Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Nicu Boboc
Aurel Cornea

# Balayage des mesures par rapport à un cône de fonctions inférieurement semi-continues sur un espace localement compact

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 11 (1966-1967), exp. nº 22, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1966-1967__11__A12_0>

# BALAYAGE DES MESURES PAR RAPPORT À UN CÔNE DE FONCTIONS INFÉRIEUREMENT SEMI-CONTINUES SUR UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT

par Nicu BOBOC et Aurel CORNEA

Soient $X$ un espace localement compact à base dénombrable, $\mathcal{P}$ un cône convexe de fonctions non négatives, inférieurement semi-continues et localement bornées sur $X$, et $\mathcal{P}_c$ le sous-cône d'éléments continus de $\mathcal{P}$.

Pour toute partie $A$ de $X$ et tout $p \in \mathcal{P}_c$, nous désignerons par $p_A$ la régularisée inférieurement semi-continue de l'enveloppe inférieure de la famille d'éléments de $\mathcal{P}$ qui dominent $p$ sur $A$. Si l'application

$$p \to p_A$$

est linéaire, et si $\mathcal{P}$ satisfait à quelques conditions assez générales, on associe à toute mesure $\mu$ $\mathcal{P}_c$-intégrable (c'est-à-dire $\int p \, d\mu < \infty$ pour tout $p \in \mathcal{P}_c$) une mesure $\mu^A$ telle que

$$\int p \, d\mu^A = \int p_A \, d\mu \quad .$$

Le résultat principal obtenu est le suivant : Si $A$ est une partie de $X$ qui satisfait à la condition $(\mathcal{B})$ (page 22-03), et si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre de mesures $\mathcal{P}_c$-intégrables qui converge vaguement vers une mesure $\mu$ telle que

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int p \, d\nu = \int p \, d\mu < \infty \quad ,$$

alors il existe une fonction $\theta$ mesurable-Borel sur $X$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{K}(X)$, on a

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int f \, d\nu = \int f\theta \, d\mu + \int [(1 - \theta(x)) \int f \, d\lambda_{x,A}] \, d\mu(x) \quad ,$$

où, pour tout $x \in X$, $\lambda_{x,A}$ est une certaine mesure associée au point $x$ et à l'ensemble $A$.

La théorie développée ici peut s'appliquer au balayage sur un espace harmonique, et on obtient ainsi une généralisation d'un théorème classique de O. FROSTMAN [3] concernant le comportement de la solution du problème de Dirichlet aux points irréguliers.

1. - Dans tout ce qui suit, $X$ sera un espace localement compact à base dénombrable, et $\mathcal{P}$ sera un cône convexe de fonctions non négatives inférieurement semi-continues et localement bornées sur $X$. Nous désignerons par $\mathcal{P}_c$ le cône convexe d'éléments continus de $\mathcal{P}$. On suppose que les conditions suivantes sont remplies :

($\mathcal{P}_1$) L'enveloppe inférieure de tout ensemble fini d'éléments de $\mathcal{P}$ est un élément de $\mathcal{P}$ ;

($\mathcal{P}_2$) Tout élément de $\mathcal{P}$ est la limite d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}_c$ ;

($\mathcal{P}_3$) Le cône $\mathcal{P}_c$ est linéairement séparant (c'est-à-dire que pour deux points différents $x , y \in X$, il existe deux éléments $p , q \in \mathcal{P}_c$ tels que

$$p(x)\ q(y) \neq p(y)\ q(x) \quad ) ;$$

($\mathcal{P}_4$) Le cône $\mathcal{P}_c$ est adapté (c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, il existe $q \in \mathcal{P}_c$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{x \in X \mid p(x) \geqslant \varepsilon q(x)\}$$

est compact).

De ces deux dernières conditions, il résulte ([4]) que l'ensemble de fonctions à support compact sur $X$ de la forme $p - q$, où $p , q \in \mathcal{P}_c$, est un ensemble positivement riche ; il en résulte aussi que, pour toute forme linéaire et monotone $\ell$ définie sur $\mathcal{P}_c$, il existe une mesure de Radon $\mu$, et une seule, telle qu'on ait

$$\int p \, d\mu = \ell(p)$$

pour tout $p \in \mathcal{P}_c$.

EXEMPLE 1. - Soit $(X , \mathcal{H})$ un espace harmonique de Brelot (axiomes 1, 2, 3, existence d'un potentiel positif sur $X$) [2], ou de Bauer (axiomes 1, 2, $(K_1)$, $(T^+)$) [1], tel que $X$ a une base dénombrable. Le cône $\mathcal{P}$ de potentiels localement bornés sur $X$ satisfait les conditions $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$.

EXEMPLE 2. - Soient $X$ l'espace euclidien à n-dimensions, $n > 2$, et $\alpha$ un nombre réel, $0 < \alpha \leqslant 2$. Alors, le cône $\mathcal{P}$ de potentiels de Riesz d'ordre $\alpha$ et localement bornés, satisfait aux conditions $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$.

EXEMPLE 3. - Soient $X$ un espace localement compact à base dénombrable, et $(P_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de Feller, sous-markovien, tel que, pour tout $f \in \mathcal{K}^+(X)$, la fonction

$$x \to \int_0^\infty P_t\, f(x)\, dt$$

soit continue. Alors, le cône $\mathcal{P}$, de fonctions excessives bornées $p$ pour lesquelles

$$\lim_{t\to 0} P_t\, p(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in X ,$$

satisfait aux conditions $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$.

2. - Pour tout ensemble $A$ de $X$ et tout $p \in \mathcal{P}$, nous désignerons par $p_A$ la régularisée inférieurement semi-continue de l'enveloppe inférieure de la famille d'éléments de $\mathcal{P}$ qui dominent $p$ sur $A$, et nous l'appellerons <u>la balayée de</u> $p$ <u>sur</u> $A$ (par rapport au cône $\mathcal{P}$). Si $A$ est tel que l'application

$$p \to p_A$$

de $\mathcal{P}_c$ dans le cône des fonctions non négatives et inférieurement semi-continues sur $X$ est linéaire, alors, pour toute mesure $\mu$ sur $X$, $\mathcal{P}_c$-intégrable (c'est-à-dire $\int p\, d\mu < \infty$ pour tout $p \in \mathcal{P}_c$), il existe une mesure $\mu^A$ uniquement déterminée par la relation

$$\int p\, d\mu^A = \int p_A\, d\mu ,$$

appelée la <u>balayée de</u> $\mu$ <u>sur</u> $A$. Dans ce cas, on voit tout-de-suite que la balayée d'une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable sur $A$ est portée par l'ensemble $\bar{A}$. De même, pour tout ensemble mesurable-Borel $B$ de $X$, la fonction

$$x \to \varepsilon_x^A(B) \qquad (^1)$$

est mesurable-Borel, et, pour toute mesure $\mu$, $\mathcal{P}_c$-intégrable, on a

$$\mu^A(B) = \int \varepsilon_x^A(B)\, d\mu(x) .$$

Si $\rho$ est une métrique sur $X$, nous désignerons par $U_x^r$, pour tout $r > 0$ et tout $x \in X$, la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$.

DÉFINITION. - <u>Un ensemble</u> $A$ <u>de</u> $X$ <u>satisfait à la condition</u> $(\mathcal{B})$ s'il existe une métrique $\rho$ sur $X$ compatible avec la topologie de $X$ telle que, pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, les conditions suivantes soient remplies :

(a) <u>Les applications</u>

$$p \to p_{A - U_x^r} \qquad \text{et} \qquad p \to p_A$$

<u>sont linéaires sur</u> $\mathcal{P}_c$ ;

---

[1] Pour $x \in X$, $\varepsilon_x$ est la mesure unité concentrée dans le point $x$.

(b) Pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \geqslant p$ sur $A - U_x^r$ et

$$\limsup_{y \to x} q(y) < p_{A-U_x^r}(x) + \varepsilon \quad ;$$

(c) La restriction de la mesure $\varepsilon_x^A$ à l'ensemble $X - \overline{U}_x^r$ est dominée par la mesure $\varepsilon_x^{A-U_x^r}$ ;

(d) Pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ et tout $q \in \mathcal{P}$, tel que $p = q$ sur $A - U_x^r$, $q \leqslant p$ sur $X$, on a

$$\int p \, d\varepsilon_x^{A-U_x^r} = \int q \, d\varepsilon_x^{A-U_x^r} \quad .$$

REMARQUE. - Dans l'exemple 1, toute partie $A$ de $X$ satisfait à la condition $(\mathcal{B})$. Dans l'exemple 2, toute partie fermée de $X$ satisfait à la condition $(\mathcal{B})$. Dans l'exemple 3, pour toute partie $A$ presque borélienne, les points (a), (c), (d) sont vrais.

LEMME 1. - Soient $Y$ un espace localement compact, $\mu$ une mesure de Radon sur $Y$, et $f$ une fonction bornée, à support compact, et continue $\mu$-presque-partout sur $Y$. Alors, pour tout filtre $\mathfrak{B}$ de mesures de Radon sur $Y$ qui converge vaguement vers $\mu$, on a

$$\lim_{\mathfrak{B}} \int \hat{f} \, d\nu = \lim_{\mathfrak{B}} \int \check{f} \, d\nu = \int f \, d\mu \quad ,$$

où $\hat{f}$ (resp. $\check{f}$ ) est la régularisée inférieurement (resp. supérieurement) semi-continue de $f$.

Nous avons

$$\int f \, d\mu = \int \hat{f} \, d\mu \leqslant \liminf_{\mathfrak{B}} \int \hat{f} \, d\nu \quad ,$$

$$\int f \, d\mu = \int \check{f} \, d\mu \geqslant \limsup_{\mathfrak{B}} \int \check{f} \, d\nu \quad .$$

LEMME 2. - Soient $A$ un ensemble de $X$ satisfaisant à la condition $(\mathcal{B})$ par rapport à une métrique $\rho$, et $\mu$ une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable sur $X$. Alors il existe un ensemble au plus dénombrable $T$, de nombres réels positifs, tel que, pour tout $r \notin T$, $r > 0$, et tout $f \in \mathcal{K}^+(X \times X)$, la fonction

$$x \longrightarrow \int f(x, y) \, d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y)$$

est continue $\mu$-presque-partout.

Puisque l'ensemble de fonctions de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\ g_k(y) \quad ,$$

où $f_k$ , $g_k \in \mathcal{K}^+(X)$ est dense, par rapport à la convergence uniforme, dans $\mathcal{K}^+(X \times X)$ , et puisque $\mathcal{P}$ satisfait aux conditions $(\mathcal{P}_1)$-$(\mathcal{P}_4)$, il suffit de démontrer que, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ , il existe un ensemble au plus dénombrable $T$ , de nombres réels positifs, tel que, pour tout $r > 0$ , $r \notin T$ , la fonction

$$x \to p_{A-U_x^r}(x)$$

est continue $\mu$-presque-partout. En effet, soit $p \in \mathcal{P}_c$ . Pour tout $r > 0$ , nous désignerons par $p_r$ la fonction

$$x \to p_{A-U_x^r}(x) \quad .$$

De la condition $(\mathcal{B})$-(b), il résulte que, pour tout $r' < r < r''$ , on a

$$p_{r'} \geqslant \check{p}_r \geqslant \hat{p}_r \geqslant p_{r''} \quad (^2) \ .$$

Puisque la fonction

$$r \to \int^* p_r \, d\mu$$

est monotone, il existe un ensemble au plus dénombrable $T$ , de nombres réels positifs, tel que cette fonction soit continue dans tout point $r > 0$ , $r \notin T$ . Donc, pour tout $r > 0$ , $r \notin T$ , on a

$$\check{p}_r = \hat{p}_r \quad \mu\text{-presque-partout} \quad .$$

3. - Soit $A$ un ensemble de $X$ satisfaisant à la condition $(\mathcal{B})$ par rapport à une métrique $\rho$ . Pour toute mesure $\nu$ sur $X$ , $\mathcal{P}_c$-intégrable, nous désignerons par $\nu'$ la mesure sur l'espace produit $X \times X$ définie par la relation

$$\int f \, d\nu' = \int \left(\int f(x\ ,\ y)\ d\varepsilon_x^A(y)\right) d\nu(x) \quad .$$

On voit tout-de-suite que, pour tout $f \in \mathcal{K}^+(X)$ , et $p \in \mathcal{P}$ , on a

$$\int f(x)\ p(y)\ d\nu'(x\ ,\ y) \leqslant \int f(x)\ p(x)\ d\nu(x) \quad .$$

---

(2) $\hat{p}_r$ ($\check{p}_r$) est la régularisée inférieurement (supérieurement) semi-continue de $p_r$ .

Si $\mathfrak{U}$ est un ultrafiltre de mesure $\mathcal{P}_c$-intégrables sur $X$ qui converge vaguement vers une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable $\mu$, nous désignerons par $\mathfrak{U}'$ l'image de $\mathfrak{U}$ par l'application

$$\nu \to \nu' \quad ,$$

définie ci-dessus, et par $\mu''$ la limite vague suivant $\mathfrak{U}'$.

PROPOSITION 1. - <u>Pour tout</u> $f \in \mathcal{K}^+(X)$, <u>et tout</u> $p \in \mathcal{P}$, <u>on a</u>

$$\int f(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) \leqslant \int f(x)\ p(x)\ d\mu(x) \quad .$$

Si $p \in \mathcal{P}_c$, on a

$$\int f(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) \leqslant \lim_{\mathfrak{U}'} \int f(x)\ p(y)\ d\nu'(x\ ,\ y)$$
$$\leqslant \lim_{\mathfrak{U}} \int f(x)\ p(x)\ d\nu(x) = \int f(x)\ p(x)\ d\mu(x) \quad .$$

La proposition en résulte, en utilisant la propriété $(\mathcal{P}_2)$.

REMARQUE. - <u>Si</u> $i$ <u>est l'application de</u> $X$ <u>dans</u> $X \times X$ <u>définie par</u>

$$i(x) = (x\ ,\ x) \quad ,$$

<u>il résulte, de la proposition précédente, que la restriction de</u> $\mu''$ <u>à la diagonale</u> $\Delta$ <u>de</u> $X \times X$ <u>est dominée par la mesure</u> $\mu \circ i^{-1}$. <u>Donc il existe une fonction</u> $\theta$ <u>sur</u> $X$, <u>mesurable-Borel,</u> $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, <u>telle qu'on ait</u>

$$\int_\Delta f(x\ ,\ y)\ d\mu''(x\ ,\ y) = \int_X f(x\ ,\ x)\ \theta(x)\ d\mu(x)$$

<u>pour tout</u> $f \in \mathcal{K}(X \times X)$.

LEMME 3. - <u>Il existe un ensemble au plus dénombrable</u> $T$, <u>de nombres réels positifs, tel que, pour tout</u> $r > 0$, $r \notin T$, <u>et toute fonction</u> $g \in \mathcal{K}^+(X \times X)$ <u>égale à zéro sur l'ensemble</u> $\{(x\ ,\ y)\ |\ \rho(x\ ,\ y) \leqslant r\}$, <u>on a</u>

$$\int g\ d\mu'' \leqslant \int \left(\int g(x\ ,\ y)\ d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y)\right) d\mu(x) \quad .$$

L'assertion en résulte en utilisant les lemmes 1 et 2 et la condition $(\mathcal{B})$-(c).

PROPOSITION 2. - <u>Pour tout</u> $x \in X$ <u>et tout</u> $p \in \mathcal{P}_c$, <u>soit</u> $\ell_x(p)$ <u>le nombre, défini par la relation</u>

$$\ell_x(p) = \sup_{r>0} p_{A-U_x^r}(x) \quad .$$

Alors :

(a) Pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ , la fonction $x \to \ell_x(p)$ est inférieurement semi-continue;

(b) Pour tout $x \in X$ , l'application $p \to \ell_x(p)$ est une forme linéaire et monotone croissante sur $\mathcal{P}_c$ .

Soit $x_0 \in X$ , $r > 0$ et $x \in U^r_{x_0}$ . Alors, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ , on a

$$\ell_x(p) \geqslant p_{A-U^r_{x_0}}(x) \quad ,$$

$$\liminf_{x \to x_0} \ell_x(p) \geqslant p_{A-U^r_{x_0}}(x_0) \quad ,$$

$$\liminf_{x \to x_0} \ell_x(p) \geqslant \ell_{x_0}(p) \quad .$$

L'assertion (b) résulte de la condition ($\mathcal{B}$)-(a) et du fait que la fonction

$$r \to p_{A-U^r_x}(x)$$

est monotone.

REMARQUE. - Du point (b) de cette proposition, on déduit, en utilisant les propriétés ($\mathcal{P}_1$)-($\mathcal{P}_4$) que, pour chaque $x \in X$ , il existe une mesure $\lambda_x = \lambda_{x,A}$ telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$ ,

$$\int p \, d\lambda_x = \ell_x(p) \quad .$$

De plus, en utilisant le point (a) de la proposition 2, on voit que la fonction $x \to \lambda_x(B)$ est mesurable-Borel, quel que soit l'ensemble $B$ mesurable-Borel.

Il est facile de vérifier que la mesure $\lambda_x$ est la limite vague des mesures $\varepsilon_x^{A-U^r_x}$ pour $\mathfrak{U}$ .

THÉORÈME 1. - Soient $A$ un ensemble de $X$ satisfaisant à la condition ($\mathcal{B}$), $\mu$ une mesure $\mathcal{P}_c$-intégrable, et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre de mesures $\mathcal{P}_c$-intégrables qui converge vaguement vers $\mu$ . Alors, il existe une fonction réelle mesurable-Borel $\theta$ sur $X$ , $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ , uniquement déterminée $\mu$-presque-partout, telle que, pour tout $f \in \mathcal{K}(X \times X)$ , on ait

(a) $\lim_{\mathfrak{U}} \int (\int f(x , y) \, d\varepsilon^A_x(y) \, d\nu)$

$$= \int \theta(x) \, f(x , x) \, d\mu(x) + \int [(1 - \theta(x)) \int f(x , y) \, d\lambda_{x,A}(y)] \, d\mu(x) \;;$$

(b) $\int (1 - \theta(x))\, \lambda_{x,A}(\{x\})\, d\mu(x) = 0$ .

Soit $\mu''$ la limite vague sur l'espace $X \times X$ du filtre $\mathfrak{U}'$ , et soit $\theta$ la fonction mesurable-Borel sur $X$ , $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ , définie dans la remarque de la proposition 1. Soient $f \in \mathcal{K}^+(X)$ , $p \in \mathcal{P}_c$ , et $\Delta$ la diagonale de $X \times X$ . Nous allons démontrer la relation suivante :

$$\int_{X\times X-\Delta} f(x)\, p(y)\, d\mu''(x , y) = \int [(1 - \theta(x))\, f(x) \int p(y)\, d\lambda_{x,A}(y)]\, d\mu(x) \quad .$$

Soit $T$ l'ensemble au plus dénombrable de nombres réels positifs associé, dans le lemme 2, à la mesure $\mu$ . Soient $x_0 \in X$ , $\varepsilon > 0$ , et $r > 0$ , $r \notin T$ . De la condition $(\mathcal{B})$-(b), on peut trouver

$$r_{\varepsilon,x_0} > 0 \ , \qquad r_{\varepsilon,x_0} < \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad q \in \mathcal{P} \ ,$$

tels que $q = p$ sur $A - U_{x_0}^{2r/3}$ , $q \leqslant p$ sur $X$ , $q \leqslant p_{A-U_{x_0}^{2r/3}} + \varepsilon$ sur $U_{x_0}^{r_{\varepsilon,x_0}}$ .

Soit maintenant $f' \in \mathcal{K}^+(X)$ égale à zéro sur $X - U_{x_0}^{r_{\varepsilon,x_0}}$ . En utilisant la condition $(\mathcal{B})$-(d), on obtient que les fonctions

$$(x , y) \to f'(x)\, p(y) \ ,$$

$$(x , y) \to f'(x)\, q(y) \ ,$$

sont égales presque-partout par rapport à la mesure définie sur $X \times X$ par la relation

$$h \to \int (\int h(x , y)\, d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y))\, d\mu(x) \quad .$$

Du lemme 3, il résulte que, pour toute fonction $g \in \mathcal{K}^+(X \times X)$ , $0 \leqslant g \leqslant 1$ , égale à zéro sur l'ensemble $\{(x , y) \mid \rho(x , y) \leqslant r\}$ , on a

$$\int g(x , y)\, f'(x)\, p(y)\, d\mu''(x , y) = \int g(x , y)\, f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x , y) \quad .$$

De la proposition 1, on a

$$\int g(x , y)\, f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x , y)$$

$$\leqslant \int_{X\times X-\Delta} f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x , y) = \int_{X\times X} f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x , y) - \int_{\Delta} f'(x)\, q(y)\, d\mu''(x , y)$$

$$\leqslant \int_X f'(x)\, q(x)\, d\mu(x) - \int_X \theta(x)\, f'(x)\, q(x)\, d\mu(x) = \int_X (1 - \theta(x))\, f'(x)\, q(x)\, d\mu(x) \quad .$$

Donc,

$$\int g(x\ ,\ y)\ f'(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) \leqslant \int_X (1-\theta(x))\ f'(x)(p_{A-U_{x_0}^{2r/3}}(x)+\varepsilon)\ d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_X (1-\theta(x))\ f'(x)(p_{A-U_x^{r/3}}(x)+\varepsilon)\ d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_X [(1-\theta(x))\ f'(x) \int p(y)\ d\lambda_x(y)]\ d\mu(x) + \varepsilon \int_X f'(x)\ d\mu(x) \quad .$$

Puisqu'il existe un système fini de points $(x_k)_{k=1,\dots,n}$ , et un système fini $(f_k)_{k=1,\dots,n}$ de fonctions de $\mathcal{K}^+(X)$ tel que, pour tout $k$ , $f_k$ est égale à zéro sur $X - U_{x_k}^{r_{\varepsilon,x_k}}$ et $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ , on voit que la dernière relation reste vraie en remplaçant $f'$ par $f$ . Les nombres $\varepsilon$ , $r$ et la fonction $g$ , étant arbitraires, nous avons

$$\int_{X\times X-\Delta} f(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) \leqslant \int_X [(1-\theta(x))\ f(x) \int p(y)\ d\lambda_x(y)]\ d\mu(x) \quad .$$

Puisque, pour tout $x \in U_{x_0}^{r_{\varepsilon,x_0}}$ , les fonctions $p$ et $q$ sont égales presque-partout par rapport à la mesure $\varepsilon_x^{A-U_x^r}$ , nous avons, pour toute fonction

$$g \in \mathcal{K}(X \times X) \ , \qquad 0 \leqslant g \leqslant 1 \ ,$$

et toute mesure $\nu$ , $\mathcal{P}_c$-intégrable,

$$\int^* (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ p(y)\ d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y))\ d\nu(x)$$

$$= \int^* (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ q(y)\ d\varepsilon_x^{A-U_x^r}(y))\ d\nu(x)$$

$$\leqslant \int (f'(x) \int q(y)\ d\varepsilon_x^A(y))\ d\nu(x) \leqslant \int (f'(x) \int \check{q}(y)\ d\varepsilon_x^A(y))\ d\nu(x) \ ,$$

où $\check{q}$ est la régularisée supérieurement semi-continue de $q$ . En utilisant les lemmes 1 et 2, on obtient

$$\int (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ p(y)\ d\varepsilon^{A-U_x^r}(y))\ d\mu(x)$$

$$= \lim_{\mathfrak{U}} \int^* (f'(x) \int g(x\ ,\ y)\ p(y)\ d\varepsilon^{A-U_x^r}(y))\ d\nu(x)$$

$$\leqslant \lim_{\mathfrak{U}} \int (f'(x) \int \check{q}(y)\ d\varepsilon_x^A(y))\ d\nu(x) = \lim_{\mathfrak{U}'} \int f'(x)\ \check{q}(y)\ d\nu'(x\ ,\ y)$$

$$\leqslant \int f'(x)\ \check{q}(y)\ d\mu''(x\ ,\ y) = \int_X f'(x)\ \check{q}(x)\ \theta(x)\ d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} f'(x)\ \check{q}(y)\ d\mu''(x\ ,\ y)$$

$$\leqslant \int_X f'(x)(p_{A-U_{x_0}^{2r/3}} + \varepsilon)\ \theta(x)\ d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} f'(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y)$$

$$\leqslant \int_X (f'(x)\ \theta(x) \int p\ d\lambda_x)\ d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} (f'(x)\ p(y)\ d\mu''(x\ ,\ y)) + \varepsilon \int_X f'(x)\ d\mu(x) \ .$$

Comme dans la première partie de la démonstration, on peut remplacer dans l'inégalité précédente $f'$ par $f$. La fonction $g$ et les nombres $r$ et $\varepsilon$ étant arbitraires, on obtient

$$\int (f(x) \int p\, d\lambda_x)\, d\mu(x) \leqslant \int_X (f(x)\, \theta(x) \int p\, d\lambda_x)\, d\mu(x) + \int_{X\times X-\Delta} f(x)\, p(y)\, d\mu''(x\,,\,y) \ .$$

Le théorème est ainsi complètement démontré.

THÉORÈME 2. - Soient $A$ un ensemble de $X$ satisfaisant à la condition $(\mathcal{B})$, et $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre de mesure $\mathcal{P}_c$-intégrables qui converge vaguement vers une mesure $\mu$ telle que, pour tout $p \in \mathcal{P}_c$, on ait

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int p\, d\nu = \int p\, d\mu < \infty \ .$$

Alors il existe une fonction $\theta$ mesurable-Borel sur $X$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, telle que, pour toute fonction continue $f$, dominée en module par un élément de $\mathcal{P}_c$, on ait:

(a) $\lim_{\mathfrak{U}} \int f\, d\nu^A = \int \theta\, f\, d\mu + \int [(1-\theta(x)) \int f\, d\lambda_{x,A}]\, d\mu(x)$ ;

(b) $\int (1-\theta(x))\, \lambda_{x,A}(\{x\})\, d\mu(x) = 0$ .

Soient $f$ une fonction non négative continue sur $X$, $p \in \mathcal{P}_c$, tels que $f \leqslant p$, et $q \in \mathcal{P}_c$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{x \in X \mid p(x) \geqslant \varepsilon q(x)\}$$

soit compact. On a

$$\int_X f\, d\nu^A = \int_{X\times X} f(y)\, d\nu'(x\,,\,y)$$

$$= \int_{X\times X} f(y)\, I_{K_\varepsilon}(x)\, d\nu'(x\,,\,y) + \int_{X\times X} f(y)\, I_{X-K_\varepsilon}(x)\, d\nu'(x\,,\,y) \ ,$$

$$\int_{X\times X} f(y)\, I_{X-K_\varepsilon}(x)\, d\nu'(x\,,\,y) \leqslant \varepsilon \int_{X\times X} q(y)\, d\nu'(x\,,\,y) = \varepsilon \int_X q\, d\nu^A \leqslant \varepsilon \int_X q\, d\nu \ ,$$

$$\int_{X\times X} f\, d\mu'' \leqslant \lim_{\mathfrak{U}} \int_X f\, d\nu^A \leqslant \int_{X\times X} f(y)\, d\mu''(x\,,\,y) + \varepsilon \int_X q\, d\mu \ .$$

$\varepsilon$ étant arbitraire,

$$\lim_{\mathfrak{U}} \int_X f\, d\nu^A = \int_{X\times X} f\, d\mu'' \ .$$

L'assertion résulte maintenant de cette relation en choisissant $\theta$, la fonction définie dans le théorème précédent.

COROLLAIRE 1. - Soit $A$ un ensemble de $X$ satisfaisant à la condition $(\mathcal{B})$. Alors, pour tout $x \in X$, on a la relation

$$\varepsilon_x^A = \varepsilon_x^A(\{x\})\ \varepsilon_x + (1 - \varepsilon_x^A(\{x\}))\ \lambda_{x,A} \ .$$

COROLLAIRE 2. - Soient $(X\ ,\ \mathcal{H})$ un espace harmonique de Brelot [2] ou de Bauer [1], $U$ un ouvert de $X$, et $x_0$ un point frontière irrégulier de $U$. Alors, pour tout ultrafiltre $\mathfrak{U}$ sur $U$, convergeant vers $x_0$, il existe un nombre réel $\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, tel que, pour toute fonction réelle, non négative, continue, $f$, sur $\partial U$, dominée par un potentiel fini continu, on ait

$$\lim_{\mathfrak{U}} H_f^U = \theta f(x_0) + (1 - \theta) \int f\, d\varepsilon_{x_0}^{X-U-\{x_0\}} \ .$$

L'assertion résulte du théorème 2, en remarquant que

$$H_f^U(x) = \int f\, d\varepsilon_x^{X-U} \ , \qquad \text{pour tout} \quad x \in U \ ,$$

et que

$$\lambda_{x_0, X-U} = \varepsilon_{x_0}^{X-U-\{x_0\}} \ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heins). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.

[2] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[3] FROSTMAN (O.). - Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener, Kungl. Fysiogr. Sällsk. Lund Forhandl., t. 9, 1939, n° 2, p. 1-10 ; Meddel. Lunds Univ. mat. Semin., t. 4, 1939, 10 p.

[4] Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 1re année, 1962. - Paris, Secrétariat mathématique, 1962.