaire, et F un sous-espace. Soit $V = F \cap U$, $U \in \mathcal{B}_2$ (base de voisinages hilbertiens). On démontre que l'application canonique

$$F \to F_V ,$$

ou ce qui revient au même (§ 1, propriété 5°), que l'application

$$F \to \hat{F}_V$$

est nucléaire.

La jauge de V dans F est la restriction à F de la jauge de U dans E. F_V s'identifie à un sous-espace de E_U, et $\hat{F}_V$ à un sous-espace de $\hat{E}_U$. L'application $F \to \hat{F}_V$ est alors composée suivant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \hat{E}_U \\ i\uparrow & & \downarrow p \\ F & \to & \hat{F}_V \end{array}$$

où i désigne l'injection canonique de F dans E , et p la projection orthogonale de $\hat{E}_U$ sur $\hat{F}_V$ (ou n'importe quel projecteur continu de $\hat{E}_U$ sur $\hat{F}_V$). Elle est donc nucléaire, d'après la propriété 2° du § 1.

Démonstration du théorème 2. - Soient E nucléaire, et $F = E/N$ un espace quotient séparé. On montre que F satisfait la propriété (c). Soit $\pi : E \to F$ l'application canonique sur le quotient.

Soit $\mathcal{B}^1$ l'ensemble des voisinages de la forme $\pi(U)$ où $U \in \mathcal{B}_2$. $\mathcal{B}^1$ est une base de voisinages dans F . Montrons que $\mathcal{B}^1$ a la propriété (c).

Soit $V = \pi(U) \in \mathcal{B}^1$. Il existe $U_1 \in \mathcal{B}_2$, $U_1 \subset U$ tel que l'application canonique

$$\hat{E}_{U_1} \to \hat{E}_U$$

soit nucléaire. Alors, si $V_1 = \pi(U_1)$, l'application canonique

$$\hat{F}_{V_1} \to \hat{F}_V$$

est nucléaire (ce qui entraîne (c), d'après la remarque suivant la proposition 5 du § 1). En effet, $\hat{F}_V$ (resp. $\hat{F}_{V_1}$) s'identifie cette fois à un espace quotient de $\hat{E}_U$ (resp. $\hat{E}_{U_1}$), et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \hat{E}_{U_1} & \to & \hat{E}_U \\ \downarrow\ \uparrow & & \downarrow \\ \hat{F}_{V_1} & \to & \hat{F}_V \end{array}$$

$\hat{E}_{U_1}$ étant un espace de Hilbert, $\hat{F}_{V_1}$ peut être identifié à un sous-espace de $\hat{E}_{U_1}$. On conclut comme précédemment.

Démonstration du théorème 3. - Soit $E = \bigoplus E_n$ la somme directe localement convexe d'une suite d'espaces nucléaires. Comme ensemble, E est le sous-espace de $\prod_n E_n$ formé par les familles (x_n) , dont toutes, sauf un nombre fini de composantes, sont nulles. La topologie admet pour base de voisinages de 0 les enveloppes convexes équilibrées d'ensembles $\prod_n U_n$, où U_n est un voisinage de 0 arbitraire dans E_n . On identifie E_n à un sous-espace de E .

Montrons que E satisfait la propriété (a): Si F est un espace normé arbitraire, u une application linéaire continue de E dans F , alors u est nucléaire.

Soit u_n la restriction de u à E_n . u_n est nucléaire, donc

$$u_n(x_n) = \sum_i \lambda_{n,i} \langle x_n , x'_{n,i} \rangle y_{n,i} ,$$

où

$$\|y_{n,i}\| \leq 1 , \qquad \sum_i |\lambda_{n,i}| \leq \frac{1}{n^2} ,$$

$\{x'_{n,i}\}_i$ est une suite équicontinue pour chaque n . Désignons par $z'_{n,i}$ la forme linéaire sur E obtenue en prolongeant $x'_{n,i}$ par zéro sur les espaces facteurs différents de E_n .

$$\langle x , z'_{n,i} \rangle = \sum_k \langle x_k , z'_{n,i} \rangle = \langle x_n , x'_{n,i} \rangle .$$

Si $x'_{n,i} \in U_n^0$, U_n voisinage de 0 dans E_n ,

$$\prod_n U_n \subset \{x \in E : |\langle x , z'_{n,i} \rangle| \leq 1\} .$$

Cela prouve que la suite $z'_{n,i}$ est équicontinue sur E (l'enveloppe convexe équilibrée de $\prod U_n$ est aussi contenue dans le second ensemble ci-dessus). Pour tout x de E ,

$$u(x) = \sum_{i,n} \lambda_{n,i} \langle x , z'_{n,i} \rangle y_{n,i} ,$$

et comme

$$\sum_{i,n} |\lambda_{n,i}| < + \infty ,$$

cette formule prouve que u est nucléaire.

<u>Démonstration du théorème 4.</u> - Soit

$$E = \prod_{i \in I} E_i ,$$

un produit arbitraire d'espaces nucléaires. On montre que E satisfait la propriété (a).

Soient F normé, et $u : E \to F$ linéaire continue. Compte tenu de la structure des voisinages de 0 dans E, il est clair qu'il existe une partie finie J de I, telle que u se factorise :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & F \\ & \prod_{i\in J} E_i \arrow[ur, "\mathring{u}"'] & \end{tikzcd}$$

Or,

$$\prod_{i\in J} E_i = \bigoplus_{i\in J} E_i$$

est nucléaire, d'après ce qui précède, donc $\mathring{u}$ est une application nucléaire, donc aussi u, d'après la propriété 2° des applications nucléaires.

5. Exemples.

A. Exemples d'applications nucléaires.

(a) Soit $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur l'espace compact K à valeurs réelles (resp. complexes), et soit E un e. l. c. séparé sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$).

Soit

$$m : \mathcal{C}(K) \to E$$

une application nucléaire (mesure vectorielle nucléaire). m est donc de la forme

$$m(\varphi) = \sum_n \langle \varphi , \mu_n \rangle \, y_n ,$$

où y_n est une suite bornée dans E, et où μ_n est une suite de mesures de Radon sur K, telle que

$$\sum_n \|\mu_n\| < +\infty .$$

Soit

$$\mu = \sum_n |\mu_n| .$$

Chaque mesure μ_n est à densité ρ_n par rapport à μ, et on peut supposer

$$\sum_n |\rho_n| = 1 .$$

m s'écrit alors

$$m(\varphi) = \int \overrightarrow{f(t)}\ \varphi(t)\ d\mu(t)\ ,$$

où $\overrightarrow{f(t)} = \Sigma\, \rho_n(t)\ y_n$.

On a donc démontré la proposition suivante :

PROPOSITION. - Toute mesure nucléaire sur un espace compact est à densité (bornée) par rapport à une mesure scalaire positive.

La densité admet, en outre, une représentation en série comme ci-dessus.

Remarque. - En particulier, la mesure m est continue pour la topologie induite par $L^1(\mu)$.

On démontre qu'inversement, si E est un espace de Fréchet, toute mesure vectorielle à densité (dans $L^1_E(\mu)$) par rapport à μ est nucléaire [6]. Il en découle, par exemple, qu'une application linéaire de $\mathcal{C}(K)$ dans $\mathcal{C}(K')$ définie par un noyau continu G et une mesure scalaire μ , est nucléaire :

$$V_\varphi(x) = \int G(x\ ,\ y)\ \varphi(y)\ d\mu(y)\ ,$$

ou

$$V_\varphi = \int G_y\ \varphi(y)\ d\mu(y)\ , \qquad G_y(x) = G(x\ ,\ y)\ .$$

V est bien une mesure à densité (continue) par rapport à μ .

(b) De la même manière, on montre que les applications nucléaires définies sur un espace $L^1(\mu)$ sont de la forme

$$u(f) = \int \vec{g} f\ d\mu\ ,$$

où $\vec{g}$ est une fonction vectorielle bornée admettant un certain développement en série.

B. Exemples d'espaces nucléaires.

1° Sous-espaces nucléaires d'un espace $\mathcal{C}(\Omega)$. - Soient Ω un espace localement compact, et $\mathcal{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω (réelles ou complexes), muni de la topologie de la convergence compacte définie par les semi-normes

$$p_K(\varphi) = \sup_{t \in K} |\varphi(t)|\ .$$

---

(6) Pour une démonstration élémentaire, voir [7], p. 94-96.

THÉORÈME [7]. - Soit E un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}(\Omega)$. Pour que E soit nucléaire, il faut et il suffit qu'à chaque compact K , on puisse associer une mesure de Radon positive à support compact, μ , telle que

$$p_K(\varphi) \leq \int |\varphi| \, d\mu \ , \qquad \forall \ \varphi \in E \ .$$

Démonstration. - La condition est suffisante, d'après le critère de Pietsch : En effet, la semi-norme

$$\varphi \longmapsto \int |\varphi| \, d\mu$$

est une semi-norme de type L^1 au sens du § 3, car les formes linéaires sur E ,

$$\dot{\delta}_{(t)} : \ \varphi \longmapsto \varphi(t) \ ,$$

forment un ensemble équicontinu, quand t parcourt le support compact de μ . De plus, l'application

$$t \longmapsto \dot{\delta}_{(t)}$$

est faiblement continue, puisque E est constitué de fonctions continues. Si ν est la mesure image de μ par cette application,

$$\int |\varphi| \, d\mu = \int_A |\langle \varphi \ , \ \delta \rangle| \, d\nu(\delta) \ ,$$

où

$$A = U^0 \ , \qquad U = \{\varphi \in E \ ; \ p_{\mathrm{Supp}\ \mu}(\varphi) \leq 1\} \ .$$

La condition est nécessaire : Notons E_K l'espace E_U , où

$$U = \{\varphi \in E : \ p_K(\varphi) \leq 1\} \ .$$

E_K s'identifie au sous-espace de $\mathcal{C}(K)$ constitué par les restrictions à K des fonctions de E . Si E est nucléaire, on a la propriété suivante :

Quel que soit le compact K , il existe K^1 contenant K tel que l'application canonique

$$E_{K^1} \to E_K$$

---

(7) Ce théorème sera énoncé par HINRICHSEN dans un exposé du présent séminaire [10]. Nous le démontrons ici en faisant appel seulement aux notions introduites dans cet exposé.

soit nucléaire (cette application est simplement le "restriction"). D'après les propriétés 2° et 3° du § 1 , cette application admet un prolongement nucléaire

$$\mathcal{C}(K^1) \to \hat{E}_K .$$

Ce prolongement est une mesure nucléaire, et d'après une remarque faite à propos de l'exemple précédent, il existe une mesure μ sur K^1 telle que l'application soit continue par rapport à la topologie induite par $L^1(\mu)$. L'application restriction $E_{\cdot K^1} \to E_K$ est donc elle-même continue par rapport à la topologie induite par $L^1(\mu)$. C'est dire qu'il existe une constante C telle que

$$p_K(\varphi) \leq C \int |\varphi| \, d\mu , \qquad \forall \varphi \in E .$$

C. Q. F. D.

Remarque. - On a, a fortiori,

$$p_K(\varphi) \leq C'(\int |\varphi|^2 \, d\mu)^{\frac{1}{2}} , \qquad \forall \varphi \in E .$$

Réciproquement, si, à chaque compact K , on peut associer une mesure μ vérifiant l'inégalité ci-dessus, l'espace E est nucléaire. Cela découle du théorème du § 3.

Le théorème des noyaux donne ici le résultat suivant :

Soit E un sous-espace nucléaire de $\mathcal{C}(\Omega)$. Alors, toute forme bilinéaire continue sur $E \times E$ (ou $E \times \mathcal{C}(\Omega)$) est de la forme

$$B(\varphi , \psi) = \int \varphi(x) \, \psi(y) \, d\mu(x , y) ,$$

où μ est une mesure à support compact sur $\Omega \times \Omega$. En effet, on sait que

$$B(\varphi , \psi) = \sum \lambda_n \langle \varphi , \mu_n \rangle \langle \psi , \nu_n \rangle ;$$

où (μ_n) (resp. (ν_n)) est une suite de mesures de Radon à support contenu dans un compact indépendant de n , de masse uniformément bornée, et où λ_n est une suite de scalaires sommable [8]. Alors, la mesure

$$\mu = \sum_n \lambda_n (\mu_n \otimes \nu_n)$$

convient.

---

(8) En principe, il s'agit d'une suite équicontinue de formes linéaires x'_n sur E . Mais, d'après HAHN-BANACH, on peut trouver une suite μ_n de formes linéaires équicontinues sur $\mathcal{C}(\Omega)$, telle que μ_n prolonge x'_n .

2° Espaces de fonctions indéfiniment dérivables. - L'espace $\mathcal{D}_K$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\underset{\sim}{R}^n$, à support dans le compact K , muni de la topologie de la convergence uniforme pour toutes les dérivées , est un espace nucléaire. C'est une conséquence immédiate du critère de Pietsch :

$$\sup |\varphi(t)| \leq \int |\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)| \, dx , \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} .$$

Les formes linéaires

$$\varphi \longmapsto \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)$$

forment un ensemble équicontinu et dépendent continûment (pour la topologie faible) de x . Comme précédemment (exemple précédent), il s'ensuit que la semi-norme figurant à droite dans l'inégalité ci-dessus est une semi-norme de type L^1 . De même, pour tout symbole de dérivation D ,

$$\sup_t |D\varphi(t)| \leq \int |\frac{\partial}{\partial x} D\varphi(x)| \, dx ,$$

et la semi-norme à droite est de type L^1 . Les semi-normes de type L^1 formant un système fondamental de semi-normes, $\mathcal{D}_K$ est bien nucléaire. L'espace $\mathcal{D}$, limite inductive d'une suite d'espaces $\mathcal{D}_K$, est donc aussi nucléaire.

L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\underset{\sim}{R}^n$, muni de la topologie de la convergence compacte pour toutes les dérivées, est nucléaire, étant sous-espace d'un produit d'espaces $\mathcal{D}_K$ (cf. [11]). D'ailleurs, on peut aussi appliquer directement le critère de Pietsch en utilisant l'inégalité :

$$\sup_{t\in(a,b)} |\varphi(t)| \leq \int_a^b |\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)| \, dx + \frac{1}{\text{mes } (a,b)} \int_a^b |\varphi(x)| \, dx ,$$

où

$$(a , b) = \prod_{i=1}^n (a_i , b_i) , \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} , \qquad \int_a^b = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{a_n}^{b_n} ,$$

$$\text{mes } (a , b) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) , \qquad a_i < b_i .$$

La semi-norme à droite est une semi-norme de type L^1 sur $\mathcal{E}$, et il en est de même des semi-normes obtenues en remplaçant φ par une de ces dérivées. Les semi-normes de type L^1 définissent bien la topologie de $\mathcal{E}$.

Le théorème des noyaux donne ici le résultat (classique) suivant :

Toute forme bilinéaire continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$) est de la forme

$$\mathcal{B}(\varphi , \psi) = \langle T , \varphi \otimes \psi \rangle ,$$

où T est une distribution dans l'espace produit (resp. une distribution à support compact dans l'espace produit). Pour démontrer ceci dans le cas de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, on peut se ramener aux espaces $\mathcal{D}_K \times \mathcal{D}_K$ par restriction. Les formes linéaires T_K sur $\mathcal{D}_{K\times K}$ obtenues comme dans l'exemple du 1° vérifient

$$\mathcal{B}(\varphi , \psi) = \langle T_K , \varphi \otimes \psi \rangle , \qquad \forall \varphi , \psi \in \mathcal{D}_K .$$

T_K est bien déterminée par $\mathcal{B}$, et quand $K \subset K^1$, $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_{K^1}$, et T_{K^1} prolonge T_K . Les T_K sont donc les restrictions d'une distribution T qui convient.

3° L'espace des fonctions harmoniques sur $\underset{\sim}{R}^n$. - Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. L'espace des fonctions harmoniques dans Ω (réelles ou complexes) est nucléaire.

En effet, la propriété de la médiation spatiale donne immédiatement le résultat suivant : Pour tout compact $K \subset \Omega$, soit

$$H = \{x : d(x , K) \leq \varepsilon\} ,$$

ε étant assez petit pour que $H \subset \Omega$. Alors,

$$p_K(u) \leq \mathrm{Cte} \int_H |u| \, dx , \qquad \text{pour toute fonction harmonique } u .$$

L'espace est donc nucléaire, d'après le critère de Pietsch (voir le 1° ci-dessus).

On pourrait aussi déduire ce résultat des propriétés de permanence des espaces nucléaires, mais celles-ci donnent des résultats plus généraux :

4° Espaces de solutions d'une équation $Du = 0$, où D est un opérateur différentiel hypo-elliptique. - Soit Ω un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. Soit E un sous-espace vectoriel topologique fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$, constitué par des fonctions indéfiniment différentiables. Alors E est nucléaire.

En effet, la topologie de E (induite par $\mathcal{C}(\Omega)$) coïncide avec la topologie induite par $\mathcal{E}(\Omega)$, d'après le théorème du graphe fermé. E est donc nucléaire comme sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega)$.

En particulier, si D est un opérateur continu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ tel que les solutions de l'équation $DT = 0$ soient des fonctions indéfiniment différentiables, l'espace des solutions muni de la topologie induite par $\mathcal{C}(\Omega)$ est nucléaire.

Un autre cas où l'on se trouve dans la situation décrite ci-dessus est le cas suivant :

5° L'espace des fonctions holomorphes. - L'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert Ω de C^n , muni de la topologie de la convergence compacte, est nucléaire.

C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$, constitué de fonctions indéfiniment dérivables (au sens réel). On peut d'ailleurs appliquer directement le critère de Pietsch en utilisant la formule de Cauchy.

Les théorèmes de permanence conduisent à la propriété de recollement que voici :

Soit Ω un espace localement compact (resp. une variété C^∞), et soit $(\Omega_i)_i$ un recouvrement ouvert de Ω . Pour chaque i , soit $E(\Omega_i)$ un sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega_i)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(\Omega_i)$) qui soit nucléaire. Soit E le sous-espace de $\mathcal{C}(\Omega)$ (resp. de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$) des fonctions φ telles que, pour chaque i , la restriction φ/Ω_i de φ à Ω_i appartienne à $E(\Omega_i)$. Alors E , muni de la topologie induite par $\mathcal{C}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$), est nucléaire.

En effet, E s'identifie avec sa topologie à un sous-espace de $\prod_i E(\Omega_i)$, à savoir le sous-espace des familles $(f_i)_i$ pour lesquelles

$$f_i(x) = f_j(x) , \qquad \forall\, x \in \Omega_i \cap \Omega_j .$$

Que l'injection

$$E \to \prod_i E(\Omega_i) ,$$

le produit des restrictions $E \to E(\Omega_i)$, soit continu, est évident. Que ce soit un homéomorphisme, découle du fait que chaque compact de Ω est recouvert par un nombre fini de Ω_i .

Cela permet d'étendre les conclusions sur les espaces précédents à leurs homologues définis sur les variétés.

6. Applications des espaces nucléaires à la théorie du potentiel au sens de BRELOT.

Notations. - Soit $\omega \longmapsto \mathcal{H}(\omega)$ un faisceau de fonctions harmoniques au sens de Marcel BRELOT. $\mathcal{H}(\omega)$ sera muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}(\omega)$.

Pour ω ouvert régulier, on posera

$$H^\omega = H : \mathcal{C}(\partial\omega) \to \mathcal{H}(\omega)$$

l'application définie par

$$\varphi \longmapsto H^{\omega}_{\varphi} .$$

H^{ω} sera appelée la mesure harmonique relative à ω .

On posera aussi $\mathcal{B}^{\omega}$ l'application

$$\mathcal{B}^{\omega} = \mathcal{B} : \mathcal{C}'(\omega) \to \mathcal{C}'(\partial\omega)$$

définie par

$$\int H^{\omega}_{\varphi} \, d\mu = \int \varphi \, d\mathcal{B}^{\omega}_{\mu} .$$

On remarquera que

$$\mu \geq 0 \implies \mathcal{B}_{\mu} \geq 0 .$$

La notation $p_K(u)$ désigne $\sup\limits_{x \in K} |u(x)|$.

THÉORÈME 1. - On suppose les axiomes 1, 2 et 3 de Marcel BRELOT. Pour tout ouvert ω , $\mathcal{H}(\omega)$ est nucléaire.

La démonstration est basée sur les deux lemmes suivants :

LEMME 1. - Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}(\omega)$ tel que, pour tout compact $K \subset \omega$, il existe une mesure de Radon $\sigma \geq 0$, à support compact, vérifiant

$$p_K(\varphi) \leq \int |\varphi| \, d\sigma \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{H} .$$

Alors l'espace $\mathcal{H}$ est nucléaire.

LEMME 2. - L'axiome 3 entraîne :

Pour toute mesure de Radon $\mu \geq 0$ et $\mu \neq 0$ à support dans un domaine ω , si on pose

$$A = \{h \in \mathcal{H}_{+}(\omega) \ , \ \int h \, d\mu \leqslant 1\} ,$$

alors

$$\sup_{h \in A} p_K(h) < \infty , \qquad \text{pour tout compact } K \subset \omega$$

(ou encore $p_K(h) \leq \alpha_K \int h \, d\mu$).

Démonstration du lemme 1. - Voir § 5 : Exemples d'espaces nucléaires.

Démonstration du lemme 2. - Il est vrai, sinon, il existerait un compact $K \subset \omega$ et une suite $h_n \in A$ tels que $p_K(h_n) \geqslant n^3$.

Soit

$$h = \sum \frac{1}{n^2} h_n .$$

On a

$$\int h \, d\mu = \sum \frac{1}{n^2} < \infty ;$$

donc h est finie μ-presque-partout, donc partout (car $\mu \neq 0$, et h est harmonique).

Cependant,

$$n \leqslant p_K\left(\frac{h_n}{n^2}\right) < p_K(h) < \infty , \qquad \text{pour tout } n ,$$

d'où une contradiction.

Démonstration du théorème. - Soit K un compact $\subset \omega$. En remarquant que K est réunion finie de compacts, chacun inclus dans un domaine régulier $\subset \omega$, on peut supposer

$$K \subset \omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \omega , \qquad \text{avec } \omega_0 \text{ domaine régulier.}$$

Soient $h \in \mathcal{H}(\omega)$, $x_0 \in \omega_0$ et $f = |h|_{|\partial\omega_0}$. Pour $x \in K$, on a

$$|h(x)| = \left|\int h \, d\rho_x^{\omega_0}\right| \leqslant \int |h| \, d\rho_x^{\omega_0} = H_f^{\omega_0}(x) ,$$

d'après le lemme 2, on a

$$H_f^{\omega_0}(x) \leqslant \alpha_K \, H_f^{\omega_0}(x_0) = \alpha_K \int |h| \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} .$$

Par suite,

$$p_K(h) \leqslant \alpha_K \int |h| \, d\rho_{x_0}^{\omega_0} .$$

Ainsi, les conditions du lemme 1 sont vérifiées, et $\mathcal{H}(\omega)$ est nucléaire.

COROLLAIRE 1. - $\mathcal{H}(\omega)$ étant complet et nucléaire, tout ensemble borné est relativement compact, donc équicontinu, d'après le théorème d'Ascoli (voir BOURBAKI [1], § 2, n° 5, corollaire 3 du théorème 2).

En particulier, soit

$\Phi_{x_0} = \{h : h \in \mathcal{H}_+(\omega) , h(x_0) \leq 1$, avec $x_0 \in \omega$ et ω domaine régulier$\}$.

Φ_{x_0} est uniformément équicontinu sur tout compact.

COROLLAIRE 2. - Soit ω_1 relativement compact, $\omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega_2$. L'application restriction $\mathcal{H}(\omega_2) \to \mathcal{H}(\omega_1)$ est nucléaire.

Démonstration. - Posons $H_{\overline{\omega}_1}$ l'espace quotient de $\mathcal{H}(\omega_2)$ par les fonctions nulles sur $\overline{\omega}_1$, muni de la topologie déduite de la semi-norme $p_{\overline{\omega}_1}$ sur $\mathcal{H}(\omega_2)$. $\overline{\omega}_1$ étant compact, $H_{\overline{\omega}_1}$ est normé, donc l'application canonique

$$\mathcal{H}(\omega_2) \to H_{\overline{\omega}_1}$$

est nucléaire. D'autre part, l'application restriction se factorise :

$$\mathcal{H}(\omega_2) \to H_{\overline{\omega}_1} \to \mathcal{H}(\omega_1) .$$

Comme la deuxième application est continue, on peut conclure.

Rappels sur les mesures vectorielles. - Soit K un compact, et soit E un e. l. c. séparé. On appelle mesure vectorielle à valeurs dans E , une application linéaire continue de $\mathcal{C}(K)$ dans E :

$$m : \mathcal{C}(K) \to E .$$

On pose

$$\mathcal{L}(m) = \bigcap_{z' \in E'} \mathcal{L}^1(|z' \circ m|) .$$

L'intégrale de $f \in \mathcal{L}(m)$ est l'élément $\int f \, dm \in E'^*$, défini par

$$z' \longmapsto \int f' \, d(z' \circ m) .$$

THÉORÈME 2. - Soit ω un domaine régulier ; on posera $H = H^{\omega}$ et $H_f = \int f \, dH$. On a :

1° <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{L}(H)$, $H_f \in \mathcal{K}(\omega)$;

2° <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{L}(H)$ <u>et toute</u> $\mu \in \mathcal{C}'(\omega)$,

$$\int H_f \, d\mu = \int f \, d\mathcal{B}_\mu \ .$$

3° <u>Pour toute</u> μ <u>et toute</u> ν $(\neq 0) \in \mathcal{C}'_+(\omega)$, <u>on a</u>

$$\mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) = \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\nu) = \mathcal{L}(H) \ .$$

4° $\mathcal{L}(H)$ <u>étant muni de la topologie définie par les semi-normes toutes équivalentes</u>

$$f \longmapsto \int |f| \, d\mathcal{B}_\mu \ ,$$

<u>alors</u> $f \longmapsto H_f$ <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>. - La propriété 1° résulte du fait que $\mathcal{K}(\omega)$ est semi-réflexif (car complet et nucléaire) (voir BOURBAKI [2], § 2, corollaire 2 de la proposition 3).

La propriété 2° résulte du fait que $\mu \circ H = \mathcal{B}_\mu$.

La propriété 3° dépend de l'axiome 3 : On démontre d'abord que, si f est s. c. i. ≥ 0 , alors

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) \iff f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\nu) \ , \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu \geq 0 \text{ et } \neq 0 \ .$$

Ceci reste encore vrai pour les f boréliennes positives. Il s'ensuit que, pour tout compact $K \subset \omega$,

$$\mathcal{B}_\mu(K) = 0 \iff \mathcal{B}_\nu(K) = 0 \ , \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu \geq 0 \text{ et } \neq 0 \ .$$

En remarquant que

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) \iff \exists\, g \text{ borélienne } \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) \ , \qquad \text{avec } g = f \ , \ \mathcal{B}_\mu\text{-p. p.} \ ,$$

et sachant que ces deux propriétés ne dépendent pas de μ , il vient :

$$f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) \iff f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\nu) \ , \qquad \text{pour } \mu \text{ et } \nu \geq 0 \text{ et } \neq 0 \ .$$

Enfin

$$\mathcal{L}(H) = \bigcap_{\mu \in \mathcal{C}'(\omega)} \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) = \bigcap_{\substack{\mu \geq 0 \\ \mu \neq 0}} \mathcal{L}^1(\mathcal{B}_\mu) \ ,$$

car $|\mathcal{B}_\mu| \leq \mathcal{B}_{|\mu|}$.

La propriété 4° résulte du fait que l'on a

$$p_K(H_f) \leqslant p_K(H_{|f|}) \leqslant \alpha_{K,\mu} \int H_{|f|}\, d\mu = \alpha_{K,\mu} \int |f|\, d\mathcal{B}_\mu .$$

<u>Cas métrisable</u> : On supposera Ω à base dénombrable ; $\mathcal{H}(\omega)$ est alors un espace de Fréchet nucléaire, donc réflexif.

LEMME. - <u>Soient</u> F <u>un Fréchet nucléaire</u>, E <u>normé</u>, $u : E \to F$ <u>continue</u>. <u>Alors</u> u <u>est nucléaire</u>.

Ce lemme résulte des deux propriétés suivantes :

1° Un Fréchet est nucléaire si, et seulement si, son dual fort est nucléaire ;

2° E et F étant deux e. l. c. séparés, et $u : E \to F$ nucléaire, alors ${}^t u : F'_b \to E'_b$ est nucléaire.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> ω domaine <u>régulier</u> (ω <u>est</u> σ-<u>compact, car</u> Ω <u>est à base dénombrable) , on a</u> :

1° $B : \mathcal{C}'(\omega) \to \mathcal{C}'(\partial\omega)$ <u>est nucléaire</u> ;

2° $H : \mathcal{C}(\partial\omega) \to \mathcal{H}(\omega)$ <u>est nucléaire, ainsi que son prolongement à</u> $L(H) = L^1(\mathcal{B}_\mu)$ <u>(pour n'importe quelle</u> $\mu \geqslant 0$, $\mu \neq 0$) ;

3° H <u>est de base</u> $\mathcal{B}_\mu$, $\forall\, \mu > 0$; <u>on peut alors choisir pour densité une fonction</u> $\geqslant 0$, <u>bornée et mesurable (LUSIN)</u>.

<u>Démonstration</u>.

1° On a

$$\mathcal{B} : \mathcal{C}'(\omega) \xrightarrow[\text{quotient}]{} \mathcal{H}'(\omega) \xrightarrow[\text{nucléaire}]{} \mathcal{C}'(\partial\omega) .$$

2° se démontre d'après le lemme.

3° Désignons encore par H , le prolongement de H à $L(H) = L^1(\mathcal{B}_\mu)$.

$$H : L^1(\mathcal{B}_\mu) \to \mathcal{H}(\omega)$$

étant nucléaire, on peut écrire :

$$H_f = \sum_{n \geqslant 0} \left(\int f.g_n\, d\mathcal{B}_\mu\right) y_n ,$$

avec y_n suite bornée dans $\mathcal{H}(\omega)$, g_n suite dans $L^\infty(\mathcal{B}_\mu)$, telles que $\sum \|g_n\| < \infty$. On peut d'ailleurs choisir $g_n \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{B}_\mu)$ tels que $|g_n(t)| \leqslant \|g_n\|$.

Soit $G_t = \sum g_n(t)\, y_n \in \mathcal{H}(\omega)$. La fonction G_t est Lusin-mesurable et bornée, et on a

$$H_f(x) = \int G_t(x)\ f(t)\ d\mathscr{B}_\mu(t)\ .$$

Soit (x_n) une suite dense dans ω , alors $G_t(x_n) \geqslant 0$, sauf sur un ensemble $\mathscr{E}_n$ de $\mathscr{B}_\mu$-mesure nulle.

Posons

$$H_t = \begin{cases} 0\ , & \text{si}\quad t \in \bigcup \mathscr{E}_n \\ G_t\ , & \text{si}\quad t \notin \bigcup \mathscr{E}_n \end{cases}\ ;$$

$t \to H_t$ est mesurable, bornée, et $H_t \in \mathscr{K}_+(\omega)$, et on a

$$H_f = \int H_t\ f(t)\ d\mathscr{B}_\mu(t)\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chap. 10 : Espaces fonctionnels, 2e édition. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1084 ; Bourbaki, 10).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 6 : Intégration vectorielle. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1281 ; Bourbaki, 25).

[3] GEL'FAND (I. M.) and VILENKIN (N. Ja.). - Generalized functions, 4 : Applications of harmonic analysis. Translated from Russian. - New York, Academic Press, 1964.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 4, 1952, p. 73-112.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Providence, American mathematical Society, 1955 (Memoirs of the American mathematical Society, 16).

[6] PIETSCH (Albrecht). - Nukleare lokalkonvexe Räume. - Berlin, Akademie-Verlag, 1965 (Schriftenreihe der Institute für Mathematik, Reihe A : Reine Mathematik, 1).

[7] SCHAEFER (Helmut H.). - Topological vector spaces. - New York, Macmillan Company, 1966 (Macmillan Series in advanced Mathematics and theoretical Physics).

[8] SCHWARTZ (Laurent). - Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, J. Anal. math., Jérusalem, t. 4, 1954-1956, p. 88-148.

[9] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I., Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 1-141 ; II., t. 8, 1958, p. 1-209.

[10] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 11, 1966/67. - Paris, Secrétariat mathématique (à paraître).

[11] Séminaire Schwartz, t. 1, 1953/54 : Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques, Espaces vectoriels topologiques nucléaires, Applications. - Paris, Secrétariat mathématique, 1954.