Arnaud de La Pradelle

Sur la quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 10, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A6_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
11e année, 1966/67, n° 10

19 janvier 1967

SUR LA QUASI-ANALYTICITÉ DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES FONCTIONS HARMONIQUES,

par Arnaud de LA PRADELLE

Sommaire

Nous nous plaçons dans le cadre de l'axiomatique de M. BRELOT [1]. L'espace de base Ω est localement compact, à base dénombrable, non compact, connexe et localement connexe, muni des axiomes 1 , 2 , 3 . On suppose l'existence d'un potentiel $P > 0$ dans Ω , ainsi que celle d'une base d'ouverts complètement déterminants (voir [3], p. 37). On note $p_y(x)$ le potentiel à support ponctuel $\{y\}$ situé dans une base compacte du cône S^+ muni de la topologie T de Mme HERVÉ [3], et on suppose que, pour tout $y \in \Omega$, les potentiels p_y sont proportionnels. Ces hypothèses sont celles qui permettent à Mme HERVÉ d'associer au premier faisceau, un second faisceau, dit faisceau des fonctions harmoniques adjointes. On note avec un astérisque les notions relatives aux fonctions adjointes, et $p_x^*(y)$ désigne le potentiel adjoint à support ponctuel $\{x\}$, défini par la relation

$$p_x^*(y) = p_y(x) .$$

Il est important de noter que les fonctions adjointes dépendent du choix de p_y . Cependant, les systèmes de fonctions adjointes correspondant à deux potentiels p_y et p'_y se déduisent l'un de l'autre par multiplication par une fonction continue > 0 dans Ω .

On ajoute l'hypothèse que les potentiels adjoints à support ponctuel sont proportionnels.

Dans ces conditions, et en s'inspirant d'un travail de J. DENY [2], on peut caractériser la propriété de quasi-analyticité, notée A , relative aux fonctions harmoniques (A^* pour les fonctions harmoniques adjointes) :

<u>Une fonction harmonique, dans un domaine</u> ω , <u>est nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point, quel que soit le domaine</u> ω .

A (resp. A^*) est équivalente à une propriété d'approximation dans le faisceau adjoint.

Soit E un fermé de Ω, à frontière compacte ∂E, tel que $\complement E$ ne soit effilé en aucun point de ∂E. Nous dirons qu'un tel fermé est <u>stable</u>. $\complement E$ est réunion finie ou dénombrable de domaines composants ω_p $(\complement E = \cup \omega_p)$. Soit ω'_p un sous-ouvert arbitraire de chaque ω_p, et $\omega' = \cup \omega'_p$. On note alors α_E la propriété suivante relative au fermé précédent :

<u>L'ensemble</u> $\{p_y\}_{y \in \omega'}$ <u>est total dans l'espace</u> $\mathcal{C}(\partial E)$ <u>des fonctions finies continues sur</u> ∂E <u>muni de la topologie de la convergence uniforme</u>.

α^*_E désignera la même propriété pour un fermé <u>stable</u>* (relativement à l'effilement adjoint), en remplaçant les p_y par les p^*_y.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME ([4], [5]).

$$A^* \iff \alpha_E \text{ pour tout fermé stable } E$$

$$(\text{resp. } A \iff \alpha^*_E \text{ pour tout fermé stable}^* \; E).$$

La démonstration utilise l'existence d'une base d'ouverts non effilés en leurs points-frontière, résultat de G. MOKOBODZKI et D. SIBONY.

L'étude précédente permet de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME de Runge ([4], [5]). - <u>Si</u> A^* <u>est vérifié, pour pouvoir approcher à</u> ε <u>près, sur tout compact contenu dans l'ouvert</u> $\omega \subset \Omega$, <u>toute fonction harmonique dans</u> ω, <u>par une fonction harmonique dans</u> Ω, <u>il est nécessaire et suffisant que</u> $\complement\omega$ <u>n'ait pas de composante connexe compacte</u>.

Ce dernier théorème s'applique, en particulier, aux solutions d'un opérateur différentiel du second ordre, de type elliptique, défini dans $\mathbb{R}^n$ et à coefficients assez réguliers. Voir à ce sujet B. MALGRANGE [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[2] DENY (Jacques). - Systèmes totaux de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 1, 1949, p. 103-113.

[3] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[4] LA PRADELLE (Arnaud de). - Approximation et caractère de quasi-analyticité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, 1967, Série A, p. 19-21.

[5] LA PRADELLE (Arnaud de). - Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique de fonctions harmoniques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[6] MALGRANGE (Bernard). - Sur les systèmes d'équations elliptiques, Colloques internationaux du C. N. R. S., 71 : La théorie des équations aux dérivées partielles [1956, Nancy], p. 139-142. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1956.