GABRIEL MOKOBODZKI
DANIEL SIBONY

Cônes de fonctions et théorie du potentiel I. les noyaux associés à un cône de fonctions

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 11 (1966-1967), exp. n° 8, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A4_0>

CÔNES DE FONCTIONS ET THÉORIE DU POTENTIEL
I. LES NOYAUX ASSOCIÉS À UN CÔNE DE FONCTIONS

par Gabriel MOKOBODZKI et Daniel SIBONY

Introduction. - Lorsqu'on a, sur un espace localement compact Ω , une théorie du potentiel définie par un noyau de Hunt, on est amené à considérer les objets suivants : cônes de fonctions excessives, cônes de potentiels ; plusieurs opérations essentielles de la théorie se définissent par référence à ces cônes.

Le problème suivant se pose donc de façon naturelle :

Etant donné un cône convexe de fonctions continues positives sur Ω , à quelles conditions peut-on l'identifier au cône des potentiels continus ou des fonctions excessives continues (ou à un sous-cône assez dense de ce dernier), pour une théorie du potentiel définie par un noyau de Hunt ? Ce noyau ne sera évidemment pas unique, si le problème admet une solution. Il faut donc, à partir du cône C , construire effectivement un tel noyau.

On a donc été amené à étendre le cadre initial de la théorie de Hunt ; pour cela, nous avons isolé certaines propriétés et notions essentielles du cône des potentiels : additivité des réduites (qui peut se remplacer par la propriété d'additivité des supports), propriété d'adaptation et celle de décomposabilité de l'application $v \to \operatorname{Supp} v$, analogue à la propriété de partition mise en évidence dans la théorie locale par Mme HERVÉ [3] (1). Moyennant ces propriétés (qui sont nécessaires), il est apparu que la reconstruction de la théorie est possible, et que les espaces $\mathcal{C}_0(\Omega)$ (fonctions nulles à l'infini) peuvent être remplacés par des espaces adaptés, qui permettent de représenter des formes linéaires croissantes par des mesures.

Un des outils essentiels a été la notion de support fin (et fermé) associé à tout élément v d'un cône adapté. Cela permet notamment d'introduire la notion de noyau V subordonné à un tel cône C , en lui imposant la condition :

$$\text{Support fermé de } V\varphi \subset \text{Support de } \varphi , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega) .$$

---

(1) Les chiffres de références entre crochets se rapportent à la bibliographie, placée à la fin de l'exposé n° 9

(Dans le second chapitre, on montre que cette notion suffit à construire des objets essentiels de la théorie, tels que résolvantes et semi-groupes.) Un travail indépendant a été consacré aux cônes et espaces adaptés, et on y a établi la plupart des résultats utilisés dans ce mémoire, notamment sur les opérateurs C-bornés, la topologie des espaces adaptés, et les frontières fines (cf. [13]).

L'objet du premier chapitre est d'associer un noyau à toute fonction v appartenant à un cône adapté vérifiant l'additivité des réduites et la propriété de décomposition. Pour la construction d'un tel noyau, on se sert d'un opérateur qui généralise l'opérateur de Dynkin, et qu'on peut définir en fait sur tout cône vérifiant la propriété de décomposition des supports. On se sert également de la notion de restriction spécifique d'un élément du cône (notion qui se déduit naturellement de celle de support). On montre que le noyau V ainsi associé à une fonction v est unique, et est l'inverse de l'opérateur de Dynkin généralisé. V vérifie le principe de domination et, si la fonction 1 est C-surmédiane (c'est-à-dire si

$$(1 \geqslant v \text{ sur } \operatorname{Supp} v) \Longrightarrow (1 \geqslant v \text{ partout}), \quad \forall\, v \in C \;) \; ,$$

il vérifie le principe complet du maximum. Le noyau V construit est tel que, pour tout $x \in \Omega$, la mesure $\varepsilon_x V$ est portée (au sens le plus strict) par l'ensemble $\delta(V)$, support fin du noyau V, défini comme frontière fine du cône $C - V(\mathcal{C}_K^+)$.

Dans le second chapitre, on construit les résolvantes et semi-groupes associés aux noyaux construits dans le premier chapitre. Ils opèrent dans l'espace H_C des fonctions continues majorables par des fonctions du cône de départ C.

On généralise ensuite cette étude au cadre suivant : Etant donné un cône $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ linéairement séparant et stable par sommes continues, on dit qu'un opérateur linéaire de $\mathcal{C}_K(\Omega)$ dans $C - C$ est un noyau subordonné à C, si :

(i) $V(\mathcal{C}_K^+) \subset C$,

(ii) $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$, où $\operatorname{Supp} V\varphi$ est le support de $V\varphi$ relatif au cône C, et $S\varphi$ le support ordinaire de φ.

On montre alors que pour tout noyau V subordonné à C, à valeurs dans l'espace

$$o(C) = \bigcup_{g \in C} o(g)$$

(où $o(g)$ est l'espace des fonctions continues qui croissent moins vite à l'infini que g), on sait construire une résolvante achevée (V_λ) (c'est-à-dire $V_0 = V$), qui envoie $o(C)$ dans lui-même. Il y a un semi-groupe (P_t) associé à (V_λ), défini sur $\overline{V_\lambda(o(C))}$ ($o(C)$, muni de sa topologie de l'ordre, est un espace de Fréchet), qui se prolonge en un semi-groupe mesurable sur $(\Omega, \mathcal{B}_0)$, où $\mathcal{B}_0$ est la tribu borélienne de Baire, à trajectoires continues à droite ; V est intégrale du semi-groupe (P_t) .

On généralise enfin les résultats de RAY et LION (cf. [15],[5]) sur les familles résolvantes, dans le cadre ci-dessus.

Un intérêt de notre étude est de construire une théorie du potentiel, en prenant comme objet principal un cône de fonctions continues vérifiant certaines propriétés. On développe ainsi une forme nouvelle de la théorie du potentiel, qui a pour caractère d'être fondée sur une méthode directe ou intrinsèque et non plus analytique. Dans certains problèmes, les critères que nous formulons ici pour reconnaître s'il s'agit d'un cône de théorie du potentiel, sont faciles à vérifier ; nous en donnerons d'autres illustrations par la suite (exemple : théorie du potentiel sur le tore $\underset{\sim}{T}^{\aleph_0}$).

Signalons que beaucoup de résultats exposés ici ont été résumés dans différentes notes aux Comptes Rendus ([8] à [12]).

P. S. - Depuis la rédaction de ces chapitres, de nouveaux résultats des deux auteurs apportent des simplifications importantes à la théorie. Ces résultats seront publiés par la suite.

Première partie :

Cadre général de l'étude

1. Notations.

Ω est un espace localement compact dénombrable à l'infini ;

$\mathcal{C}(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω à valeurs réelles ;

$\mathcal{C}_b(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues bornées sur Ω ;

$\mathcal{C}_K(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues à support compact dans Ω ;

$\mathcal{B}(\Omega)$ est l'espace des fonctions boréliennes bornées dans Ω ;

$\mathcal{C}^+(\Omega)$, $\mathcal{C}_b^+$, $\mathcal{C}_K^+$, $\mathcal{B}^+$ sont les cônes convexes des éléments positifs de ces divers espaces ;

$\mathcal{M}^+(\Omega)$ est le cône des mesures ≥ 0 sur Ω , et $S\mu$ désignera le support de $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$.

2. Rappel de définitions [13].

1° Un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ est dit adapté si :

(A) $\forall\, v \in C\,,\ \exists\, w \in C : \forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, K$ compact $\subset \Omega$ avec la propriété

$$(x \in \complement K) \implies (v(x) \leqslant \varepsilon w(x))$$

On dit que w domine v à l'infini, et on note par $o(w)$ les éléments de C dominés par w à l'infini.

2° Si $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ est adapté et $v \in C$, on appelle support fin de v (relativement à C) l'ensemble $\delta(v)$ frontière de Choquet de Ω par rapport au cône $(C - \mathbb{R}^+ v)$; $\delta(v)$ est non vide [13], $\overline{\delta(v)}$ est le plus petit fermé F tel que

$$(u \in C\,,\ u \geqslant v \text{ sur } F) \implies (u \geqslant v \text{ dans } \Omega)\ .$$

On dira parfois "support relatif de v" pour désigner le fermé $\overline{\delta(v)}$, et on le notera $\operatorname{Supp} v$. Aucune confusion ne sera possible avec le support ordinaire d'un élément $\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$ qu'on notera $S\varphi$.

3° Un cône $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ est dit linéairement séparant si, pour tout couple $(x\,,\,y)$ de points distincts de Ω et tout λ réel $\geqslant 0$, il existe $f \in C$ tel que

$$f(x) \neq \lambda f(y)\ .$$

Par la suite, on renvoie souvent le lecteur à notre travail sur les cônes et espaces adaptés [13], afin de ne pas alourdir l'exposé.

3. Les axiomes.

Le point de départ de la théorie sera un cône convexe $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ satisfaisant aux axiomes suivants :

AXIOME 1. - C est un cône adapté linéairement séparant.

AXIOME 2. - C possède la propriété d'additivité des réduites sur les compacts, c'est-à-dire :

$$\forall\, K \text{ compact} \subset \Omega\,,\quad \forall\, v_1\,,\, v_2 \in C\,,\qquad R^K_{v_1+v_2} = R^K_{v_1} + R^K_{v_2}$$

où, pour $v \in C$ et K compact $\subset \Omega$, on a,

$$R^K_v = \inf\{u \in C\ ;\ u \geqslant v \text{ dans } K\} \text{ dans } \Omega\ .$$

AXIOME 3 (Propriété de décomposition). - Pour tout $v \in C$ et tout recouvrement de Ω par deux ouverts ω_1 et ω_2, il existe $v_1\,,\, v_2 \in C$ tels que :

$$\operatorname{Support} v_i \subset \omega_i \quad (i = 1\,,\,2) \qquad (\text{"Support" relatif à } C\ )$$

et

$$v = v_1 + v_2 \qquad \text{(voir [13])} \ .$$

AXIOME 4 (Propriété de densité). - L'espace vectoriel $C - C$ est dense dans l'espace $o(C)$ muni de la topologie de l'ordre

On sait (cf. [13]) que lorsque Ω est dénombrable à l'infini $o(C)$ est un espace de Fréchet pour cette topologie, qui est aussi définie par la suite de semi-normes :

$$p_n(\varphi) = \inf_{\substack{f \in C \\ f > |\varphi|}} \left(\sup_{x \in K_n} f(x) \right)$$

où (K_n) est une suite croissante de compacts de réunion Ω lorsque C est stable par sommes continues.

La théorie du potentiel peut être développée au moyen de ces quatre axiomes, susceptibles, comme on le verra ultérieurement, d'être affaiblis.

Dans la construction de la résolvante, et là seulement, on supposera la propriété suivante, afin de traiter le cas classique très général de la théorie de Hunt :

"La fonction constante 1 est C-surmédiane" .

Rappelons que cela signifie (par exemple)

$$R_u^K = \inf\{v + \lambda \ ; \ v \in C \ , \ \lambda \text{ réel } > 0 \ , \ v + \lambda \geq u \text{ sur } K\}$$

pour tout $u \in C$ et tout K compact ; ou, ce qui est équivalent :

$$\forall \ u \in C \ , \ \lambda \in \underset{\sim}{R}^+ \ , \qquad (\lambda \geq u \text{ sur Supp } u) \implies (\lambda \geq u) \ .$$

Signalons cependant que n'importe quelle fonction C-surmédiane > 0 dans Ω peut jouer le rôle de la constante 1 . Nous ferons d'ailleurs la construction des résolvantes et semi-groupes sans supposer que 1 est C-surmédiane. (En théorie de Hunt, on dit que " 1 est excessive", ce qui est équivalent à : 1 est C-surmédiane.)

Remarque. - Ces axiomes sont vérifiés dans toutes les théories usuelles du potentiel sur un espace localement compact, théories locales ou non.

L'axiome 3 (de décomposition) est notamment vérifié dans le cadre général suivant (cf. MOKOBODZKI-SIBONY [14]) :

C est semi-réticulé inférieurement (s. r. i.) pour l'ordre habituel, fermé pour la convergence compacte, vérifiant la propriété de décomposition de Riesz (pour son ordre propre) et tel que, pour toute $v \in C$ et toute $\varphi \in \mathcal{C}_K^+$, la "réduite"

$$R_v^{\varphi} = \int_0^{\sup \varphi} R_v^{[\varphi>\alpha]}\, d\alpha$$

appartient à C. Le fait que C soit s. r. i. et fermé assure que C est définissable par une famille d'inégalités du type

$$\int v\, d\mu_x \leqslant v(x)$$

pour une famille de mesures $\geqslant 0$ (μ_x) (cf. CHOQUET-DENY [2]).

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout recouvrement ouvert</u> $(\omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ <u>de</u> Ω <u>et tout</u> $v \in C$, <u>il existe une famille</u> $(v_\alpha)_{\alpha\in A}$ <u>d'éléments de</u> C, <u>telle que</u> :

$$\operatorname{Supp} v_\alpha \subset \omega_\alpha \ , \quad \forall\, \alpha \in A$$

<u>et</u>

$$v = \sum v_\alpha \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - On peut toujours supposer A dénombrable et (ω_α) localement fini.

1° Soient K compact, $v \in C$, et $(\mathcal{O}_i)_{i\leqslant n}$ un recouvrement ouvert fini de K. On peut construire, par récurrence, une décomposition de v de la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i + w \quad \text{où} \quad \operatorname{Supp} v_i \subset \mathcal{O}_i \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp} w \subset \complement K \quad .$$

La récurrence est possible, car, pour $n = 1$, c'est l'axiome 3 lui-même. Si la décomposition est possible pour un recouvrement de K par $n-1$ ouverts, il suffit d'écrire $K = K_1 \cup K_2$, où K_1 est recouvert par un ouvert et K_2 par les $n-1$ restants.

2° Soit (K_p) une suite croissante exhaustive de compacts de Ω, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $v' \in C$ indépendant de ε et un rang $P(\varepsilon)$ tel que

$$(x \in \complement K_{P(\varepsilon)}) \Longrightarrow (v(x) < \varepsilon v'(x)) \quad .$$

Soit $(\omega_{i_k})_{k\leqslant n(P)}$ un recouvrement fini de K_P extrait de (ω_α), et soit la décomposition correspondante :

$$v = \sum_{i=1}^{n(P)} v_i + w_P$$

on a $\operatorname{Supp} w_P \subset \complement K_P$. Donc $w_P \leqslant \varepsilon v'$ dans Ω.

Donc le "reste" w_P tend vers 0 quand $P \longrightarrow +\infty$.

Rappelons que le cône C_σ des sommes continues d'éléments de C est défini par :

$$C_\sigma = \{u = \sum_n u_n \ , \quad u \in \mathcal{C}(\Omega) \ , \quad u_n \in \mathcal{C} \ , \quad \forall\, n\} \ .$$

LEMME 2. - <u>Le cône</u> C_σ <u>des sommes continues d'éléments de</u> C <u>vérifie les axiomes</u> 1, 2, 3 <u>et</u> 4.

<u>Démonstration</u>. - Cela résulte aisément de nos résultats antérieurs [13]. L'additivité des réduites passe au cône C_σ. C_σ est adapté si C est adapté.

Enfin si (ω_α) est un recouvrement par des ouverts relativement compacts et si $v = \sum v_\alpha$, $(v_\alpha) \subset C$ est une décomposition correspondante de v , on a , du fait que $C \subset o(C_\sigma)$ et que les supports des v_α relativement à C sont compacts,

$$\text{Supp } v_\alpha \ (\text{relativement à } C_\sigma) \subset \omega_\alpha \ , \quad \forall\, \alpha \ .$$

On peut donc toujours, <u>sans restreindre la généralité de notre cadre</u>, supposer que C vérifie la propriété :

(σ) C <u>est stable par sommes continues</u> .

Désormais $C = C_\sigma$.

Il en résulte, en particulier, qu'il existe $w \in C$, $w > 0$ dans Ω , car en raison de la séparation linéaire, pour tout $x \in \Omega$, il existe

$$w_x \in C \ , \quad w_x(x) > 0 \ .$$

PROPOSITION 3. - <u>Soit</u> $(v_i)_{i\leq n} \subset C$ <u>alors</u> :

$$\text{Supp} \sum_1^n v_i = \bigcup_1^n \text{Supp } v_i \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $v = \sum_1^n v_i$, $S_i = \text{Supp } v_i$, on sait déjà que $\text{Supp } v \supset \bigcup_1^n S_i$. Soit $w \in C$, $w \geq v$ sur $\bigcup_1^n S_i$. Alors :

$$w \geq R_v^M = \sum_1^n R_{v_i}^M = \sum_1^n v_i = v \quad \text{avec} \quad M = \bigcup_1^n S_i \ .$$

Donc $\text{Supp } v \subset \bigcup_1^n S_i$.

C. Q. F. D.

4. Une condition suffisante de densité.

L'axiome 4 exprime la propriété de densité telle qu'elle intervient essentiellement dans la théorie.

Voici cependant une condition suffisante pour entraîner l'axiome 4 :

(C.D) Pour toute $\varphi \in C_K^+(\Omega)$ à support compact $S\varphi$, il existe ω , voisinage relativement compact de $S\varphi$, tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe v_1 , $v_2 \in C$, avec :

(a) $\operatorname{Supp} v_i \subset \omega \quad (i = 1 , 2)$,

(b) $|(v_1 - v_2 - \varphi)(x)| < \varepsilon , \quad \forall\, x \in \overline{\omega}$

Sous cette hypothèse, et moyennant les autres axiomes, on a le lemme suivant :

LEMME 4. - Pour tout $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, il existe K compact contenant le support $S\varphi$ de φ tel que :

Pour tout ω ouvert relativement compact $K \subset \omega$, tout $\varepsilon > 0$, il existe v_1 , $v_2 \in C$ avec $\operatorname{Supp} v_i \subset \omega \quad (i = 1 , 2)$ et

$$\sup_{x\in\overline{\omega}} |(v_1 - v_2 - \varphi)(x)| < \varepsilon \quad .$$

Démonstration. - Soit ω un ouvert relativement compact tel que $\omega \supset \overline{\omega}_0$, où ω_0 est l'ouvert associé à φ par l'axiome 3. Soit

$$\psi \in C_K^+(\Omega) \quad \text{avec} \quad S\psi = \overline{\omega} , \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad ,$$

et posons

$$\theta = \varphi + \varepsilon\psi \quad .$$

D'après l'axiome 3, il existe un ouvert $\omega_1 \supset \omega$ et u_1 , $u_2 \in C$ tels que

$$|(u_1 - u_2 - \theta)(x)| < \varepsilon , \quad \forall\, x \in \overline{\omega}_1$$

on en tire

$$|(u_1 - u_2 - \varphi)(x)| < 2\varepsilon , \quad \forall\, x \in \overline{\omega}_1 \quad .$$

Désignons par C_K , le sous-cône convexe de C formé des $u \in C$ tels que $\operatorname{Supp} u$ soit compact, et supposons vérifiée la condition (C.D).

THÉORÈME 5. - Pour toute mesure $\mu \geq 0$, C_K-intégrable, et toute $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, on a

$$\int \varphi \, d\mu = \inf\{\int (v_1 - v_2)\, d\mu \ ; \quad (v_1 - v_2) \geq \varphi \ ; \quad v_1 \ , v_2 \in C_K\} \ .$$

Démonstration. - Soit $\mu \geq 0$, C_K-intégrable, et soit $(v_n) \subset C_K$ telle que $\sup_n v_n(x) > 0$, $\forall\, x \in \Omega$. Il existe alors une suite (α_n) de nombres réels $\alpha_n > 0$, telle que

$$\sum_n \alpha_n v_n = w \in C \quad \text{et} \quad \int w \, d\mu < + \infty \ .$$

Soit $\varphi \in C_K^+(\Omega)$, tel que $\varphi(x) < w(x)$, $\forall\, x \in \Omega$. Il existe un ouvert relativement compact $\omega \supset S\varphi$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int w \, d\mu|_{C\omega} < \varepsilon \qquad (\mu_{C\omega} = \text{restriction de } \mu \text{ à } C\omega) \ ,$$

et tel qu'il existe v_1, $v_2 \in C_K$, $\operatorname{Supp} v_i \subset \omega$ $(i = 1 , 2)$ vérifiant l'inégalité

$$|(v_1 - v_2 - \varphi)(x)| < \varepsilon w(x) \ , \quad \forall\, x \in \overline{\omega} \ .$$

Un tel ouvert ω existe d'après le lemme 4.

D'autre part, $w = \sum_n \alpha_n v_n$; il existe donc un indice p tel que, si

$$t = \sum_{n \leq p} \alpha_n v_n \ ,$$

on ait encore

$$|(v_1 - v_2 - \varphi)(x)| < \varepsilon t(x) \ , \quad \forall\, x \in \overline{\omega}$$

et

$$\varphi(x) \leq t(x) \ , \quad \forall\, x \in \Omega \ .$$

On a donc $v_1 + \varepsilon t \geq v_2 + \varphi \geq v_2$ dans $\overline{\omega}$ et $\operatorname{Supp} v_2 \subset \omega$, donc $v_1 + \varepsilon t \geq v_2$ dans Ω tout entier, d'où l'on tire

$$v_1 + \varepsilon t - v_2 \geq \varphi \quad \text{dans } \Omega \ .$$

Par suite

$$\int (v_1 + \varepsilon t - v_2 - \varphi)\, d\mu = \int (v_1 + \varepsilon t - v_2 - \varphi)\, d\mu|_{\omega} + \int (v_1 + \varepsilon t - v_2 - \varphi)\, d\mu_{C\omega}$$

et

$$0 \leqslant \int (v_1 + \varepsilon t - v_2 - \varphi)\, d\mu_{|\omega} \leqslant 2\varepsilon \int t\, d\mu$$

$$0 \leqslant \int (v_1 + \varepsilon t - v_2 - \varphi)\, d\mu_{|\complement\omega} \leqslant 2(1+\varepsilon) \int t\, d\mu_{|\complement\omega} \leqslant 2\varepsilon(1+\varepsilon) \ .$$

La dernière inégalité s'obtient ainsi : on a

$$v_1 - v_2 + \varepsilon t \leqslant \varphi + 2\varepsilon t \leqslant 2t(1+\varepsilon) \quad \text{sur} \quad \overline{\omega}$$

et

$$\operatorname{Supp} v_1 \subset \omega$$

donc

$$v_1 - v_2 + \varepsilon t \leqslant 2t(1+\varepsilon) \quad \text{sur} \quad \Omega \ .$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a bien

$$\int \varphi\, d\mu = \inf\{\int (p_1 - p_2)\, d\mu \ ; \ \ p_1 - p_2 \geqslant \varphi \ ; \ \ p_1 \ , \ p_2 \in C_K\} \ .$$

COROLLAIRE 6. - Si deux mesures μ , $\nu \geqslant 0$ sont C_K-intégrables et

$$\int v\, d\mu = \int v\, d\nu \ , \qquad \forall\, v \in C \ ,$$

alors $\mu = \nu$.

LEMME 7. - Soient w_1 , $w \in C$, $w_1(x) > 0$, $\forall\, x \in \Omega$, et $w_1 \in o(w)$. Alors

$$o(w) = o(C \cap o(w)) \ ,$$

et $C \cap o(w)$ est adapté.

Démonstration. - Il existe une suite $(v_n) \subset C_K$ telle que $w = \sum_n v_n$. Si on pose $s_p = \sum_{n<p} v_n$, la suite s_p converge uniformément sur tout compact vers w et $s_p \in o(w)$ pour tout p .

Soit alors $f \in o(w)$. Il existe une suite croissante (K_n) de compacts de Ω telle que :

1° $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = \Omega$; $(x \in \complement K_n) \implies (f(x) \leqslant \frac{1}{4^{n+1}} w(x))$;

2° Il existe une suite extraite (s_{p_n}) telle que :

$$(x \in K_n) \implies |w(x) - s_{p_n}(x)| < \frac{1}{2} w(x) \ .$$

Sur $K_n \setminus K_{n-1}$, on a donc $\frac{1}{2^n} s_{p_n}(x) \geq 2^n f(x)$.

Si on prend $u = \sum_n \frac{1}{2^n} s_{p_n}$, on a $f \in o(u)$ et $u \in o(w)$.

THÉORÈME 8. - Soit w comme dans le lemme 7, et soit $C_w = C \cap o(w)$.

1° Pour toute forme linéaire T sur $C_w - C_w$, croissante sur C_w, il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur Ω, et une seule, telle que

$$\int v \, d\mu = T(v) \ , \quad \forall \ v \in C_w \ .$$

2° $\int w \, d\mu < +\infty$ et, pour toute $\varphi \in o(w)$, on a

$$\int \varphi \, d\mu = \inf\{\int (v_1 - v_2) \, d\mu \ ; \ (v_1 - v_2) \geq \varphi \ ; \ v_1 , v_2 \in C_w\} \ .$$

3° L'espace $o(w)$ muni de la norme $\|\varphi\|_w = \inf\{\lambda \ ; \ |\varphi| \leq \lambda w\}$ est complet, et, pour toute $\varphi \in o(w)$, il existe une suite

$$(v_n) \in C_w - C_w \ , \quad v_n \geq \varphi \ , \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi - v_n\|_w = 0 \ .$$

Démonstration.

1° D'après le lemme 7, C_w est adapté, donc il existe une mesure $\mu \geq 0$ sur Ω telle que

$$\int v \, d\mu = T(v) \ , \quad \forall \ v \in C_w \ .$$

D'après le corollaire 6, cette mesure est unique.

2° Si $\int f \, d\mu < +\infty$, $\forall \ f \in o(w)$, alors $\int w \, d\mu < +\infty$.

Sur $o(w)$, considérons la forme sous-linéaire p définie par

$$p(\varphi) = \inf\{T(v) \ ; \ v \geq \varphi \ ; \ v \in C_w - C_w\}$$

et soit L une forme linéaire sur $o(w)$, $L \leq p$, on a évidemment $L(v) = T(v)$, $\forall \ v \in C_w$. D'autre part, comme $o(w)$ est adapté, il existe une mesure $\nu \geq 0$ telle que

$$L(\varphi) = \int \varphi \, d\nu \ , \quad \forall \ \varphi \in o(w) \ ,$$

par suite $\nu(v) = \mu(v)$, $\forall \ v \in C_w$ et, d'après 1°, $\nu = \mu$.

Ceci montre que p est en fait linéaire sur $o(w)$ et que

$$\int \varphi \, d\mu = \inf\{v \, d\mu \ ; \ v \geq \varphi \ ; \ v \in C_w - C_w\} \ .$$

3° Soit $\varphi \in o(w)$ et soit $B(\varphi) = \{v \in C_w - C_w \; ; \; v \geq \varphi\}$. Désignons par M le dual de $o(w)$ muni de la norme $\| \, \|_w$. D'après 2°, l'ensemble $B(\varphi)$ est convexe, et φ appartient à l'adhérence faible de $B(\varphi)$ pour $\sigma(o(w), M)$, donc aussi à l'adhérence forte de $B(\varphi)$.

On peut raffiner en exigeant que la suite v_n soit décroissante.

Enfin, on remarquera que les topologies de l'ordre et de la norme sont identiques sur $o(w)$.

PROPOSITION 9.

1° L'espace vectoriel $C - C$ est dense dans l'espace $o(C)$ muni de la topologie de l'ordre, pour laquelle H_C est un espace de Fréchet.

2° Pour toute $\varphi \in o(C)$, il existe $w \in C$, une suite $(v_n) \in C - C$ qui converge vers φ dans l'espace de Banach H_w (espace des fonctions continues w-majorables). En particulier $C - C$ est dense dans $o(C)$ pour la topologie de la convergence compacte.

3° Pour toute forme linéaire $T \geq 0$, croissante sur $C - C$, il existe une mesure $\mu \geq 0$, et une seule, telle que

$$\int v \, d\mu = T(v) , \quad \forall \; v \in C$$

et, pour toute $\varphi \in o(C)$,

$$\int \varphi \, d\mu = \inf\{T(v) \; ; \; v \in C - C \; ; \; v \geq \varphi\} .$$

Démonstration. - On a déjà montré [13] que $o(C)$ est un espace de Fréchet pour la topologie de l'ordre, identique à la topologie de Mackey $\tau(H_C, M)$, où M est l'espace des mesures C-intégrables. Si (K_n) est une suite de compacts de Ω, $K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1}$, $\Omega = \bigcup_n K_n$, on définit une famille fondamentale de semi-normes pour la topologie de l'ordre sur H_C en posant, pour $\varphi \in H_C$,

$$p_n(\varphi) = \inf\{ (\sup_{x \in K_n} v(x)) \; ; \; v \in C \; ; \; v \geq |\varphi| \} .$$

Enfin 1°, 2°, et 3° résultent du théorème 8.

On supposera donc dorénavant la condition de densité sous la forme que lui donne l'axiome 4.

COROLLAIRE 10 (Existence de la mesure balayée). - Pour tout fermé $F \subset \Omega$ et toute mesure $\mu \geq 0$, C-intégrable, il existe une mesure positive, et une seule, notée

μ^F , C-*intégrable*, *portée par* F *et telle que* :

$$\int R_v^F \, d\mu = \int v \, d\mu^F , \quad \forall v \in C .$$

Démonstration. - En effet, l'application $v \longrightarrow \int R_v^F \, d\mu \leqslant \int v \, d\mu$ est une forme linéaire sur $C - C$, croissante sur C , dont il existe une mesure unique $\mu^F \geqslant 0$, C-intégrable, telle que :

$$\int R_v^F \, d\mu = \int v \, d\mu^F , \quad \forall v \in C .$$

Pour voir que μ^F est portée par F , il suffit de considérer le cône $C_F = C_{|F}$. L'application $v \longrightarrow \int R_v^F \, d\mu$ est une forme linéaire croissante sur C_F , qui est adapté, donc elle se représente par une mesure sur F .

DÉFINITION 11. - *On dit que* $v \in C$ *est* **strictement** C-concave *si, quelles que soient* μ *et* ν , *mesures* $\geqslant 0$, C-*intégrables, distinctes, telles que*

$$\int u \, d\mu \leqslant \int u \, d\nu , \quad \forall u \in C ,$$

on a :

$$\int v \, d\mu < \int v \, d\nu .$$

THÉORÈME 12. - *Si* Ω *est à* **base dénombrable, alors il existe** $v \in C$ **strictement** C-*concave. Si, de plus,* 1 *est* C-*surmédiane,* v *peut être choisie bornée.*

Démonstration. - Soit (K_n) une suite fortement croissante exhaustive de compacts. Soit $C_{K_n} = \{u \in C \; ; \; \mathrm{Supp}\, u \subset K_n\}$. Soit $(v_{n,m})_m$ une suite de C_{K_n} dense dans C_{K_n} pour la convergence uniforme sur K_n . (Il suffit pour construire une telle suite de considérer les restrictions de C_{K_n} au compact métrisable K_n .)

Il existe une suite $(\alpha_{n,m})_m$ de réels > 0 telle que la série $\sum_{n,m} \alpha_{n,m} v_{n,m}$ converge uniformément sur tout compact. Sa somme v répond à la question. En effet, soient μ et ν , mesures $\geqslant 0$, C-intégrables, avec $\mu \neq \nu$ et

$$\int w \, d\mu \leqslant \int w \, d\nu , \quad \forall w \in C .$$

Comme $\mu \neq \nu$, il existe (corollaire 6) $u \in C$ telle que

$$\int u \, d\mu < \int u \, d\nu .$$

Comme $u = \sum_n u_n$ avec $u_n \in C_{K_n}$, il existe n tel que :

$$\int u_n \, d\mu^{K_n} = \int u_n \, d\mu < \int u_n \, d\nu = \int u_n \, d\nu^{K_n} \quad .$$

Il existe donc un élément $v_{n,m}$ tel que $\int v_{n,m} \, d\mu < \int v_{n,m} \, d\nu$ et par suite

$$\int v \, d\mu < \int v \, d\nu \quad .$$

Quand 1 est C-surmédiane, cela entraîne que tout élément à support compact est borné. $(v_{n,m})$ est donc une suite de fonctions bornées, et v peut donc être prise bornée.

PROPOSITION 13. - <u>Pour toute</u> v <u>strictement</u> C-<u>concave</u>, <u>on a la propriété suivante</u> : <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$ <u>et tout ouvert</u> $\omega \ni x$, $R_v^{C\omega}(x) < v(x)$.

<u>Démonstration</u>. - Il existe une mesure $\mu \geqslant 0$, C-intégrable, à support dans $C\omega$, telle que :

$$R_u^{C\omega}(x) = \int u \, d\mu \leqslant u(x) \quad , \quad \forall \, u \in C \quad .$$

(μ balayée de ε_x sur $C\omega$) . On a $\mu \neq \varepsilon_x$, donc, puisque v est strictement concave,

$$R_v^{C\omega}(x) < v(x) \quad .$$

DÉFINITION 14. - <u>Soit</u> $u \in C$. <u>Un point</u> $x \in \Omega$, <u>tel que</u> $R_u^{C\omega}(x) < u(x)$, $\forall \, \omega \ni x$, ω <u>ouvert</u>, <u>sera dit point de stricte surharmonicité de</u> u .

THÉORÈME 15. - <u>Soit</u> $u \in C$, $C' = C - \underset{\approx}{R}^+ u$ <u>et</u> $\delta_{C'}$ <u>la frontière de Choquet de</u> C' . <u>Alors</u> :

1° <u>Tout point de</u> $\delta_{C'}$ <u>est un point de stricte surharmonicité de</u> u ;
2° <u>Tout point de stricte surharmonicité de</u> u <u>est dans le support de</u> u .

<u>En résumé</u> :

$$\delta_{C'} \subset \{x \ , \ R_u^{C\omega}(x) < u(x) \ , \ \forall \, \omega \ni x\} \subset \mathrm{Supp}\, u = \overline{\delta}_{C'}$$

<u>Démonstration</u>.

1° Soit $x \in \delta_{C'}$. S'il existait un ouvert $\omega \ni x$, tel que $R_u^{C\omega}(x) = u(x)$, comme $v \longrightarrow R_v^{C\omega}$ définit une mesure ν sur $C\omega$, on aurait

$$\int (v - \lambda u) \, d\nu = R_v^{C\omega}(x) - \lambda u(x) \leqslant v(x) - \lambda u(x) \qquad (\lambda > 0) \quad ,$$

et $\nu \neq \varepsilon_x$, ce qui est absurde.

2° Soit $x \notin \operatorname{Supp} u$ et soit ω ouvert , $\omega \ni x$, $\omega \subset \complement \operatorname{Supp} u$. D'après un résultat antérieur [13], tout $v \in C$, tel que $v \geq u$ sur $\complement\omega$, est tel que $v \geq u$ dans ω , donc

$$R_u^{\complement\omega}(x) = u(x) \quad .$$

Remarques .

1° Dans une théorie axiomatique (locale) des fonctions surharmoniques (voir par exemple [3]), une fonction surharmonique v telle que tous les points de Ω soient des points de stricte surharmonicité de v , est une fonction qui n'est harmonique (au sens de la théorie), en aucun point, et inversement. Son support fermé est Ω tout entier, mais son support fin peut être seulement un ensemble dense (qui est un G_δ). Nous préciserons plus loin l'application de nos résultats.

2° Dans les théories classiques du potentiel, le support d'une fonction surharmonique coïncide soit avec le support de la mesure associée, soit avec le complémentaire du plus grand ouvert où elle est harmonique. Cela justifie notre terminologie sur les "supports" d'éléments de C .

Deuxième partie :

L'opérateur de Dynkin généralisé.

Nous allons définir un opérateur A qui généralise l'opérateur de Dynkin utilisé par les probabilistes. Cet opérateur apparaîtra comme l'"inverse" du noyau V que nous construirons, comme générateur infinitésimal du semi-groupe associé à V . Il permettra aussi de caractériser toutes les fonctions excessives s. c. i. Cet opérateur peut être défini dans un cadre très général.

DÉFINITION 1. - Soit C un cône convexe $\subset \mathcal{C}^+(\Omega)$.

1° On dit qu'un élément $u \in C$ est porté par un fermé $F \subset \Omega$ si pour tout $s \in C$,

$$(s \geq u \text{ sur } F) \implies (s \geq u \text{ dans } \Omega) \quad .$$

2° Soit $v_0 \in C$ tel que $v_0 \in o(C)$. On sait que l'ensemble des points frontière du cône $C - \underset{\sim}{R}^+ v_0$ est non vide. C'est le support fin de v_0 relativement à C , soit $\delta(v_0)$. $\delta(v_0)$ est le plus petit fermé qui porte v_0 .

3° On dit que le cône C a la propriété d'additivité des supports, si

(A.S) Pour tous u , $v \in C$, et tout fermé $F \subset \Omega$, on a :

$$(u \text{ et } v \text{ portés par } F) \implies (u+v \text{ porté par } F) .$$

Cette propriété est plus faible que la propriété d'additivité des réduites, cependant nombre de questions essentielles de la théorie du potentiel peuvent être traitées au moyen de cette propriété comme on le verra ultérieurement.

Soit C un cône convexe $\subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ avec la propriété (A.S). Alors, pour tout ouvert ω, l'ensemble C_ω des éléments de C, portés par le fermé $\complement\omega$, est un cône convexe.

4° Soit $x \in \Omega$, ω un ouvert $\omega \ni x$. Soit

$$M_{x,\omega} = \{\mu \text{ mesures } \geq 0 \text{ sur } \Omega \, ; \int f \, d\mu \leq f(x) , \ \forall f \in C - C_\omega , \ \mu(\omega) = 0\} .$$

C'est donc l'ensemble des mesures $\mu \geq 0$ qui sont des balayées de ε_x par rapport au cône convexe $C - C_\omega$ et qui sont portées par $\complement\omega$. On peut alors introduire <u>l'opérateur de Dynkin généralisé</u> :

Pour tout $u \in H_C$ (C vérifiant seulement (A.S)), on pose

$$(1) \qquad Au(x) = \liminf_{\substack{\mu \in M_{x,\omega} \\ \omega \text{ ouvert } \ni x \\ \omega \searrow x}} \frac{u(x) - \int u \, d\mu}{v_0(x) - \int v_0 \, d\mu}$$

pour tout $x \in \delta(v_0)$, où v_0 est un élément fixé de $C \cap o(C)$. L'expression (1) a toujours un sens.

Dans le cas particulier, où C vérifie les axiomes 1,2,3,4, on définit, pour tout ouvert ω et tout $x \in \omega$, la mesure $\mu_x^{\complement\omega}$ par

$$\int u \, d\mu_x^{\complement\omega} = R_u^{\complement\omega}(x) , \qquad \forall u \in C .$$

$\mu_x^{\complement\omega}$ est unique et portée par $\complement\omega$. On pose alors, pour tout $u \in H_C$ et tout $x \in \delta(v_0)$,

$$(2) \qquad Au(x) = \liminf_{\substack{\omega \text{ ouvert } \ni x \\ \omega \searrow x}} \frac{u(x) - \int u \, d\mu_x^{\complement\omega}}{v_0(x) - \int v_0 \, d\mu_x^{\complement\omega}} .$$

(On notera parfois $R_u^{\complement\omega}(x) = H_u^\omega(x)$.)

1. Propriétés de l'opérateur A .

On se bornera à les donner dans le cas particulier de l'opérateur A défini par la formule (2), car il n'interviendra que sous cette forme par la suite.

1° $(u \in C) \Longrightarrow (Au(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in \delta(v_0))$;

2° A est surlinéaire;

3° Soit $u \in C$, tel qu'il existe $\lambda > 0$ avec $\lambda v_0 - u \in C$. Alors $Au \leq \lambda$;

4° Propriété de minimum de l'opérateur A : On notera $u \prec v$, si $v - u \in C$, et on lira : u spécifiquement majoré par v .

PROPOSITION 2. - Soit H l'ensemble des fonctions $u = u_1 - u_2$ où u_1 est à support compact et u_1 , $u_2 \prec \alpha v_0$ pour un $\alpha > 0$, alors toute $u \in H$ est telle que $\frac{u}{v_0}$ atteint son maximum λ en un point x_0 de δ_{v_0} , et on a :

$$Au(x_0) \geq \lambda \quad .$$

Démonstration. - Soit $u \in H$ et soit K le support de u_1 . Soit

$$\lambda = \sup_{y \in K} \frac{u_1 - u_2}{v_0}(y) = \frac{u_1 - u_2}{v_0}(x)$$

on a $u_2 + \lambda v_0 \geq u_1$ sur K , donc partout. Donc le maximum de $\frac{u_1 - u_2}{v_0}$ sur Supp u_1 est égal à son maximum dans Ω . Soit $M = \{x \ ; \ \lambda v_0(x) = u_1(x) - u_2(x)\}$.

En tout point x de M , où $Au(x)$ est défini, on a $Au(x) \geq \lambda$. En effet :

$$Au(x) = \liminf_{\omega \to x} \frac{u_1 - u_2 - H^{\omega}_{u_1 - u_2}}{v_0 - H^{\omega}_{v_0}}(x) \geq \liminf_{\omega \to x} \frac{\lambda v_0(x) - \lambda H^{\omega}_{v_0}(x)}{v_0(x) - H^{\omega}_{v_0}(x)} = \lambda \quad .$$

Reste à voir que $M \cap \delta_{v_0} \neq \emptyset$. En effet, si on pose $w = \lambda v_0 + u_2 - u_1$, on a $w \in C - \underset{\sim}{R}^+ u_1$ et

$$M = \{y \in \Omega \ ; \ w(y) = 0\}$$

est un compact stable (cf. [13]) pour le cône $C - \underset{\sim}{R}^+ u_1$, donc M rencontre le support fin de u_1 ; or, comme $u_1 \prec \alpha v_0$, le support fin de u_1 est contenu dans celui de v_0 . Donc

$$M \cap \delta_{v_0} \neq \emptyset \quad .$$

PROPOSITION 3. - Pour toute $u \in C - C$, telle que $\frac{u}{v_0}$ atteint son maximum λ en un point x, on a

$$Au(x) \geq \lambda$$

chaque fois que $Au(x)$ est défini.

PROPOSITION 4. - Soit $u \in C - C$. Si Au est défini dans tout Ω (par exemple si v_0 est strictement concave) et si on a

$$Au(x) \leq 0 , \quad \forall\, x \in \Omega ,$$

alors $u \leq 0$ dans Ω.

Démonstration. - $u = u_1 - u_2$. u_1 se décompose selon

$$u_1 = \sum_1^\infty u_{1,n} \quad \text{avec} \quad u_{1,n} \quad \text{à support compact} \quad \forall\, n .$$

$$u_1 = \sum_1^p u_{1,n} + \sum_{p+1}^\infty u_{1,n} = u'_p + u''_p .$$

$\frac{u'_p - u_2}{v_0}$ atteint son maximum λ_p dans Ω en un point de $\operatorname{Supp} u'_p$, car $\operatorname{Supp} u'_p$ est compact.

Si $\lambda_p > 0$, puisque par surlinéarité de A, on a

$$A(u''_p) + A(u'_p - u_2) \leq A(u_1 - u_2) ,$$

on obtiendrait $A(u_1 - u_2) > 0$ en un point (car $Au''_p \geq 0$), ce qui est contradictoire. Donc

$$u'_p - u_2 \leq 0 , \quad \forall\, p ,$$

donc

$$u_1 - u_2 \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega .$$

PROPOSITION 5. - Soit $u = u_1 - u_2 \in C - C$ avec u_1 et $u_2 \prec \alpha v_0$ pour un $\alpha > 0$. Alors, si $Au(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \delta_{v_0}$, on a :

$$u \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega .$$

Démonstration. - On se ramène au cas où u_1 et u_2 sont à supports compacts (chacun s'écrit comme somme de tels éléments).

S'il existe $x \in \Omega$ tel que $u(x) > 0$, $\frac{u}{v_0}$ aurait un maximum $\lambda > 0$ dans Ω. On sait qu'il existe $x_0 \in \delta_{v_0}$ tel que $\frac{u}{v_0}(x_0) = \lambda$. Donc $Au(x_0) \geq \lambda > 0$, ce qui est absurde. Donc

$$u \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \ .$$

2. L'unicité du noyau dans un cadre général.

L'un des avantages de l'opérateur A est qu'il permet de démontrer l'unicité du noyau V associé à un élément v_0 de C, si un tel noyau existe. A apparaît toujours en effet comme inverse d'un noyau tel que $V1 = v_0$, A étant défini au moyen de v_0. Nous ferons cette démonstration dans le cadre suivant. Ω n'est pas ici supposé à base dénombrable, mais seulement dénombrable à l'infini.

DÉFINITION 6. - Soient C_1, C_2 deux cônes convexes de fonctions continues, tels que

$$C_1 \subset C_2 \subset \mathcal{C}^+(\Omega) \ .$$

On dira qu'un élément u de C_1 est porté par un fermé $F \subset \Omega$ (relativement à C_2) si la propriété suivante est vérifiée :

(P) $$(v \in C_2\ ,\ v \geq u \ \text{ sur } \ F) \implies (v \geq u \ \text{ sur } \ \Omega) \ .$$

On désignera par $C_{1,F}$ l'ensemble (qui n'est pas toujours convexe) des éléments de C_1, portés par le fermé $F \subset \Omega$ relativement à C_2.

Supposons le cône C_2 linéairement séparant. Il en résulte que, pour tout $v \in C_2$ et tout compact $K \subset \Omega$, le cône $(C_2 - \mathbb{R}^+ v)_{|K}$ a une frontière fine, donc v a un support fin, dans K, soit $\delta_K(v)$.

On peut là aussi introduire la propriété (A.S) relative à C_1 :

(A.S) Pour tout fermé $F \subset \Omega$, si u, $v \in C_1$ sont portés par F relativement à C_2, alors $u + v$ l'est aussi.

Remarquons que cette propriété (A.S) est équivalente à la suivante :

Pour tout fermé $F \subset \Omega$, l'ensemble $C_{1,F}$ est un cône convexe.

La propriété (A.S) sur C_2, rendra donc possible le balayage sur $F \cap K$ par rapport au cône convexe $(C_2 - C_{1,F\cap K})_{|K}$. On peut alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 7 (<u>d'unicité du noyau</u>). - <u>Soient</u> $C_1 \subset C_2 \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, <u>deux cônes convexes tels que</u> :

C_2 <u>soit linéairement séparant,</u>

C_2 <u>vérifie la propriété</u> (A.S) <u>relative à</u> C_1 .

<u>Soit</u> $v_0 \in C_1$. <u>Il existe au plus un noyau</u> V , <u>positif sur</u> $\mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>tel que</u> :

(a) $V(\mathcal{C}_b^+(\Omega)) \subset C_1$,

(b) $V\varphi$ <u>porté par</u> $S\varphi$ <u>relativement</u> à C_2 , $\forall\ \varphi \in \mathcal{C}_b^+$,

(c) $V1 = v_0$.

<u>Démonstration</u>. - V étant un noyau, on a :

$$v_0 = \sum_n V\varphi_n \quad \text{où} \quad (\varphi_n) \subset \mathcal{C}_K^+(\Omega) \quad .$$

Soit $v_n = V\varphi_n$; on a un noyau V_n , associé à v_n et satisfaisant à (a), (b) et (c), défini par

$$V_n\, \psi = V(\varphi_n\, \psi) \quad .$$

On peut donc supposer v_0 porté par un compact $K \subset \Omega$, ou encore que Ω est compact.

Soit

$$Au(x) = \liminf_{\substack{\mu \overset{\omega}{\prec} \varepsilon_x \\ S\mu \subset \omega \\ \omega \searrow x}} \frac{u(x) - \int u\, d\mu}{v_0(x) - \int v_0\, d\mu} , \qquad \forall\ x \in \delta(v_0) \quad ,$$

où $\delta(v_0)$ est la frontière fine de $(C_2 - \underset{\sim}{R}^+ v_0)$ et $\mu \overset{\omega}{\prec} \varepsilon_x$ signifie que μ est balayée de ε_x relativement au cône $(C_2 - C_{1,\complement\omega})$.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME 8. - <u>Si</u> $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>et</u> $\varphi = \alpha$ <u>au voisinage d'un point</u> x , <u>alors</u>

$$AV\varphi(x) = \alpha \qquad (\ \alpha : \text{constante}) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - $\varphi = \alpha.1 + (\varphi - \alpha.1)$. Il existe un voisinage ω de $x \in \delta(v_0)$ tel que, si $\mu \overset{\omega}{\prec} \varepsilon_x$, μ portée par $\complement\omega$, on a

$$\int V(\varphi - \alpha.1)\, d\mu = V(\varphi - \alpha.1)(x) \quad .$$

Par suite :

$$V\varphi(x) - \int V\varphi \, d\mu = \alpha V1(x) - \alpha \int V1 \, d\mu \quad .$$

Donc :

$$AV\varphi(x) = \alpha = \varphi(x) \quad .$$

<u>Démonstration du théorème</u>. - Soit $\varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. On écrit :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

avec $\varphi_1 = \alpha = \varphi(x)$ dans un voisinage de x et

$$\|\varphi_2\| = \sup \varphi_2(y) < \varepsilon \ , \quad \varphi_1 \ \text{ et } \ \varphi_2 \geqslant 0 \quad .$$

On a :

$$V\varphi_1(x) - \int V\varphi_1 \, d\mu = \alpha(V1(x) - \int V1 \, d\mu)$$

pour une balayée μ de ε_x convenable.

$$V\varphi_2(x) - \int V\varphi_2 \, d\mu \leqslant \varepsilon(V1(x) - \int V1 \, d\mu) \quad .$$

Donc $AV\varphi(x) = \varphi(x)$.

On montre ensuite que $AV(1 - \varphi) = 1 - \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, $\varphi \leqslant 1$, grâce au fait que $A(- v_0) = - 1$. On en déduit que $A(- V\varphi) = - \varphi$ aux points de la frontière $\delta(v_0)$. D'où le résultat.

Par la suite le théorème ci-dessus sera appliqué sous la forme suivante : Ω est localement dénombrable à l'infini.

THÉORÈME 9. - <u>Soit</u> $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$ <u>un cône convexe adapté</u>, <u>vérifiant la propriété d'additivité des réduites</u>. (<u>Pour tout</u> $u \in C$, <u>on a donc une notion de support fermé relatif à</u> C , $\overline{\delta}_u$.) <u>Soit</u> $v_0 \in C$ <u>et soit</u> V <u>une application linéaire de</u> $\mathcal{C}_K(\Omega)$ <u>dans</u> $C - C$ <u>telle que</u>

(a) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^+$, $V\varphi \in C$,

(b) $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_K^+$,

(c) $V1 = v_0$;

<u>Alors</u>

$$AV\varphi = \varphi \ \text{ sur } \ \delta_{v_0} \ , \quad A\varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega) \quad .$$

(L'opérateur A n'est autre ici que celui de la formule (2) utilisant les réduites.)

Remarques.

1° L'opérateur A, dans tous les cas, jouit d'une propriété d'injectivité en ce sens que :

$$(Au \leq 0 \quad \text{et} \quad A(-u) \leq 0) \implies (u = 0) \quad .$$

2° Dans la construction du noyau, l'opérateur A ne servira qu'une fois, dans l'étude de la "restriction spécifique" d'un élément de C, et par la propriété indiquée dans la remarque précédente.

Donnons encore un dernier résultat sur le noyau V (s'il existe).

THÉORÈME 10. - Dans les conditions du théorème 7, les mesures $(\varepsilon_x V)_{x \in \Omega}$ définies par :

$$\varphi \longrightarrow (V\varphi)(x) \; , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega)$$

sont portées par $\delta(v_0)$ au sens suivant (le meilleur) :

Pour tout compact $K \subset \Omega$, $(K \cap \delta(v_0) = \emptyset) \implies ((\varepsilon_x V)(K) = 0 \; , \; \forall x)$ où $\delta(v_0)$ est le support fin de v_0 défini de manière générale par

$$\delta(v_0) = \{x \in \Omega \; ; \; (\int u \, d\mu \leq u(x) \; , \; \forall u \in (C_2 - \underset{\sim}{R}^+ v_0)) \implies (\mu = \varepsilon_x)\} \quad .$$

Démonstration. - L'existence de V entraîne que

$$v = \sum v_n \quad \text{où} \quad (v_n) \subset C_1 \; , \; \text{et} \quad V = \sum_n V_n \; , \quad V_n \text{ associé à } v_n \quad .$$

v_n portée par un compact relativement à C_2, on peut donc, comme dans le théorème 7, se ramener au cas où Ω est compact, car $\delta(v) \supset \bigcup_n \delta(v_n)$.

Soit φ une fonction s. c. s. telle que $\varphi = 0$ sur $\delta(v_0)$. Soit $u_0 \in C_2$ tel que $u_0 + v_0 > 0$ sur $\overline{\delta(v_0)}$.

Soit A' l'opérateur défini par

$$A'u(x) = \liminf_{\substack{\mu \overset{\omega}{\to} \varepsilon_x \\ S\mu \subset \omega \\ \omega \searrow x}} \frac{u(x) - \int u \, d\mu}{(u_0 + v_0)(x) - \int (u_0 + v_0) \, d\mu} \quad .$$

On a $A'V\varphi \leq AV\varphi = \varphi$ sur $\delta(v_0)$.

Soit F l'ensemble où $\dfrac{V\varphi}{u_0 + v_0}$ atteint son maximum λ. F est un fermé stable pour le balayage relatif au cône $(C_2 - \underset{\sim}{R}^+ v_0)$.

De plus, $F \cap \delta(v_0) \neq \emptyset$, car $-V\varphi < 0$ sur F (cf. Démonstration de la proposition 2 de la deuxième partie).

Par un raisonnement déjà utilisé, si $x \in F \cap \delta(v_0)$, on a

$$A'V\varphi(x) \geqslant \lambda \quad ,$$

or

$$A'V\varphi(x) \leqslant \varphi(x) = 0 \quad ,$$

d'où contradiction, et $V\varphi \equiv 0$.

DÉFINITION 11. - <u>On appelle noyau subordonné à</u> C , <u>cône convexe linéairement séparant,</u> $C \subset \mathcal{C}^+(\Omega)$, <u>une application linéaire positive</u> V <u>de</u> $\mathcal{C}_K^+(\Omega)$ <u>dans</u> H_C <u>telle que</u> :

(a) $V(\mathcal{C}_K^+(\Omega)) \subset C$,

(b) $\mathrm{Supp}(V\varphi) \subset S\varphi$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)$.

<u>Remarques</u>.

1° On voit donc que, dans les conditions du théorème 9, les mesures $(\varepsilon_x V)_{x\in\Omega}$ sont portées par le support fin $\delta(v_0)$ de $v_0 \in C$ tel que $V1 = v_0$. C'est là une propriété assez forte spécifique de la théorie du potentiel.

2° Nous verrons plus loin, lorsque nous introduirons la résolvante, que toute mesure $\varepsilon_x V$ est extrêmale dans l'ensemble des mesures qui lui sont égales sur C_1 , et qu'il en est de même en fait de toute mesure $\mu \geqslant 0$ pseudo-portée par $\delta(V1)$; pseudo-portée par $\delta(V1)$ signifiant que tout compact de Baire disjoint de $\delta(V1)$ est de μ-mesure nulle.

Troisième partie :

<u>Construction du noyau</u>.

Ω est localement compact à base dénombrable et C vérifie les axiomes 1 à 4.

On se propose dans cette partie de construire une application qui, à tout élément $v \in C$, fait correspondre un noyau subordonné à C tel que $V1 = v$.

Afin de faciliter la lecture, nous donnons un plan de cette construction qui est un peu technique.

(a) Pour tout $v \in C$ et tout ouvert ω , on définit la fonction v_ω dite <u>restriction spécifique</u> de v à ω . On l'exprime comme somme d'éléments de C .

(b) Pour $v \in C$, $x \in \Omega$, on introduit l'opérateur

$$\varphi \longrightarrow \int_0^{\sup \varphi} v_{[\varphi>\alpha]}(x)\, d\alpha = V\varphi(x) \qquad (\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)) \quad ,$$

on montre qu'on se trouve dans les conditions d'un théorème général de Choquet, qui permet de conclure que

$$\varphi \longrightarrow V\varphi(x) \qquad (\varphi \in \mathcal{C}_K^+(\Omega)) \quad ,$$

définit une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur Ω .

(c) Reste à voir que $V\varphi \in C$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$. Pour cela, on démontre qu'il existe une famille $\Phi \subset \mathcal{C}_K^+(\Omega)$, telle que $V\varphi \in C$, $\forall\, \varphi \in \Phi$; Φ est telle que, pour tout ouvert ω et tout compact $K \subset \omega$, il existe $\varphi \in \Phi$ telle que $S\varphi \subset \omega$, $\varphi = 1$ sur K . Φ est assez "riche" ; on en conclut

$$V\varphi \in C \ , \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega) \quad .$$

(d) $V1 = v$, V vérifie le principe de domination et si $1 = \sup f_n$ avec $(f_n) \subset C$, (f_n) croissante, V vérifie le principe complet du maximum.

1. Existence de la restriction spécifique v_ω .

LEMME 1. - Soient F fermé, contenu dans un ouvert ω et soit v un élément quelconque du cône C .

Soient

$$v = u_1 + v_1 \quad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} u_1 \subset F$$

et

$$v = u_2 + v_2 \quad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} v_2 \subset \complement\omega \quad ,$$

deux décompositions de v . Alors on a :

$$u_1 \leqslant u_2 \quad .$$

Démonstration. - Il suffit, d'après la propriété de l'opérateur A , de montrer que $A(u_1 - u_2)$ est une fonction négative sur le support fin $\delta(v)$ de v .

Soit $x \in (\complement F) \cap \delta_{(v)}$, on a :

$$\frac{(u_1 - u_2 - H^\gamma_{u_1-u_2})(x)}{(v - H^\gamma_v)(x)} = - \frac{(u_2 - H^\gamma_{u_2})(x)}{(v - H^\gamma_v)(x)} \leqslant 0 \quad ,$$

(car on prend un ouvert $\gamma \ni x$ tel que $\delta \subset \complement F$ et on a alors $u_1(x) - H^\gamma_{u_1}(x) = 0$).

Donc

$$A(u_1 - u_2)(x) \leq 0 \quad .$$

Soit $x \in F \cap \delta_v$; on prend γ ouvert $\ni x$, $\gamma \subset \omega$, on a

$$(v - H_v)(x) = (u_2 - H^{\delta}_{u_2})(x) \quad ,$$

car $\operatorname{Supp} v_2 \subset \complement\omega$.

De plus $(u_1 - H^{\gamma}_{u_1})(x) \leq (v - H^{\gamma}_v)(x)$, car on a $u_1 \prec v$, et $(v_1 - H^{\gamma}_{v_1})(x) \geq 0$.

Donc

$$\frac{(u_1 - u_2 - H^{\delta}_{u_1 - u_2})(x)}{(v - H^{\delta}_v)(x)} \leq 0 \quad ,$$

et par suite

$$A(u_1 - u_2) \leq 0 \quad \text{dans} \quad \delta(v) \quad ,$$

donc

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{dans} \quad \omega \quad .$$

DÉFINITION 2. - On appelle <u>restriction spécifique</u> de $v \in C$ à l'ouvert ω la fonction

$$v_{\omega} = \sup\{u \in C \ ; \ u \prec v \ , \ \operatorname{Supp} u \ \text{compact} \subset \omega\} \quad .$$

L'intérêt de cette fonction est qu'elle apparaît comme la fonction $V(1_{\omega})$ où 1_{ω} est la fonction caractéristique de ω et V le noyau qui sera associé à v .

THÉORÈME 3. - v_{ω} <u>est une somme d'éléments de</u> C <u>spécifiquement majorés par</u> v ; <u>on a donc</u> :

$$v_{\omega} = \sum_{n \geq 1} w_n \ \underline{\text{avec}} \ w_n \in C \ , \ w_n \prec v \ , \ \operatorname{Supp} w_n \ \underline{\text{compact}} \subset \omega \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit (ω_n) une suite d'ouverts telle que :

$$\overline{\omega}_n \subset \omega_{n+1} \subset \overline{\omega}_{n+1} \subset \omega \ , \quad \forall\, n \quad \text{et} \quad \bigcup_n \omega_n = \omega \quad .$$

Grâce à l'axiome de décomposition, on construit par récurrence une suite v_n d'éléments de C , telle que $v_0 = v$ et

$$v_n = u_{n+1} + v_{n+1} \quad \text{avec} \quad u_{n+1} \in C \ , \quad v_{n+1} \in C \quad ,$$

$$\operatorname{Supp} v_{n+1} \subset \complement\omega_{n+1} \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp} u_{n+1} \subset \omega_{n+2} \quad .$$

On a
$$v = \sum_{i=1}^{p} u_i + v_p \,, \qquad \forall\ p \ \text{entier} \geqslant 1 \ .$$

Par suite, pour tout $v' \in C$, tel que $v' < v$, et v' à support compact $\subset \omega$, il existe p tel que
$$\sum_1^{p'} u_i \geqslant v' \ .$$

En effet, on peut appliquer le lemme 1 aux deux décompositions de v :
$$v = v' + w' \quad \text{et} \quad v = \sum_{i \leqslant p} u_i + v_p \ .$$

Par suite, $\sum_1^{\infty} u_i = s$ est supérieur à tout tel v'.

On a donc bien :
$$v_\omega = \sum_1^{\infty} u_i \quad \text{avec} \quad (u_i) \subset C \,, \quad u_i < v \,, \quad \forall\ i \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp} u_i \quad \text{compact} \subset \omega \ .$$

Soit alors $v' < v$ tel que $\operatorname{Supp} v' \subset \omega$ non nécessairement compact.

On va montrer que $v_\omega - v'$ s'écrit comme une somme d'éléments du cône C.

En effet, on pose
$$v = v' + w' \quad \text{et} \quad w' = u'_1 + w'_1$$

avec
$$\operatorname{Supp} w'_1 \subset \complement\omega_1 \,, \qquad \operatorname{Supp} u'_1 \subset \omega_2 \ ;$$

puis
$$w'_n = u'_{n+1} + w'_{n+1} \,, \qquad \forall\ n > 1$$

avec $\operatorname{Supp} w'_{n+1} \subset \complement\omega_{n+1}$ et $\operatorname{Supp} u'_{n+1} \subset \omega_{n+2}$, $\forall\ n$.

Montrons que
$$v' + \sum_{n \geqslant 1} u'_n = v_\omega \ .$$

En effet, pour tout $w \in C$ tel que $\operatorname{Supp} w$ compact $\subset \omega$, $w < v$, il existe p tel que $v' + \sum_1^p u'_n \geqslant w$; il suffit d'appliquer le lemme 1 aux deux décompositions de v :
$$v = w + w_1 \quad \text{et} \quad v = v' + \sum_{i \leqslant p} u'_i + w'_{p+1} \ .$$

De plus, on a manifestement :

$$v' + \sum_{n=1}^{\infty} u'_n \leq v_\omega \quad .$$

On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 3 bis. - La restriction spécifique v_ω s'écrit aussi :

$$v_\omega = \sup\{u \in C \; ; \; u < v \; , \; \text{Supp } u \subset \omega\}$$

(le support de u n'est plus supposé compact).

COROLLAIRE 4. - Si $\text{Supp } v \subset \omega$, alors $v_\omega = v$.

Remarquons qu'en général v_ω est seulement s. c. i.

PROPOSITION 5. - Si $v = v_1 + v_2$ $(v_i \in C \; , \; i = 1 \; , \; 2)$ et si ω ouvert $\subset \Omega$, on a :

$$v_\omega = (v_1)_\omega + (v_2)_\omega \quad .$$

Démonstration. - Soient K compact $\subset \omega$, et $w_1 \in C$ tel que :

$$v = w_1 + w_2 \quad \text{avec} \quad \text{Supp } w_1 \subset K \quad .$$

Posons

$$v_i = u_i + u'_i \quad (i = 1 \; , \; 2) \quad \text{avec} \quad \text{Supp } u'_i \subset \complement K \quad (i = 1 \; , \; 2) \quad .$$

On a :

$$v = u_1 + u_2 + u'_1 + u'_2 \quad \text{avec} \quad \text{Supp}(u'_1 + u'_2) \subset \complement K \quad .$$

Donc (voir lemme 1) : $u_1 + u_2 \geq w_1$. Donc : $v_\omega \leq (v_1)_\omega + (v_2)_\omega$. La réciproque est évidente, car si deux éléments de C ont leur support dans un fermé F , leur somme aussi.

LEMME 6. - Soient $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$, et α , β réels tels que α , $\beta \in \left]0 \; , \; \sup \varphi\right[$ et $\alpha < \beta$.

Désignons par v_ξ la fonction $v_{[\varphi > \xi]}$ (restriction spécifique de v à l'ouvert $[\varphi > \xi]$). Alors il existe $g \in C$ telle que :

$$v_\beta \leq g \leq v_\alpha \quad .$$

Démonstration. - En effet, soient

$$\omega_\alpha = [\varphi > \alpha] \quad \text{et} \quad \omega_\beta = [\varphi > \beta] \quad .$$

Soit ω un ouvert tel que

$$\overline{\omega}_\beta \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \omega_\alpha$$

(un tel ω existe, car l'espace Ω étant à base dénombrable est normal).

D'après la propriété de décomposition, v peut s'écrire :

$$v = g_1 + g_2 \quad \text{avec} \quad \text{Supp } g_1 \subset \omega \quad \text{et} \quad \text{Supp } g_2 \subset \complement\overline{\omega}_\beta \ ,$$

on a :

$$v_\beta \leqslant g_1 \leqslant v_\alpha \ .$$

En effet, $g_1 \leqslant v_\alpha$ par définition de v_α. $v_\beta \leqslant g_1$, car v_β s'écrit $v_\beta = \sum_1^\infty v'_n$ (théorème 3) et toute somme finie $\sum_1^p v'_n$ est $\leqslant g_1$ d'après le lemme 1.

Ce lemme 6 servira essentiellement à montrer que pour l'opérateur V, que nous allons associer à une fonction (arbitraire) du cône C, la fonction $V\varphi$ est continue.

PROPOSITION 7. - Soit v un élément quelconque du cône C. Soit V l'opérateur défini par la relation :

(1) $$V\varphi(x) = \int_0^{\sup \varphi} v_{[\varphi>\alpha]}(x)\, d\alpha \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in C_b^+(\Omega) \quad \text{et} \quad x \in \Omega \ .$$

Alors $V\varphi$ est une fonction continue dans Ω.

Démonstration.

1° Chaque fonction $v_\alpha = v_{[\varphi>\alpha]}$ est s. c. i. (comme somme d'éléments de C) ; la fonction $\alpha \longmapsto v_{[\varphi>\alpha]}(x)$ est décroissante pour $\alpha \in [0 , \sup \varphi]$; la fonction $V\varphi$, pouvant s'écrire comme enveloppe supérieure d'éléments de la forme

$$\sum_1^n \lambda_i\, v_{[\varphi>\alpha_i]} \qquad (\lambda_i \geqslant 0) \ ,$$

qui sont fonctions s. c. i., est elle-même s. c. i.

2° Le lemme précédent montre que la fonction $\inf\limits_{\alpha<\beta} v_\alpha$ est une fonction s. c. s., comme inf des fonctions g intercalées entre v_α et v_β.

Donc la fonction $V\varphi$ est aussi s. c. s., et par suite continue.

Rappelons un théorème qu'on peut déduire aisément d'un théorème général de CHOQUET ([1]).

THÉORÈME 8. - Soient $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des ouverts de Ω supposé seulement localement compact, et T une application de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\underset{\sim}{R}^+$ telle que :

(a) $T(\omega_1 \cup \omega_2) + T(\omega_1 \cap \omega_2) = T(\omega_1) + T(\omega_2)$ pour tout couple d'ouverts ω_1, $\omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$;

(b) $T(\omega_1) \leq T(\omega_2)$, $\forall\ \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\omega_1 \subset \omega_2$;

(c) $T(\bigcup\limits_n \omega_n) = \sup\limits_n T(\omega_n)$ pour toute suite croissante d'ouverts.

Alors, l'application :

$$\varphi \longrightarrow \int_0^{\sup \varphi} T(\varphi > \alpha)\, d\alpha \qquad (\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)) ,$$

définit une mesure de Radon $\mu \geq 0$ sur l'espace Ω et, pour tout ouvert ω qui est un F_σ,

$$\mu(\omega) = T(\omega) .$$

Soit $x \in \Omega$. Nous allons montrer que l'application $\omega \longrightarrow v_\omega(x)$ vérifie toutes ces propriétés.

PROPOSITION 9. - $v_{\omega_1 \cap \omega_2} + v_{\omega_1 \cup \omega_2} = v_{\omega_1} + v_{\omega_2}$.

Démonstration. - Chacune de ces fonctions s'écrit comme une somme d'éléments à support compact contenu dans l'ouvert correspondant.

1° Soit $v_{\omega_1} = \sum\limits_1^\infty u_n$, $v_{\omega_2} = \sum\limits_1^\infty v_n$. On pose

$$s_p = \sum_1^p u_n , \quad t_p = \sum_1^p v_n .$$

Soit K_1 le support (compact) de s_p, K_2 celui de t_p. D'après la propriété de décomposition :

$$s_p = s_p^1 + s_p^2$$

avec

$$\operatorname{Supp} s_p^1 \subset (\omega_1 \cap \omega_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp} s_p^2 \subset (\omega_1 \cap CK_2) .$$

Les fonctions s_p^2 et t_p étant à supports disjoints, on a $t_p + s_p^2 \leq v_{\omega_1 \cup \omega_2}$.

De plus

$$s_p^1 \leq v_{\omega_1 \cap \omega_2} ;$$

On a donc montré l'inégalité

$$v_{\omega_1} + v_{\omega_2} \leqslant v_{\omega_1 \cap \omega_2} + v_{\omega_1 \cup \omega_2} \quad .$$

2° On démontre de façon à peu près analogue l'inégalité inverse. On a :

$$v_{\omega_1 \cup \omega_2} = \sum_n u'_n \ , \quad v_{\omega_1 \cap \omega_2} = \sum_n v'_n \quad .$$

Soient $s'_p = \sum_1^p u'_n$, $t'_p = \sum_1^p t'_p$.

$$K'_1 = \text{Supp } s'_p \subset (\omega_1 \cup \omega_2) \ , \quad K'_2 = \text{Supp } t'_p \subset (\omega_1 \cap \omega_2) \quad .$$

On écrit $s'_p = s'^1_p + s'^2_p$ avec $\text{Supp } s'^2_p \subset \omega_2$ et $\text{Supp } s'^1_p \subset (\omega_1 \cap \complement K'_2)$.

$$s'^1_p + t'_p \leqslant v_{\omega_1} \quad (\text{car Supp } s'^1_p \cap \text{Supp } t'_p = \emptyset)$$

et

$$s'^2_p \leqslant v_{\omega_2} \quad .$$

C. Q. F. D.

Si $\omega_1 \subset \omega_2$, on a $v_{\omega_1} \leqslant v_{\omega_2}$.

PROPOSITION 10. - <u>Si</u> $\omega = \bigcup_n \omega_n$ <u>où</u> (ω_n) <u>est une suite croissante d'ouverts, on a</u> :

$$v_\omega = \sup_n v_{\omega_n} \quad .$$

En effet, pour tout compact $K \subset \omega$, il existe n_0 tel que $\omega_{n_0} \supset K$. Donc toute $u \prec v$, $\text{Supp } u \subset K$, est telle que $u \leqslant v_{\omega_{n_0}}$; donc $v_\omega \leqslant \sup v_{\omega_n}$.

COROLLAIRE 11. - <u>Pour tout</u> $x \in \Omega$, <u>l'application</u>

$$\varphi \longmapsto \int_0^{\sup \varphi} v_{[\varphi > \alpha]}(x) \, d\alpha = V\varphi(x) \ , \qquad \varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega) \ ,$$

<u>définit une mesure de Radon</u> $\geqslant 0$, <u>notée</u> $\varepsilon_x V$, <u>sur</u> Ω .

<u>On prolonge</u> V <u>à l'espace</u> $\mathcal{C}_b$ <u>par</u> :

$$V\varphi(x) = V\varphi^+(x) - V\varphi^-(x) \quad .$$

DÉFINITION 12. - Soit $v \in C$. Soit Γ l'ensemble des couples (v_i , ω_i) où $v_i \in C$, ω_i ouvert $\subset \Omega$ tels que $v_i \prec v$ et $\operatorname{Supp} v_i \subset \omega_i$.

On introduit une relation d'ordre fort sur Γ en posant :

$$(v_i , \omega_i) \prec (v_j , \omega_j) \iff \{\overline{\omega}_i \subset \omega_j , \quad v_i \prec v_j , \quad \operatorname{Supp}(v - v_j) \subset \complement\omega_i .$$

Il est utile de remarquer que

$$((v_i , \omega_i) \prec (v_j , \omega_j)) \implies ((v - v_j , \complement\overline{\omega}_j) \prec (v - v_i , \complement\overline{\omega}_i)) .$$

LEMME 13. - <u>Soit</u> $(v_1 , \omega_1) \prec (v_2 , \omega_2)$ <u>où</u> $(v_i , \omega_i) \in \Gamma$ $(i = 1 , 2)$. <u>Alors, il existe</u> $(v_3 , \omega_3) \in \Gamma$ <u>tel que</u> :

$$(v_1 , \omega_1) \prec (v_3 , \omega_3) \prec (v_2 , \omega_2) .$$

<u>Démonstration</u>. - On pose $v_2 - v_1 = u \in C$. Soit ω_3 un ouvert tel que :

$$\operatorname{Supp} v_1 \subset \omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega_3 \subset \overline{\omega}_3 \subset \omega_2 \cap \complement \operatorname{Supp}(v - v_2) .$$

On décompose u de la manière suivante :

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{avec} \quad \operatorname{Supp} u_1 \subset \complement\overline{\omega}_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Supp} u_2 \subset \omega_3 .$$

On pose $v_3 = v_1 + v_2$. On a trivialement : $(v_3 , \omega_3) \prec (v_2 , \omega_2)$.

Pour vérifier que $(v_1 , \omega_1) \prec (v_3 , \omega_3)$, on écrit

$$v - v_3 = (v - v_2) + u_1$$

et on a bien

$$\operatorname{Supp}(v - v_3) \cap \omega_1 = \emptyset \quad ;$$

les autres points de la définition sont immédiats.

Soient toujours $v \in C$, et V l'opérateur défini à partir de v (prop. 7).

THÉORÈME 14. - <u>Soit</u> K <u>compact</u> $\subset \omega$ <u>ouvert relativement compact</u>. <u>Il existe</u> φ <u>continu</u> $\geqslant 0$, $\varphi \leqslant 1$, $\varphi = 1$ sur K <u>et</u> $S\varphi \subset \omega$ <u>telle que</u> $V\varphi \in C$.

<u>Démonstration</u>. - Soit D l'ensemble des nombres dyadiques de $[0 , 1]$. Soit ω_1 un ouvert tel que

$$K \subset \omega_1 \subset \overline{\omega}_1 \subset \omega .$$

On décompose :

$$v = v_0 + v'_0 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Supp}\, v_0 \subset \omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}\, v'_0 \cap \overline{\omega}_1 = \emptyset \ .$$

$$v = v_1 + v'_1 \quad \text{avec} \quad \mathrm{Supp}\, v_1 \subset \omega_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}\, v'_1 \cap K = \emptyset \ .$$

On a donc :

$$(v_1 , \omega_1) \prec (v_0 , \omega_0) \ .$$

D'après le lemme précédent, on peut donc trouver un couple $(v_{1/2} , \omega_{1/2})$ de Γ tel que :

$$(v_1 , \omega_1) \prec (v_{1/2} , \omega_{1/2}) \prec (v_0 , \omega_0) .$$

On construit ainsi, par récurrence, une famille $(v_\alpha , \omega_\alpha) \in \Gamma$ telle que si $\alpha > \beta$, alors :

$$(v_\alpha , \omega_\alpha) \prec (v_\beta , \omega_\beta) \ , \quad \alpha , \beta \in D \ .$$

Pour tout α réel appartenant à $[0 , 1]$, on pose :

$$\omega_\alpha = \bigcup_{\substack{\beta>\alpha \\ \beta\in D}} \omega_\beta \quad \text{et} \quad u_\alpha = \sup_{\substack{\beta>\alpha \\ \beta\in D}} v_\beta \ .$$

ω_α est un ouvert et u_α est la restriction spécifique de v (la fonction de départ) à l'ouvert ω_α .

D'après un théorème de Urysohn, il existe une fonction φ , et une seule, continue, $0 \leq \varphi \leq 1$, telle que $[\varphi > \alpha] = \omega_\alpha$, $\forall\ \alpha \in [0 , 1]$; $\omega_\alpha \supset K$, $\forall\ \alpha$, donc $\varphi = 1$ sur K , et $S\varphi \subset \omega$. On pose

$$u = \int_0^1 u_\alpha \, d\alpha \qquad (u = V\varphi) \ .$$

On va voir que u est une somme continue d'éléments de C .

Soit T_n la subdivision de l'intervalle $[0 , 1]$ en intervalles égaux de longueur $\frac{1}{2^n}$. $T_n = (\alpha_0 , \alpha_1 , \dots , \alpha_{2^n})$.

Soit :

$$w_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} v_{k/2^n} \ .$$

Par construction, on a $w_{n+1} \succ w_n$. De plus, $w_n \in C$, $\forall\ n$, et

$$\sup w_n = \int_0^1 u_\alpha \, d\alpha$$

est en fait une somme continue d'éléments de C , donc est dans C .

C. Q. F. D.

Remarque. - Le même raisonnement montre que $\forall\ \alpha\ ,\ \beta \in [0\ ,\ 1)\ ,\quad \alpha < \beta\ ,$
$\int_\alpha^\beta u_\gamma\, d\gamma$ est une somme continue d'éléments de C , donc appartient à C .

PROPOSITION 15. - Soit Φ une famille de fonctions continues définies dans Ω à valeurs dans $[0\ ,\ 1)$ telles que, pour tout ouvert ω relativement compact et tout compact $K \subset \omega$, il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $\varphi = 1$ sur K et $S\varphi \subset \omega$. Alors, pour toute $f \in C_b^+(\Omega)$, il existe $(\varphi_n) \subset \Phi$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tels que :

$$f = \sum_{n>0} \lambda_n \varphi_n \quad .$$

Démonstration. - D'après la paracompacité de Ω , on peut se ramener à $f \in \mathcal{K}^+(\Omega)$. Soit $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \sup f$ une subdivision de l'intervalle $[0\ ,\ \sup f]$. On choisit $\varphi_p \in \Phi$, telle que : $\varphi_p = 1$ sur $[f \geq \alpha_p]$, $S\varphi \subset [f > \alpha_{p-1}]$ pour $p = 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n$. On pose :

$$\psi = \sum_{p=1}^{n} (\alpha_p - \alpha_{p-1})\varphi_p \ ,$$

on a évidemment $\psi \leq f$. Soit $x \in S_f$. x est tel que $\alpha_{p-1} < f(x) \leq \alpha_p$ pour un certain p entier appartenant à $[1\ ,\ n]$.

Pour $q < p$, on a :

$$\varphi_q(x) = 1 \quad .$$

$$\alpha_{p-1} = \sum_{q\leq p-1} (\alpha_q - \alpha_{q-1})\ \varphi_q(x) \leq \psi(x) \leq f(x) \quad .$$

Donc $0 \leq f(x) - \psi(x) \leq \alpha_p - \alpha_{p-1}$

Par suite,

$$\sup_x |f(x) - \psi(x)| \leq \max_p |\alpha_p - \alpha_{p-1}|$$

C. Q. F. D.

PROPOSITION 16. - Soit $(\varphi_n) \subset C_b^+(\Omega)$, (φ_n) croissante et $\varphi = \sup \varphi_n \in C_b^+(\Omega)$. Alors

$$V\varphi = \sup_n V\varphi_n \quad .$$

Cela résulte du lemme suivant.

LEMME 17. - Pour tout α réel > 0 ,

$$v_{[\varphi>\alpha]} = \sup_n v_{[\varphi_n>\alpha]} \quad .$$

En effet, $[\varphi > \alpha] = \bigcup_n [\varphi_n > \alpha]$, et on applique la proposition 10.

La proposition résulte alors du théorème de Lebesgue.

THÉORÈME 18. - <u>Pour toute</u> $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$, <u>on a</u> $V\varphi \in C$.

<u>Démonstration</u>. - D'après la proposition 15, $\varphi = \sum_{n>0} \lambda_n \varphi_n$, $\lambda_n \geqslant 0$, $\varphi_n \in \Phi$.

Soit $\psi_p = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \varphi_n$

$$V\psi_p = \sum_1^p \lambda_n V\varphi_n \in C \text{ , car } V\varphi_n \in C$$

$$V\varphi = \sup_p \sum_1^p \lambda_n V\varphi_n = \sum_1^\infty \lambda_n V\varphi_n \in C \quad .$$

COROLLAIRE 19. - <u>L'opérateur</u> V <u>est un noyau qui applique</u> $\mathcal{C}_b(\Omega)$ <u>dans</u> $C - C$ <u>avec</u> $V(\mathcal{C}_b^+(\Omega)) \subset C$, <u>et vérifie</u> :

(a) $V1 = v_0$,

(b) $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{C}_b^+$.

<u>On a donc associé, à un élément</u> v <u>quelconque du cône</u> C , <u>un noyau</u> V <u>positif tel que</u> $V1 = v$ <u>appliquant</u> $\mathcal{C}_b(\Omega)$ <u>dans</u> $C - C$, <u>et subordonné au cône</u> C ;

La démonstration, du fait que $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$, résulte simplement de ce que $V\varphi$ est une somme continue d'éléments de C à support dans $[\varphi \geqslant 0]$. (En fait, grâce à l'additivité de la réduite, on a :

$$\operatorname{Supp} \sum_n V_n = \bigcup_n \operatorname{Supp} v_n \quad .)$$

PROPOSITION 20. - <u>Le noyau</u> V <u>vérifie le principe de domination</u>.

En effet, soient $\varphi , \psi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$, $V\varphi \leqslant V\psi$ dans $[\varphi > 0]$. On a :

$$\varphi = \sup_n \varphi_n \ , \quad \varphi_n \in \mathcal{K}^+(\Omega) \ , \quad (\varphi_n) \text{ croissante} \quad .$$

De plus,

$$V\varphi_n \leqslant V\psi \quad \text{dans} \quad [\varphi_{n+1} > 0] \ ,$$

donc partout. Donc,

$$V\varphi \leqslant V\psi \quad \text{dans} \quad \Omega \quad .$$

<u>Remarque</u>. - Si on avait $1 = \sup f_n$ avec $f_n \in C$, (f_n) croissant, V vérifierait le principe complet du maximum.

2. Relations entre le noyau V et l'opérateur A de Dynkin.

PROPOSITION 21. - Soient $\varphi \in \mathcal{C}_b^+(\Omega)$ et $v \equiv V$. L'application

$$(\alpha , x) \longmapsto v_{[\varphi>\alpha]}(x)$$

est s. c. i. sur $[0 , \sup \varphi) \times \Omega$ (donc en particulier mesurable).

Démonstration.

(a) Pour α fixé > 0 , $x \to v_{[\varphi>\alpha]}(x)$ est une fonction s. c. i. (comme sup de fonctions continues).

(b) Pour tout x , $v_{[\varphi>\alpha]}(x) = \sup_{\beta>\alpha} v_{[\varphi>\beta]}(x)$. Soit $\lambda < v_{[\varphi>\alpha]}(x)$. Il existe $\beta > \alpha$ tel que

$$(\beta' > \beta) \Rightarrow v_{[\varphi>\beta']}(x) \geq v_{[\varphi>\beta]}(x) \geq \lambda' > \lambda \quad .$$

Il existe un voisinage ω de x tel que

$$(y \in \omega) \Longrightarrow v_{[\varphi>\beta]}(y) \geq \lambda \quad .$$

Donc,

$$((\gamma , y) \in [0 , \beta) \times \omega) \Longrightarrow v_{[\varphi>\gamma]}(y) \geq \lambda \quad .$$

On peut, à partir de cette proposition, montrer que $\operatorname{Supp} V\varphi \subset S\varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_b^+$, ce qui a déjà été démontré plus haut en utilisant une propriété d'approximation.

On est donc bien dans les conditions d'application du théorème 9 de la deuxième partie, on a donc

$$AV\varphi = \varphi \quad \text{sur} \quad \delta_v$$

où δ_v est le support fin, relatif à C , de $v = V1$.

Le noyau V associé à un élément $v \in C$ est donc unique. Les mesures $\varepsilon_x V$ $(x \in \Omega)$ sont portées par δ_v .

A est un opérateur linéaire sur l'espace vectoriel $V(\mathcal{C}_b(\Omega))$ où

$$Au(x) = \liminf_{\omega \searrow x} \frac{u(x) - R_u^{\complement\omega}(x)}{v(x) - R_v^{\complement\omega}(x)} \quad .$$
