Jean-Michel Bony

Solutions höldériennes de problèmes frontière intégro-différentiels

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, nº 1 (1965-1966), exp. nº 4, p. 1-27

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_1_A4_0>

SOLUTIONS HÖLDÉRIENNES DE PROBLÈMES FRONTIÈRE INTÉGRO-DIFFÉRENTIELS

par Jean-Michel BONY

Cet exposé a pour but (1) de fournir des réciproques aux résultats de l'exposé 3 (2), qui précisaient la structure (forme du générateur infinitésimal et forme du domaine) des semi-groupes de Feller sur une variété, lorsque le domaine contient suffisamment de fonctions de classe C^2. L'outil essentiel sera la résolution de problèmes frontière associés à des opérateurs intégro-différentiels (théorèmes 1 et 1A, théorèmes 3 et 3').

Dans la première partie, désignant par M une variété à bord compacte, nous chercherons à construire des semi-groupes sur $C_0(\mathring{M})$ (fonctions continues sur M, nulles au bord). Les théorèmes 3.5 et 3.6 de l'exposé 3 montraient que le générateur infinitésimal d'un tel semi-groupe avait la forme d'un opérateur de Waldenfels. Nous nous donnerons donc ici un tel opérateur W, en supposant de plus (cf. § I.7, remarque) d'une part l'ellipticité de sa partie différentielle, d'autre part des conditions qui peuvent être considérées comme une régularité supplémentaire imposée à W (une condition suffisante de régularité sera donnée au § I.8).

Nous étendrons d'abord à W les propriétés de maximum bien connues pour les opérateurs différentiels elliptiques (§ I.2). Puis nous résoudrons le problème de Dirichlet associé à un opérateur de Waldenfels (§ I.5, théorèmes 1 et 1A) en le déduisant du cas différentiel au moyen du théorème de stabilité de l'indice. Nous introduisons alors l'opérateur de Green et l'opérateur harmonique (noyau de Poisson) associés jouissant de propriétés analogues à celles des opérateurs correspondants dans le cas classique (§ I.6). On en déduit alors simplement l'existence et l'unicité d'un semi-groupe de Feller sur l'intérieur de la variété, ayant l'opérateur W donné pour générateur infinitésimal.

La seconde partie a pour but de permettre la construction de semi-groupes de Feller sur la variété à bord M tout entière (cette construction ne sera faite que dans l'exposé 6). D'après l'exposé 3 (théorèmes 5.4 et 4.8), le générateur infinitésimal d'un tel semi-groupe a la forme d'un opérateur de Waldenfels, tandis que le

---

(1) On développe ici la note [3].

(2) Une telle référence (numéro de l'exposé sans autre indication) renvoie toujours aux exposés de ce séminaire [9].

domaine est précisé par la condition $Lu = 0$, vérifiée par les fonctions de classe C^2 du domaine, où L est un opérateur frontière de Ventcel'.

Nous nous donnerons ici un opérateur de Waldenfels W et un opérateur frontière L. Après la démonstration de diverses propriétés de maximum (§ II.3), le résultat essentiel sera la résolution du problème frontière : $Wu = - f$, $Lu = - \varphi$ (§ II.4, théorèmes 3 et 3'). Les opérateurs harmonique et de Green associés (§ II.5) permettront dans l'exposé 6 de construire le semi-groupe correspondant.

Les hypothèses supplémentaires introduites (cf. § II.7, remarque) seront des hypothèses de régularité, l'hypothèse de transversalité sur L, et enfin l'hypothèse affirmant que les parties purement différentielles de W et L constituent un problème frontière elliptique, ce qui permet de démontrer les théorèmes 3 et 3' à l'aide du théorème de stabilité de l'indice.

I.1. Notations.

Nous désignerons par M une variété à bord C^∞, compacte, de dimension n, par $\mathring{M}$ son intérieur, et par ∂M son bord (éventuellement vide).

Soit W un opérateur de Waldenfels décomposable sur M. Rappelons-en brièvement la forme (3) :

$$W = P + S$$

où P est un opérateur différentiel du 2e ordre, semi-elliptique, sans terme d'ordre 0. Dans chaque carte locale (U , χ), il s'écrit

$$Pu(x) = \sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i \partial \chi^j}(x) + \sum a_i(x) \frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x) ,$$

les fonctions a_{ij} et a_i étant continues, la forme quadratique associée aux a_{ij} étant positive (mais non nécessairement définie positive).

S est un opérateur intégral singulier de Levy sur M, associé à un noyau singulier $s(x , dy)$.

S applique continûment $C^2(M)$ dans $C(M)$.

$S1(x) \leqslant 0$.

Si (U , χ) est une carte locale, K un compact de U, φ une fonction C^∞,

---

(3) La description des opérateurs différentiels et opérateurs de Levy fait l'objet des paragraphes 1 et 2 de l'exposé 3, les opérateurs de Waldenfels sur une variété à bord y sont définis au n° 5.3.

à support dans U, valant 1 au voisinage de K, il existe des fonctions continues $a(x)$ et $a_i^!(x)$ telles que :

$$\forall\ u \in C_k^2(U)\ ,\quad \forall\ x \in K \qquad Su(x) = a(x)\ u(x) + \sum a_i^!(x) \frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x)$$

$$+ \int_M s(x\ ,\ dy)[u(y) - \omega(y)(u(x) + \sum_1^n (\chi^i(y) - \chi^i(x)) \frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x))] .$$

I.2. Propriétés de maximum.

PROPOSITION 1. - Si $u \in C^2(M)$ atteint son maximum positif en un point x_0 intérieur, alors $Wu(x_0) \leqslant 0$.

En un maximum, à l'intérieur, $Pu(x_0) \leqslant 0$. Si $u(x_0) = m \geqslant 0$,

$$Su(x_0) \leqslant m\ S1(x_0) \leqslant 0 .$$

PROPOSITION 2. - Supposons P elliptique [4]. Soit $u \in C^2(M)$ telle que $Wu(x) \geqslant 0$ dans M.

Si u atteint un maximum positif en un point x_0 intérieur, u est constante dans la composante connexe de x_0.

Démonstration. - (Lorsque M est plongée dans R^n.) W peut se mettre sous la forme $P + S$ avec

$$P = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\ \partial x_j} + \sum a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\ ,$$

$$S = a(x)\ u(x) + \int s(x\ ,\ dy)[u(y) - u(x) - \sum_1^n (y^i - x^i) \frac{\partial u}{\partial x^i}(x)] .$$

Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe $u \in C^2(M)$ admettant un maximum $m \geqslant 0$ en $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, telle que $Wu \geqslant 0$ partout, et non constante dans C, composante connexe de x_0 dans M.

Soit $X = \{x \in C \mid u(x) = m\}$.

Soit $B(0\ ,\ \rho)$ une boule fermée contenue dans $C \cap \overset{\circ}{M}$, touchant X en un seul

---

[4] Sa partie principale est définie positive.

point x_1 [5]. Nous prendrons son centre 0 comme origine.

Remarquons que $Wu(x_1) \geqslant 0$, et u , maximum en x_1 , entraîne :

$$\int s(x_1 , dy)[u(y) - u(x_1)] = 0 ,$$

mais $u(y) < u(x_1)$ dans $C \setminus X$, donc $s(x_1 , dy)$ n'a pas de masse dans $C \setminus X$. En particulier, $s(x_1 , dy)$ ne charge pas $B(0 , \rho)$.

Soit $v_k(x) = e^{-k|x|^2} - e^{-k\rho^2}$. Montrons que, sous les conditions précédentes, pour k suffisamment grand, on a

$$Wv_k(x_1) > 0 :$$

$$Pv_k(x_1) = e^{-k\rho^2}[4k^2 \sum_{ij} a_{ij}(x_1)x_1^i x_1^j + k \sum_i (- 2a_{ii} - 2a_i x_1^i)] ,$$

$$Pv_k(x_1) = e^{-k\rho^2}(C_1 k^2 + C_2 k) ,$$

avec $C_1 > 0$ à cause de l'ellipticité de P , C_2 réelle, C_1 et C_2 indépendantes de k .

Majorons en module $Sv_k(x_1)$:

$$a(x_1) v_k(x_1) = a(x_1).0 = 0 .$$

Intégrons sur une boule $B(x_1 , \delta)$,

$$\left|\int_{B(x_1,\delta)} s(x_1 , dy)[v_k(y) - v_k(x_1) - \sum (y^i - x_1^i) \frac{\partial v_k}{\partial x_1^i}]\right|$$

$$\leqslant \int_{B(x_1,\delta)} s(x_1 , dy) |y - x_1|^2 \|v_k\|_2 ,$$

$\|v_k\|_2$ désignant la norme de v_k dans C^2 , mais il suffit de prendre le sup des dérivées secondes dans le domaine d'intégration, donc dans le complémentaire de $B(0 , \rho)$. Les dérivées secondes de v_k sont alors majorées par $C_3 k^2 e^{-k\rho^2}$, C_3 indépendante de k .

D'autre part, $\int_{B(x_1,\delta)} s(x_1 , dy) |y - x_1|^2 \to 0$ avec δ . On peut donc fixer δ tel que :

---

[5] C'est toujours possible : soit $z \in C^0 \setminus X$, plus près de X que de ∂M . Soit $r_0 = \sup\{r \mid B(z , r) \cap X = \emptyset\}$. $B(z , r_0)$ coupe X en au moins un point x_1 . La boule de diamètre zx_1 répond à la question.

$$\forall\, k \qquad \left|\int_{B(x_1,\delta)} s(x_1\,,\,dy)[v_k(y) - v_k(x_1) - \sum (y^i - x_1^i)\,\frac{\partial v_k}{\partial x_1^i}]\right| \leqslant \frac{C_1}{2}\,k^2\,e^{-k\rho^2} \quad .$$

Enfin, l'intégration se faisant toujours pour $y \geqslant \rho$:

$$\left|\int_{\complement B(x_1,\delta)} s(x_1\,,\,dy)[e^{-ky^2} - e^{-k\rho^2} - 0 - \sum (y^i - x_1^i)(-\,2kx_1^i)e^{-k\rho^2}]\right|$$

$$\leqslant \int_{\complement B(x_1,\delta)} s(x_1\,,\,dy)\;e^{-k\rho^2}[1 + k(\sup_y\;|\sum 2x_1(y^i - x_1^i)|)]\;,$$

et finalement

$$\left|\int s(x_1\,,\,dy)[v_k(y) - v_k(x_1) - \sum (y^i - x_1^i)\,\frac{\partial v_k}{\partial x_i}]\right| \leqslant e^{-k\rho^2}[\frac{C_1}{2}\,k^2 + C_4\,k + C_5]\quad ,$$

d'où

$$Wv_k(x_1) \geqslant [\frac{C_1}{2}\,k^2 + C'k + C'']e^{-k\rho^2}$$

où $C_1 > 0$, C' et C'' réels quelconques.

Donc, pour k assez grand, $Wv_k(x_1) > 0$. Nous noterons v une telle fonction v_k .

$$v \geqslant 0 \quad \text{dans } B(0\,,\,\rho)\quad ,$$

$$v \leqslant 0 \quad \text{dans } \complement\, B(0\,,\,\rho)\quad ,$$

et

$$Wv(x_1) > 0 \quad .$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $Wv(x) > 0$, $\forall\; x \in B(x_1\,,\,\alpha)$.

Considérons

$$u_\lambda = u + \lambda v\;, \qquad \lambda > 0\quad ,$$

$$Wu_\lambda(x) > 0\;,\; \forall\; x \in B(x_1\,,\,\alpha)\quad ,$$

$$u_\lambda(x) \leqslant m\;, \qquad \forall\; x \in \complement\, B(0\,,\,\rho)\quad .$$

En choisissant λ assez petit, $u_\lambda(x) \leqslant m$ pour $x \in B(0\,,\,\rho) \cap \complement\, B(x_1\,,\,\alpha)$.

Enfin, $u_\lambda(x_1) = m$.

Donc u_λ atteint un maximum positif en au moins un point de $B(x_1\,,\,\alpha)$, et on y a $Au_\lambda < 0$, ce qui est la contradiction cherchée.

<u>Remarque</u>. - On peut remplacer dans la démonstration précédente la fonction v_k par $v'_k = v_k . \varphi$, où φ est une fonction valant 1 au voisinage de x_1 et à sup-

port compact aussi petit qu'on veut. On ne modifie, en effet, que le terme en C'', et on a toujours $Wv'_k(x_1) > 0$ pour k assez grand. Le lecteur pourra étendre, sans difficulté, la démonstration au cas d'une variété quelconque M. Les fonctions v'_k étant à support dans une carte, Wv'_k ne fait intervenir que les valeurs du noyau dans la carte. On construit u_λ, et on aboutit à une contradiction de la même manière que ci-dessus.

PROPOSITION 3. - Supposons P elliptique. Soit $u \in C^2(M)$ telle que $Wu(x) \geqslant 0$ dans M.

Si u atteint un maximum positif en $x_1 \in \partial M$, on a :

- ou bien u est constante dans la composante connexe de x_1,
- ou bien $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) < 0$, n étant un vecteur de $T_{x_1}(M)$, strictement dirigé vers l'intérieur.

Démonstration. - (Lorsque M est plongé dans $\mathbb{R}^n$.) Soit C la composante connexe de x_1 dans M.

Raisonnons par l'absurde, supposons u non constante dans C, et $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) = 0$.

Soit $B(0, \rho)$ une boule tangente en x_1 à ∂M et ne rencontrant ∂M en aucun autre point. Nous prendrons son centre 0 comme origine, $|x_1| = \rho$.

En x_1, u atteint un maximum positif m, avec $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) = 0$. Donc $Pu(x_1) \leqslant 0$, $Su(x_1) \leqslant 0$. Mais $Wu(x) \geqslant 0$ partout, donc

$$\int s(x_1, dy)[u(y) - u(x_1)] = 0 .$$

D'après la proposition 2, $u(y) < u(x_1)$, $\forall y \in \mathring{M} \cap C$, sinon la fonction u serait constante dans C.

Donc $s(x_1, dy)$ ne charge pas $\mathring{M} \cap C$. En particulier, elle ne charge pas $B(0, \rho)$.

Soit alors $v_k(x) = e^{-k|x|^2} - e^{-k\rho^2}$, nous sommes exactement dans les mêmes conditions que dans la démonstration de la proposition 2. Pour k assez grand,

$$Wv_k(x_1) > 0 .$$

Nous désignerons par v une telle fonction v_k.

Soit α tel que $Wv(x) > 0$, $\forall x \in B(x_1, \alpha)$.

Posons :

$u_\lambda = u + \lambda v - m$,

$u_\lambda \leqslant 0$ sur $\complement B(0 , \rho)$,

$u_\lambda \leqslant 0$ sur $B(0 , \rho) \cap \complement B(x_1 , \alpha)$, en choisissant λ assez petit.

u_λ ne peut atteindre de maximum positif dans $B(x_1 , \alpha)$ car Wu_λ y est strictement positif.

Donc

$$u + \lambda v - m \leqslant 0 \quad \text{partout} ,$$

$$u(x) - u(x_1) \leqslant - \lambda v(x) \quad .$$

La dérivée de v suivant un axe dirigé vers l'intérieur étant strictement positive, on a $\frac{\partial u}{\partial n}(x_1) < 0$.

Remarque. - Comme dans la remarque suivant la proposition 2, on peut remplacer v_k par v'_k à support compact. La démonstration s'étend alors de la même manière à une variété quelconque en raisonnant dans une carte locale.

I.3. Espaces de fonctions höldériennes.

Rappelons quelques propriétés des espaces de fonctions höldériennes sur une variété.

Soit Ω un ouvert de $\overline{\mathbb{R}^{n+}}$. Nous dirons que f vérifie une condition de Hölder, d'exposant λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$, s'il existe $C > 0$ tel que $\forall x$, $\forall y \in \Omega$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant C|y - x|^\lambda \quad .$$

Nous noterons $C^{0,\lambda}(\Omega)$ l'espace formé de telles fonctions. Muni de la norme

$$\|f\|_{0,\lambda} = \|f\|_0 + \sup_{y \neq x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\lambda} \quad ,$$

c'est un espace de Banach.

De même, nous dirons que $f \in C^{k,\lambda}(\Omega)$ si f est de classe C^k dans Ω , et si toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont dans $C^{0,\lambda}(\Omega)$; muni de la norme

$$\|f\|_{k,\lambda} = \sum_{0 \leqslant |i| \leqslant k} \|D^i f\|_{0,\lambda} \quad ,$$

c'est un espace de Banach.

Soit M une variété à bord compacte. On dira que $f \in C^{k,\lambda}(M)$ si, au voisinage de chaque point, il existe une carte locale (U , χ) telle que $f \circ \chi^{-1} \in C^{k,\lambda}[\chi(U)]$.

Si (U_i, χ_i) est un recouvrement fini de M par des cartes, et φ_i une partition de l'unité subordonnée à U_i, nous poserons :

$$\|f\|_{k,\lambda} = \sum_i \|(\varphi_i f) \circ \chi^{-1}\|_{k,\lambda[\chi(U_i)]} ,$$

c'est un espace de Banach. Un changement de U_i, χ_i, φ_i transforme la norme en une norme équivalente.

On peut donner une autre définition de $C^{0,\lambda}(M)$. Soit g une métrique riemannienne sur M, $\overline{xy}$ désignant la distance géodésique associée.

$$C^{0,\lambda} = \{f \mid \sup_{y \neq x} \frac{|f(y) - f(x)|}{\overline{xy}^\lambda} < \infty\} .$$

La norme $\|f\|_{0,\lambda} = \|f\|_0 + \sup_{y \neq x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{\overline{xy}^\lambda} \right|$ est encore équivalente aux précédentes.

Propriété importante. - $C^{0,\lambda}$ s'injecte dans C, et la boule unité de $C^{0,\lambda}$ est compacte dans C (c'est une conséquence immédiate du théorème d'Ascoli). De même, la boule unité de $C^{k,\lambda}$ est compacte dans C^k.

I.4. Théorème de stabilité de l'indice.

Un outil essentiel pour ce qui va suivre est le théorème de stabilité de l'indice que nous nous bornerons à énoncer (6).

Définition. - Soient E et F deux espaces de Banach. On dit qu'une application linéaire continue T de E dans F est d'indice fini, si le noyau de T est de dimension finie et si l'image de T est de codimension finie. On définit alors l'indice de T :

$$\chi(T) = \dim(\operatorname{Ker} T) - \operatorname{codim}(\operatorname{Im} T) .$$

THÉORÈME (ATKINSON) (7). - Soit T un opérateur linéaire continu d'indice fini de E dans F, et soit K un opérateur linéaire compact (l'image de la boule unité est relativement compacte). Alors $T + K$ est d'indice fini, et

$$\chi(T + K) = \chi(T) .$$

---

(6) On en trouvera des démonstrations dans [5] ou [8] par exemple.

(7) Nous donnons ici une forme très générale du théorème de stabilité de l'indice. Nous ne l'utiliserons par la suite que dans le cas où T est un isomorphisme. C'est alors un corollaire simple du théorème de Riesz.

I.5. Problème de Dirichlet pour les opérateurs de Waldenfels.

Nous pouvons alors énoncer les résultats essentiels de cette première partie.

THÉORÈME 1. - Supposons que chaque composante connexe de M ait un bord non vide :

P elliptique à coefficients de classe $C^{0,\lambda}$ $(0 < \lambda < 1)$,
S applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$.

Alors l'opérateur $u \longmapsto (Wu , \gamma^0 u)$ (8) de $C^{2,\lambda}(M) \to C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$ est un isomorphisme.

L'application $u \longmapsto (Pu , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$: c'est le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème de Dirichlet dans les espaces de fonctions höldériennes (9).

En particulier, cette application est d'indice 0 .

D'autre part, l'opérateur $u \longmapsto (Su , 0)$ est compact : la boule unité de $C^{2,\lambda}$, compacte dans C^2 , a une image par S compacte dans $C^{0,\lambda}(M)$.

L'opérateur $u \longmapsto (Wu , \gamma^0 u)$ est d'indice 0 .

De plus, cet opérateur est injectif : si u est telle que $Wu = 0$, $\gamma^0 u = 0$, si elle atteint un maximum positif, d'après la proposition 2 et l'hypothèse que chaque composante connexe a un bord non vide, ce maximum est atteint au bord, il est donc nécessairement nul. De même, pour un minimum négatif. On a donc $u = 0$.

$u \longmapsto (Wu , \gamma^0 u)$ est d'indice 0 , le noyau est de dimension 0 , donc l'image de codimension 0 . Il est donc bijectif et, d'après le théorème de Banach, c'est un isomorphisme.

THÉORÈME 1A. - Sous les mêmes hypothèses sur W que dans le théorème 1, et sans hypothèse sur M :

(a) $\forall \alpha > 0$: $u \longmapsto ((W - \alpha)u , \gamma^0 u)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$ (10).

---

(8) γ^0 désignant l'opérateur de restriction au bord.

(9) Voir [7], théorème 36.I (pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$) ou [2] (pour une variété quelconque).

(10) Dans le cas particulier où $\partial M = \emptyset$, $C^{2,\lambda}(\partial M)$ est l'espace vectoriel $\{0\}$ et γ^0 l'opérateur $u \longmapsto 0$.

(b) $u \longmapsto (Wu\ ,\ \gamma^0 u)$ est un isomorphisme sous la condition suivante : dans chaque composante connexe de M dont le bord est vide, la fonction $W1(x)$ n'est pas identiquement nulle.

Lorsque certaines composantes connexes de M ont un bord vide, on n'a plus existence et unicité de la solution du problème de Dirichlet pour tous les opérateurs différentiels elliptiques dont le terme d'ordre 0 est négatif. Cependant, le théorème s'applique pour les opérateurs de la forme $P - \alpha$, où le terme d'ordre 0 est strictement négatif $(\alpha > 0)$.

L'opérateur $u \longmapsto ((P-\alpha)u\ ,\ \gamma^0 u)$ est un isomorphisme, donc d'indice 0. L'opérateur $u \longmapsto (Su\ ,\ 0)$ est compact. Enfin, l'opérateur $u \longmapsto (\alpha u\ ,\ 0)$ est compact : il applique la boule unité de $C^{2,\lambda}$ en une boule de $C^{2,\lambda}$, donc compacte dans $C^{0,\lambda}$. Donc les opérateurs

$$u \longmapsto ((W-\alpha)u\ ,\ \gamma^0 u) \qquad \text{et} \qquad u \longmapsto (Wu\ ,\ \gamma^0 u)$$

sont des opérateurs d'indice 0 de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{2,\lambda}(\partial M)$.

(a) provient de ce que si $(W-\alpha)u = 0$, $\gamma^0 u = 0$, un maximum strictement positif ne peut être atteint qu'en un point x_0 intérieur. Or en un tel point, $Wu(x_0) \leqslant 0$, d'où $(W-\alpha)u < 0$.

De même, pour un minimum négatif. L'opérateur est injectif, donc surjectif, et est un isomorphisme.

(b) De même, si $Wu = 0$, $\gamma^0 u = 0$, un maximum strictement positif m ne peut être atteint qu'à l'intérieur. D'après la proposition 2, u est constante dans toute une composante connexe. Si la composante a un bord, c'est impossible. Sinon, pour x dans cette composante, $Pu(x) \leqslant m\, P1(x)$ qui prend des valeurs strictement négatives d'après l'hypothèse (b). L'opérateur $u \longmapsto (Wu\ ,\ \gamma^0 u)$ est encore un isomorphisme ([11]).

I.6. Opérateur de Green et opérateur harmonique.

Sous les hypothèses précédentes sur W, nous noterons :

$$u = G^0_\alpha f \qquad \text{la solution de} \qquad \begin{cases} (W-\alpha)u = -f \\ \gamma^0 u = 0 \end{cases} .$$

G^0_α est un opérateur linéaire continu de $C^{0,\lambda}(M) \to C^{2,\lambda}_0(\mathring{M})$ ([12]), c'est un opé-

---

([11]) Le théorème 1 est un cas particulier, mais fondamental, de cette situation.

([12]) $C^{k,\lambda}_0(\mathring{M})$ désigne l'espace des fonctions de $C^{k,\lambda}(M)$ nulles sur ∂M.

rateur positif d'après la propriété de maximum (proposition 1), donc il se prolonge en un opérateur continu (noté encore G^0_α) de $C(M) \to C_0(\mathring{M})$.

$$u = H_\alpha \varphi \qquad \text{la solution de} \qquad \begin{cases} (W - \alpha)u = 0 \\ \gamma^0 u = \varphi \end{cases} .$$

H_α est un opérateur linéaire continu de $C^{2,\lambda}(\partial M)$ dans $C^{2,\lambda}(M)$, positif d'après la proposition 2, donc se prolongeant en un opérateur continu de $C(\partial M)$ dans $C(M)$.

Si chaque composante connexe de M a un bord non vide (ou sous l'hypothèse (b) du théorème 1A), nous noterons :

$$u = G^0 f \qquad \text{la solution de} \qquad \begin{cases} Wu = - f \\ \gamma^0 u = 0 \end{cases} .$$

$$u = H\varphi \qquad \text{la solution de} \qquad \begin{cases} Wu = 0 \\ \gamma^0 u = \varphi \end{cases} .$$

L'opérateur de Green G^0 et l'opérateur harmonique (noyau de Poisson) H sont positifs et se prolongent de la même manière que les précédents aux fonctions continues.

I.7. Existence de semi-groupes.

COROLLAIRE. - Supposons P elliptique, à coefficients $C^{0,\lambda}$ $(0 < \lambda < 1)$, et S appliquant continûment C^2 dans $C^{0,\lambda}$.

(a) Il existe un semi-groupe de Feller, et un seul, sur $\mathring{M}$ tel que, si $(A , \mathcal{D}_A)$ désigne son générateur infinitésimal, on ait :

$$C^2_k(\mathring{M}) \subset \mathcal{D}_A \quad (^{13}) \qquad \text{et} \qquad Au = Wu \ , \quad \forall\ u \in \mathcal{D}_A \cap C^2_0(\mathring{M}) \ .$$

Les G^0_α sont alors les résolvantes de ce semi-groupe.

(b) Si, de plus, chaque composante connexe de M a un bord non vide (ou sous l'hypothèse (b) du théorème 1A), le semi-groupe obtenu est intégrable. G^0 est alors le potentiel de ce semi-groupe.

C'est une conséquence immédiate du théorème 1A et du théorème de Hille-Yosida-Ray (voir l'appendice de l'exposé 3) :

---

(13) $C^2_k(\mathring{M})$ désigne l'espace des fonctions de classe C^2 à support compact dans $\mathring{M}$.

On considère W comme défini sur $\mathcal{D} = \{u \in C_0^2(M) \mid (W - \alpha)u \in C_0(M)\}$:

(1) $\mathcal{D}$ est dense dans $C_0(\mathring{M})$ (il contient C_k^2).

(2) W possède ~~la propriété de~~ maximum.

(3) $(W - \alpha)\mathcal{D}$ est dense dans $C_0(M)$ (il contient tout $C_0^{0,\lambda}(\mathring{M})$).

Les trois hypothèses du théorème de Hille-Yosida-Ray sont satisfaites, $(W , \mathcal{D})$ est alors préfermé, et sa fermeture est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe unique sur $C_0(M)$.

(b) résulte du fait que la condition (3') : $W(\mathcal{D})$ est dense, est satisfaite. Le semi-groupe est alors intégrable.

Remarque 1. - Les deux cas extrêmes les plus intéressants de ce corollaire :

- M variété dont chaque composante connexe a un bord non vide.

Alors on a existence et unicité d'un semi-groupe intégrable sur $C_0(\mathring{M})$ dont le générateur prolonge W .

- M variété compacte sans bord.

Alors on a existence et unicité d'un semi-groupe sur $C(M)$ (non intégrable en général) dont le générateur prolonge W .

Remarque 2. - Ce corollaire constitue en quelque sorte une réciproque aux théorèmes 3.5 et 3.6 (uniquement pour une variété $\mathring{M}$ intérieur d'une variété à bord compacte) de l'exposé 3. Outre les conditions nécessaires, issues de ces théorèmes, nous avons fait trois hypothèses supplémentaires :

- Régularité de W au bord : dans le cas d'un bord non vide, nous supposons W opérateur de Waldenfels sur M alors que le théorème 3.6 ne donne sa forme que sur $\mathring{M}$.

- Régularité höldérienne de P et S : les théorèmes directs ne montraient que leur semi-continuité.

- Ellipticité de P : les théorèmes directs montraient uniquement P semi-elliptique.

I.8. Une condition suffisante de régularité höldérienne pour les opérateurs de Levy.

Dans le théorème 1 apparaissait la condition : S applique continûment C^2 dans $C^{0,\lambda}$. Le théorème suivant affirme que "beaucoup" d'opérateurs de Levy sont de ce type.

Rappelons (voir l'exposé 3, n° 2.5) l'existence de développements de Taylor (à l'ordre 1) globaux sur une variété. Nous désignerons par $\theta_x u(y)$ un tel développement.

Donnons-nous de plus une métrique riemannienne g sur M . $\overline{xy}$ désignera la distance géodésique correspondante.

Enonçons deux propriétés qui nous seront utiles :

(T'3) $\quad \exists\, C > 0 \,, \quad \forall\, u \in C^2(M) \,, \qquad |u(y) - \theta_x\, u(y)| \leqslant C\|u\|_2\, \overline{xy}^2 \,,$

(T4) $\quad \exists\, C > 0 \,, \quad \forall\, u \in C^2(M) \,, \qquad |\theta_x\, u(y) - \theta_{x'}\, u(y)| \leqslant C\|u\|_2\, \overline{xx'}$ (14) .

Rappelons enfin que tout opérateur de Levy peut se mettre sous la forme

$$Du(x) = a(x)\, u(x) + \frac{\partial u}{\partial X}(x) + \int s(x\,,\, dy)[u(y) - \theta_x\, u(y)] \,,$$

$a(x)$ étant continue et X étant un champ de vecteurs continu.

THÉORÈME 2.

1° Supposons qu'il existe $\alpha > 0$, $0 < \mu < 1$, N réel et $C > 0$ tels que :

(a) $\int_{B(x,r)} s(x\,,\, dy)\, \overline{xy}^2 \leqslant C\, r^\alpha$,

(b) $\int_{C[B(x,\rho) \cup B(x',\rho)]} |s(x\,,\, dy) - s(x'\,,\, dy)| \leqslant C\, \overline{xx'}^{\mu}\, \frac{1}{\rho^N}$ (15).

Alors il existe λ , $0 < \lambda < 1$, tel que l'opérateur

$$u \longmapsto \int s(x\,,\, dy)[u(y) - \theta_x\, u(y)]$$

applique continûment C^2 dans $C^{0,\lambda}$.

2° Si les mesures $s(x\,,\, dy)$ ont une densité $s(x\,,\, y)$ par rapport à l'élément de volume riemannien $\tau(dy)$, on peut écrire

$$s(x\,,\, y) = \frac{M(x\,,\, y)}{\overline{xy}^{\,n+2-\alpha}} \,.$$

Supposons :

(a') $M(x\,,\, y) \leqslant C$, $\forall\, x$, presque partout en y .

(b') $|M(x\,,\, y) - M(x'\,,\, y)| \leqslant C\, \overline{xx'}^{\mu}$, $\forall\, x$, $\forall\, x'$, presque partout en y .

Alors les hypothèses (a) et (b) sont satisfaites avec $\mu = 2 + \mu - \alpha$.

---

(14) Ces propriétés sont triviales pour le développement de Taylor ordinaire $\theta_x\, u(y) = u(x) + \sum (y_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. La construction de θ sur une variété montre facilement que ces propriétés se transportent.

(15) Le 1er membre désigne la masse totale de la mesure (non positive) $s(x\,,\, dy) - s(x'\,,\, dy)$ située dans $C[B(x\,,\, \rho) \cup B(x'\,,\, \rho)]$. $B(x\,,\, r)$ signifie toujours la boule de centre x et de rayon r (pour la distance géodésique associée à g).

COROLLAIRE. - Soit

$$Su(x) = a(x)\, u(x) + \frac{\partial u}{\partial X}(x) + \int s(x\,,\, dy)[u(y) - \theta_x\, u(y)] \quad ,$$

s vérifiant les hypothèses du théorème 2, $a(x)$ et $\chi(x)$ de classe $C^{0,\mu'}$ pour un μ' , $0 < \mu' < 1$.

Alors il existe λ tel que S applique continûment C^2 dans $C^{0,\lambda}$.

C'est une conséquence immédiate du théorème, il suffit de choisir λ plus petit que μ' et que l'exposant fourni par le théorème 2.

Démonstration du théorème 2. - Montrons que les hypothèses 2° entraînent les hypothèses 1°.

(a) résulte trivialement de (a'). On déduit de (b') :

$$|s(x\,,\,y) - s(x'\,,\,y)| \leqslant C\, \overline{xx'}^{\mu}\, \frac{1}{\inf(\overline{xy}\,,\,\overline{x'y})^{n+2+\mu-\alpha}}$$

(on montrera d'abord que

$$\overline{xy}^M - \overline{x'y}^M \leqslant C\, \overline{xx'}^{\mu} \sup(\overline{xy}\,,\,\overline{x'y})^{M-\mu} \quad ,$$

ce qui se déduit de l'inégalité du triangle). On en déduit alors (b) par intégration.

Démontrons la première partie : Soit $u \in C^2$. Il faut montrer qu'il existe λ tel que

$$(\star) \qquad \left|\int s(x\,,\,dy)[u(y) - \theta_x\, u(y)] - \int s(x'\,,\,dy)[u(y) - \theta_{x'}\, u(y)]\right| \leqslant C\|u\|_2\, \overline{xx'}^{\lambda} \quad (^{16}) \;,$$

il suffit de le montrer pour x et x' assez voisins. Posons

$$\overline{xx'} = \varepsilon < 1 \quad .$$

Soit δ : $0 < \delta < 1$ que nous fixerons ultérieurement. Majorons le 1er membre de $(\star)$ par $A_1 + A_2 + B$.

$$A_1 = \int_{[B(x,\varepsilon^\delta) \cup B(x',\varepsilon^\delta)]} s(x\,,\,dy)[u(y) - \theta_x\, u(y)]$$

$$\leqslant \int_{B(x,2\varepsilon^\delta)} s(x\,,\,dy)\; C\|u\|_2\, \overline{xy}^2 \quad ,$$

d'où $A_1 \leqslant C\|u\|_2\, \varepsilon^{\delta\alpha}$.

(^{16}) La constante notée C peut changer de valeur à chaque ligne, mais reste indépendante de u et des points x et x' .

$$A_2 = \int_{B(x,\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)} s(x' , dy)[u(y) - \theta_{x'} u(y)] \leqslant C\|u\|_2 \, \varepsilon^{\delta\alpha} ,$$

pour la même raison.

$$B = \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} s(x , dy)[u(y) - \theta_x u(y)]$$

$$- \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} s(x' , dy)[u(y) - \theta_{x'} u(y)] .$$

Coupons B en trois parties :

$$B_1 \leqslant \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} |s(x , dy) - s(x' , dy)| \, u(y)$$

$$\leqslant C\|u\|_0 \, \varepsilon^\mu \frac{1}{\varepsilon^{\delta N}} \leqslant C\|u\|_2 \, \varepsilon^{\mu-\delta N} .$$

$$B_2 \leqslant \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} |s(x , dy) - s(x' , dy)| \; |\theta_x u(y)| \leqslant C\|u\|_2 \, \varepsilon^{\mu-\delta N} .$$

$$B_3 \leqslant \int_{C[B(x,\varepsilon^\delta)\cup B(x',\varepsilon^\delta)]} s(x' , dy) \, |\theta_x u(y) - \theta_{x'} u(y)|$$

$$\leqslant \int_{C B(x',\varepsilon^\delta)} s(x' , dy) \; C\|u\|_2 \, \overline{xx'} ,$$

$$B_3 \leqslant C\|u\|_2 \, \varepsilon \times \frac{1}{(\varepsilon^\delta)^2} \leqslant C\|u\|_2 \, \varepsilon^{1-2\delta} .$$

Choisissons maintenant δ pour que $\mu - \delta N$ et $1 - 2\delta$ soient > 0 . Alors, en appelant λ le inf des quantités $\mu - \delta N$, $1 - 2\delta$, $\alpha\delta$, le premier membre de ($\star$) est majoré par $C\|u\|_2 \, \varepsilon^\lambda$, la constante C ne dépendant pas de x , x' et u .

C. Q. F. D.

Remarque. - La condition (a) est une restriction à la croissance de la mesure $s(x , dy)$ au voisinage de x . La condition nécessaire exigeait seulement

$$\int_{B(x,r)} s(x , dy) \, \overline{xy}^2 \to 0 \quad \text{avec } r .$$

La condition (b) (ce qui est peut-être plus visible sous la forme (b')) exprime que $s(x , dy)$ dépend de x , en un certain sens, de façon höldérienne, et ceci avec une certaine uniformité en y .

II.1. Notations.

Dans ~~cette seconde partie~~, M désigne toujours une variété à bord compacte de dimension n, et $W = P + S$ un opérateur de Waldenfels décomposable sur M (n° I.1).

Soit Γ un opérateur frontière de Ventcel'. Rappelons-en la forme [17].

Γ applique $C^2(M)$ dans les fonctions boréliennes bornées sur ∂M [18].

$$\forall\ u \in C^2(M) \qquad \Gamma u(x') = \alpha(x') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + Qu(x') + Tu(x') \quad .$$

α est une fonction positive sur ∂M, ν un champ de vecteurs sur ∂M, strictement dirigé vers l'intérieur, de classe C^∞. Q est un opérateur différentiel du 2e ordre sur ∂M, semi-elliptique, sans terme d'ordre 0. Si (U , χ) est une carte locale telle que $\chi^n(x) = 0$ définisse le bord, on a :

$$Qu(x') = \sum_{i,j=1}^{n-1} b_{ij}(x') \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^i\, \partial \chi^j}(x') + \sum_{i=1}^{n-1} b_i(x') \frac{\partial u}{\partial \chi^i}(x') \quad .$$

Enfin, T est un opérateur de Ventcel' de type intégral. Désignant par $\theta^\star_{x'}\, u(y)$ un développement de Taylor global à la frontière, d'ordre 1 tangentiellement, d'ordre 0 transversalement [19] (ces développements sont définis au n° 4.5 de l'exposé 3), T peut s'écrire :

$$\forall\ u \in C^2(M) \qquad Tu(x') = \eta(x')\, u(x') + \frac{\partial u}{\partial Z}(x') + \int_M t(x' , dy)[u(y) - \theta^\star_{x'}\, u(y)] \ ,$$

où η est une fonction sur ∂M, Z un champ de vecteurs tangents à ∂M, et $t(x' , dy)$ le noyau intégral singulier associé à T. T vérifie de plus :

$$T1(x') = \eta(x') + \int t(x' , dy)[1 - \theta^\star_{x'}\, 1(y)] \leqslant 0 \quad .$$

Tous les coefficients sont supposés seulement boréliens bornés, mais nous serons amenés à faire plus loin des hypothèses de régularité plus fortes.

---

[17] La description des opérateurs de Ventcel' fait l'objet du paragraphe 4 de l'exposé 3 de ce séminaire.

[18] Les points de ∂M seront désignés par des lettres affectées d'un ' (prime).

[19] Lorsque la variété M est plongée dans $\mathbb{R}^n$, on peut prendre par exemple $\theta^\star_{x'}\, u(y) = u(x') + (\overrightarrow{y - x'}).\overrightarrow{\text{grad}'}\, u(x')$, où $\text{grad}'\, u$ est la projection du gradient de u sur le plan tangent en x' à ∂M.

$\delta(x')$ étant une fonction borélienne bornée positive sur ∂M, introduisons l'opérateur frontière L :

$$\forall\, u \in C^2(M) \qquad Lu(x') = \Gamma u(x') - \delta(x')\, Wu(x') \quad .$$

II.2. Transversalité.

Dans l'exposé 6, on utilisera la notion suivante :

Définition. - L'opérateur frontière L est dit transversal si $\forall\, x' \in \partial M$, on a : ou bien $\alpha(x') > 0$, ou bien $\delta(x') > 0$, ou bien $t(x', \mathring{M}) = +\infty$.

Nous n'aurons besoin dans cet exposé que de la condition suivante, plus faible.

Définition. - L'opérateur frontière L est dit faiblement transversal si, $\forall\, x' \in \partial M$, l'un des quatre nombres $\alpha(x')$, $\delta(x')$, $t(x', \mathring{M})$, $\Gamma 1(x') = T1(x')$ est non nul.

On donnera, dans l'exposé 6, une interprétation probabiliste simple de ces conditions. On peut voir ici que si $\alpha(x') = \delta(x') = t(x', \mathring{M}) = 0$, la valeur de $Lu(x')$ ne dépend que des valeurs de u sur ∂M (ce qui justifie en partie la terminologie).

II.3. Propriétés de maximum.

PROPOSITION 4. - Si $u \in C^2(M)$ atteint un maximum positif en $x' \in \partial M$, on a $\Gamma u(x') \leqslant 0$.

En effet, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \leqslant 0$, $Qu(x') \leqslant 0$. Si $u(x') = m \geqslant 0$,

$$Tu(x') \leqslant m\, T1(x') \leqslant 0 \quad .$$

PROPOSITION 5 (Principe du maximum faible). - Supposons L faiblement transversal. Soit $u \in C^2(M)$ telle que $Lu \geqslant 0$. Si $m = \sup u > 0$, il existe au moins un point $x \in M$ tel que $u(x) = m$ et $Wu(x) \leqslant 0$.

Si le maximum positif est atteint en au moins un point intérieur x, on a :

$$Wu(x) \leqslant 0 \qquad \text{(proposition 1)} .$$

Dans le cas contraire, supposons donc $u(x') = m > 0$, et $u(y) < u(x')$, $\forall\, y \in \mathring{M}$. On a $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') \leqslant 0$.

(a) Si $\delta(x') > 0$,

$$Wu(x') = \frac{1}{\delta(x')} \Gamma u(x') \leqslant 0 \qquad \text{(proposition 4)} .$$

(b) Si $\delta(x') = 0$,

$$Lu(x') = \Gamma u(x') \quad .$$

On ne peut avoir $T1(x') > 0$, sinon $Tu(x') \leqslant m\ T1(x') < 0$, et on aurait $Lu(x') < 0$.

On ne peut avoir $t(x', \mathring{M}) > 0$, car $u(y) < u(x')$ dans $\mathring{M}$, et on aurait $Tu(x') < m\ T1(x') \leqslant 0$, et $Lu(x')$ serait < 0 .

D'après l'hypothèse de faible transversalité, on a nécessairement $\alpha(x') > 0$, et donc $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') = 0$ (sinon $Lu(x') = \Gamma u(x')$ serait < 0).

En un maximum atteint au bord avec une dérivée vers l'intérieur nulle, $Pu(x') \leqslant 0$, d'autre part $Su(x') \leqslant 0$. Donc $Wu(x') \leqslant 0$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 6. – Supposons L faiblement transversal. Soit β réel > 0 . Soit $u \in C^2(M)$ telle que $Lu \geqslant 0$ et $(W - \beta)u \geqslant 0$. Alors $u \leqslant 0$.

En effet, si u admettait un maximum $m > 0$, elle l'atteindrait en un point x tel que $Wu(x) \leqslant 0$, donc tel que $(W - \beta)\ u(x) < 0$.

PROPOSITION 7. – Supposons Γ lui-même faiblement transversal [20]. Supposons que, dans chaque composante connexe de M , l'une des deux fonctions $W1(x)$ et $T1(x')$ n'est pas identiquement nulle. Supposons enfin P elliptique.

Soit $u \in C^2(M)$ telle que $Lu \geqslant 0$ et $Wu \geqslant 0$. On a alors $u \leqslant 0$.

Si u atteint un maximum > 0 en un point intérieur, elle est constante sur toute une composante connexe (proposition 2).

Si u ne l'atteint en aucun point intérieur, mais en $x' \in \partial M$, on a

$$u(y) < u(x') , \quad \forall\ y \in \mathring{M} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0 \qquad \text{(proposition 3)} .$$

D'après la transversalité de Γ , on aurait

$$\Gamma u(x') < 0 \qquad \text{et} \qquad Lu(x') = \Gamma u(x') - \delta W(x') < 0 \quad .$$

u ne peut donc atteindre un maximum $m > 0$ qu'en étant constante sur une compo-

---

([20]) C'est-à-dire, $\forall\ x' \in \partial M$, l'un des trois nombres $\alpha(x')$, $t(x', \mathring{M})$, $T1(x')$ est non nul.

sante connexe C . Mais, pour $x \in C$, $Wu(x) \leqslant m\, W1(x)$, et pour $x' \in \partial M \cap C$, $Lu(x') \leqslant m\, L1(x')$, et l'une au moins de ces fonctions prendrait des valeurs < 0 . u ne peut atteindre de maximum > 0 , on a donc $u \leqslant 0$.

II.4. Résolution des problèmes frontière de Ventcel'.

THÉORÈME 3. - Sous les hypothèses suivantes :

P elliptique, à coefficients $C^{0,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$,
S applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$,
$\alpha(x')$ et $\delta(x')$ appartiennent à $C^{0,\lambda}$,
Q elliptique, à coefficients $C^{0,\lambda}$,
T applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$ (21),

1° Les opérateurs $u \longmapsto (Wu , \Gamma u)$ et $u \longmapsto (Wu , Lu)$ de

$$C^{2,\lambda}(M) \to C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$$

sont d'indice 0 ;

2° Si, de plus, L est faiblement transversal, alors $\forall\, \beta > 0$, l'opérateur $u \longmapsto ((W - \beta)u , Lu)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$;

3° L'opérateur $u \longmapsto (Wu , Lu)$ est lui-même un isomorphisme, sous les conditions suivantes :

- Γ est lui-même faiblement transversal.
- Dans chaque composante connexe C de M , l'une des deux fonctions $W1(x)$ sur C et $T1(x')$ sur $\partial M \cap C$ n'est pas identiquement nulle.

1° Considérons l'opérateur $u \longmapsto ((P - \beta)u , (Q - \beta)u)$, $\beta > 0$, de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$. Résoudre le problème $(P - \beta)u = - f$; $(Q - \beta)u = - \varphi$, revient à chercher successivement $w \in C^{2,\lambda}(\partial M)$ telle que $(Q - \beta)w = - \varphi$, puis $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que $(P - \beta)u = - f$, $\gamma^0 u = w$.

On a existence et unicité de w (problème de Dirichlet sur la variété compacte sans bord ∂M), puis existence et unicité de u (problème de Dirichlet sur la variété à bord M). L'opérateur $u \longmapsto ((P - \beta)u , (Q - \beta)u)$ est donc un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$.

D'autre part, la boule unité de $C^{2,\lambda}$ étant compacte dans C^2 , les opérateurs

---

(21) On donnera au § II.6, une condition suffisante pour que cette hypothèse soit réalisée.

$u \longmapsto (Su\ ,\ 0)$; $u \longmapsto (0\ ,\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu})$; $u \longmapsto (0\ ,\ Tu)$; $u \longmapsto (\beta u\ ,\ 0)$; $u \longmapsto (0\ ,\ \beta\gamma^0 u)$ sont compacts de $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ (ils sont tous continus de $C^2(M) \to C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$).

Donc $u \longmapsto (Wu\ ,\ \Gamma u)$ est d'indice 0 .

L'opérateur $u \longmapsto (Wu\ ,\ Lu)$ est le composé de $u \longmapsto (Wu\ ,\ \Gamma u)$ de $C^{2,\lambda}$ dans $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ et de l'opérateur $(f\ ,\ \varphi) \longmapsto (f\ ,\ \varphi - \delta\gamma^0 f)$ de $C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ dans lui-même. Ce dernier opérateur est évidemment un isomorphisme. Composer un opérateur avec un isomorphisme ne modifie pas le noyau et transforme l'image en un sous-espace de même codimension, donc ne modifie pas l'indice (22).

Donc $u \longmapsto (Wu\ ,\ Lu)$ est d'indice 0 .

2° $u \longmapsto ((W - \beta)u\ ,\ Lu)$ étant d'indice 0 , il suffit de montrer qu'il est injectif. Supposons donc $(W - \beta)u = 0$, $Lu = 0$. Il résulte de la proposition 6 que $u = 0$.

3° Sous ces hypothèses, il résulte de la proposition 7 que $Wu = 0$, $Lu = 0$ implique $u = 0$. $u \longmapsto (Wu\ ,\ Lu)$ est donc un isomorphisme.

THÉORÈME 3'. – Sous les hypothèses suivantes :

P elliptique, à coefficients $C^{0,\lambda}$, $0 < \lambda < 1$,
S applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(M)$,
$\Gamma u(x') = \alpha(x') \frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + \frac{\partial u}{\partial \tau}(x') + Tu(x')$,
$\alpha(x') \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, $\alpha(x') > 0$,
τ champ de vecteurs tangent à ∂M , de classe $C^{1,\lambda}$,
T applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{1,\lambda}(\partial M)$,

1° $\forall\ \beta > 0$, l'opérateur $u \longmapsto ((W - \beta)u\ ,\ \Gamma u)$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M)$ sur $C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$;

2° L'opérateur $u \longmapsto (Wu\ ,\ \Gamma u)$ est un isomorphisme sous la condition suivante : Dans chaque composante connexe C de M , l'une des fonctions $W1(x)$ sur C et $\Gamma 1(x')$ sur $\partial M \cap C$ n'est pas identiquement nulle.

COROLLAIRE. – Soient W et Γ vérifiant les hypothèses du théorème 3', et soit $Lu(x') = \Gamma u(x') - \delta(x')\ Wu(x')$ un opérateur frontière avec

---

(22) C'est un cas particulier d'un théorème général : le composé de deux opérateurs à indice est lui-même d'indice fini, et l'indice du composé est égal à la somme des indices.

$$\delta(x') \in C^{1,\lambda}(\partial M) .$$

1° $\forall\ \beta > 0$, $\forall\ f \in C^{1,\lambda}(M)$, $\forall\ \varphi \in C^{1,\lambda}(\partial M)$, il existe une et une seule $u \in C^{2,\lambda}(M)$ telle que

$$\begin{aligned} (W - \beta)u &= - f \\ Lu &= - \varphi \end{aligned} .$$

2° Sous l'hypothèse supplémentaire du 2° du théorème 3', il existe une, et une seule, solution dans $C^{2,\lambda}$ de

$$\begin{aligned} Wu &= - f \\ Lu &= - \varphi \end{aligned} .$$

En effet, résoudre

$$\begin{aligned} (W - \beta)u &= - f \\ Lu &= - \varphi \end{aligned}$$

revient à résoudre

$$\begin{aligned} (W - \beta)u &= - f \\ (\Gamma - \beta\delta)u &= - \varphi - \delta f \end{aligned}$$

pour lequel on a existence et unicité, d'après le théorème 3' appliqué à $(\Gamma - \beta\delta)$.

Sous l'hypothèse du 2°, la même démonstration s'applique avec $\beta = 0$.

Démonstration du théorème 3'. - L'opérateur $u \longmapsto ((P - \beta)u , \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial \tau})$ est un isomorphisme de $C^{2,\lambda}(M) \rightarrow C^{0,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$, c'est le théorème d'existence et d'unicité des solutions du problème aux dérivées obliques pour un opérateur elliptique (23). Cet opérateur est donc d'indice 0 . Les opérateurs

$$u \longmapsto ((W - \beta)u , \Gamma u) \qquad \text{et} \qquad u \longmapsto (Wu , \Gamma u)$$

obtenus en lui ajoutant des opérateurs compacts sont d'indice 0 .

Γ est faiblement transversal, car $\alpha(x') > 0$. La proposition 6 montre que $u \longmapsto ((W - \beta)u , \Gamma u)$ est injectif dans le cas général, et la proposition 7 montre que $u \longmapsto (Wu , \Gamma u)$ l'est sous l'hypothèse du 2°.

II.5. Opérateurs de Green et opérateurs harmoniques.

Supposons L faiblement transversal, et plaçons-nous sous les hypothèses du

---

(23) Voir [4] (pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$), ou [2] (pour une variété à bord compacte).

théorème 3 (resp. du corollaire du théorème 3'). Il y a existence et unicité de la solution de :

$$(W - \beta)u = - f$$

$$Lu = - \varphi$$

pour $(f , \varphi) \in C^{0,\lambda}(M) \times C^{0,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{1,\lambda}(M) \times C^{1,\lambda}(\partial M)$), pour $\beta > 0$.

Notons

$$u = G_\beta f \quad \text{la solution de} \quad \begin{cases} (W - \beta)u = - f \\ Lu = 0 \end{cases} ,$$

et

$$u = J_\beta \varphi \quad \text{la solution de} \quad \begin{cases} (W - \beta)u = 0 \\ Lu = - \varphi \end{cases} .$$

G_β est un opérateur linéaire continu de

$$C^{0,\lambda}(M) \to C^{2,\lambda}(M) \qquad (\text{resp. } C^{1,\lambda}(M) \to C^{2,\lambda}(M))$$

positif d'après la proposition 6. Il se prolonge donc continûment en un opérateur (nommé encore G_β) de $C(M) \to C(M)$.

J_β est un opérateur linéaire continu de

$$C^{0,\lambda}(\partial M) \to C^{2,\lambda}(M) \qquad (\text{resp. } C^{1,\lambda}(\partial M) \to C^{2,\lambda}(M))$$

positif d'après la proposition 6. Il se prolonge donc continûment en un opérateur (nommé encore J_β) de $C(\partial M) \to C(M)$.

Si de plus Γ est lui-même faiblement transversal, et si dans chaque composante connexe de M , l'une des deux fonctions $S1(x)$ et $T1(x')$ n'est pas identiquement nulle, les résultats précédents sont encore valables pour $\beta = 0$. G et J sont alors appelés respectivement l'opérateur de Green et l'opérateur harmonique associés à la condition frontière L .

La restriction au bord de J_β sera notée K_β :

$$K_\beta = \gamma^0 J_\beta \quad .$$

K_β est un opérateur de $C(\partial M) \to C(\partial M)$ qui applique $C^{0,\lambda}(\partial M)$ (resp. $C^{1,\lambda}(\partial M)$) dans $C^{2,\lambda}(\partial M)$. Les opérateurs G^0_β et H_β résolvant le problème de Dirichlet associé à W , étant définis comme au § I.6, on a :

$$LH_\beta K_\beta \varphi = - \varphi \qquad \forall \varphi \in C^{0,\lambda}(\partial M) \quad (\text{resp. } C^{1,\lambda}(\partial M)) \quad .$$

K_β apparaît ainsi comme l'inverse de l'opérateur $- LH_\beta$ sur le bord.

D'autre part, pour $f \in C^{0,\lambda}(M)$ (resp. $C^{1,\lambda}(M)$), posons

$$u = G_\beta f - G_\beta^0 f \qquad u \in C^{2,\lambda}(M)$$

et vérifie

$$(W - \beta)u = 0$$
$$Lu = - LG_\beta^0 f \quad ,$$

donc $u = J_\beta LG_\beta^0 f = H_\beta K_\beta LG_\beta^0 f$.

Nous obtenons ainsi la relation, qui sera utilisée dans l'exposé 6 :

$$G_\beta = G_\beta^0 + H_\beta K_\beta LG_\beta^0 \quad ({}^{24})$$

II.6. Une condition suffisante de régularité höldérienne pour les opérateurs de Ventcel' de type intégral.

Rappelons la condition portant sur le noyau singulier $t(x' , dy)$ intervenant dans un opérateur de Ventcel' de type intégral :

Pour toute carte locale (U , χ) telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$ ($\chi^n(x) = 0$ définissant le bord), on a :

$$\int_M t(x' , dy)[\sum_1^{n-1} |\chi^i(y) - \chi^i(x')|^2 + \chi^n(y)] < \infty \quad .$$

Introduisons une fonction $x' , y \longmapsto \widetilde{x'y}$, de $\partial M \times M$ dans $\underset{\sim}{R}^+$, de classe C^∞ et vérifiant la propriété suivante : Pour toute carte locale (U , χ) telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, pour tout compact $K \subset U$, il existe $C > 0$ tel que

$$\frac{1}{C} \widetilde{x'y} \leqslant \sum_1^{n-1} |\chi^i(y) - \chi^i(x')|^2 + \chi^n(y) \leqslant C \widetilde{x'y} \qquad \forall x' \in K , \quad \forall y \in K \quad ({}^{25}) .$$

La condition s'écrit alors :

$$\forall x' \qquad \int_M t(x' , dy) \widetilde{x'y} < \infty \quad .$$

Soit d'autre part g une métrique riemannienne sur M , la distance géodésique

---

(24) Cette relation est due à SATO et UENO ; voir l'exposé n° 6.

(25) La construction d'une telle fonction se fait en recollant au noyau d'une partition de l'unité des fonctions $\sum |\chi^i(y) - \chi^i(x)|^2 + \chi^n(y)$ pour un système de cartes recouvrant M .

étant toujours désignée par $\overline{xy}$.

Soit enfin $\theta^{\star}_{x} u(y)$ un développement de Taylor global sur M , tel qu'il a été décrit au II.1.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

$$\exists\, C \,,\quad \forall\, u \in C^2(M) \,,\quad \forall\, x' \,,\quad \forall\, y \qquad |u(y) - \theta^{\star}_{x'} u(y)| \leqslant C\|u\|_2 \,\widetilde{x'y} \,,$$

$$\exists\, C \,,\quad \forall\, u \in C^2(M) \,,\quad \forall\, x' \,,\quad \forall\, x'' \qquad |\theta^{\star}_{x'}(y) - \theta^{\star}_{x''}(y)| \leqslant C\|u\|_2 \,\overline{x'x''} \,.$$

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 2 pour les opérateurs de Levy, les démonstrations sont tout-à-fait semblables.

THÉORÈME 4. - S'il existe $\alpha > 0$, $0 < \mu < 1$, N réel et $C > 0$ tels que $t(x', dy)$ vérifie les deux conditions suivantes :

(a) $\forall\, x' \,,\ \int_{B(x',r)} t(x', dy)\, \widetilde{x'y} \leqslant Cr^{\alpha}$.

(b) $\forall\, x' \,,\ \forall\, x'' \,,\ \int_{C[B(x',\rho)\cup B(x'',\rho)]} |t(x', dy) - t(x'', dy)| \leqslant C\, \overline{x'x''}^{\mu} \frac{1}{\rho^N}$ ([26]).

Alors il existe λ $(0 < \lambda < 1)$ tel que l'opérateur

$$u \longmapsto \int_M t(x', dy)[u(y) - \theta^{\star}_{x'} u(y)]$$

applique continûment $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

COROLLAIRE. - Soit

$$Tu(x') = \alpha(x')\, u(x') + \frac{\partial u}{\partial Z}(x') + \int_M t(x', dy)[u(y) - \theta^{\star}_{x'} u(y)] \,.$$

La fonction α et le champ de vecteurs Z étant de classe $C^{0,\mu'}$, $0 < \mu' < 1$, le noyau t vérifiant les hypothèses du théorème 4, **il existe** alors λ $(0<\lambda<1)$ tel que T applique $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

Remarque. - On peut énoncer un résultat analogue à la deuxième partie du théorème 2. Si $t(x', dy) = \dfrac{K(x', y)}{\overline{x'y}^{n-\alpha}\ \widetilde{x'y}}\, \tau(dy)$, la fonction K étant uniformément bornée, et höldérienne en x uniformément en y , les hypothèses du théorème 4 sont satisfaites.

([26]) Ici encore, le 1er membre désigne la masse totale de la mesure (non positive $t(x', dy) - t(x'', dy)$, dans le complémentaire des boules $B(x', \rho)$ et $B(x'', \rho)$.

Démonstration du théorème 4. - Il faut montrer qu'il existe λ tel que :

$$(\star\star) \quad \left|\int t(x',dy)[u(y)-\theta^{\star}_{x'}u(y)] - \int t(x'',dy)[u(y)-\theta^{\star}_{x''}u(y)]\right| \leq C\|u\|_2\, \overline{x'x''}^{\lambda} ,$$

C devant être indépendante de x', x'' et u [27]. On peut se borner à x' et x'' assez voisins. Posons $\overline{x'x''} = \varepsilon < 1$. Soit δ : $0 < \delta < 1$, majorons le 1er membre de $(\star\star)$ par $A_1 + A_2 + B$:

$$A_1 = \int_{B(x',2\varepsilon^{\delta})} t(x',dy)\,|(u(y)-\theta^{\star}_{x'}u(y))| \leq C\|u\|_2\, \varepsilon^{\delta\alpha} ,$$

$$A_2 = \int_{B(x'',2\varepsilon^{\delta})} t(x'',dy)\,|(u(y)-\theta^{\star}_{x''}u(y))| \leq C\|u\|_2\, \varepsilon^{\delta\alpha} ,$$

$$B = \Big|\int_{\complement[B(x',\varepsilon^{\delta})\cup B(x'',\varepsilon^{\delta})]} t(x',dy)(u(y)-\theta^{\star}_{x'}u(y)) - \int_{\complement[B(x',\varepsilon^{\delta})\cup B(x'',\varepsilon^{\delta})]} t(x'',dy)(u(y)-\theta^{\star}_{x''}u(y))\Big| .$$

$$B \leq B_1 + B_2 + B_3 ,$$

$$B_1 = \int_{\complement[B(x',\varepsilon^{\delta})\cup B(x'',\varepsilon^{\delta})]} |t(x',dy)-t(x'',dy)|\, u(y) \leq C\|u\|_2\, \varepsilon^{\mu-\delta N} ,$$

$$B_2 = \int_{\complement B(x',\varepsilon^{\delta})} t(x',dy)\,|\theta^{\star}_{x'}u(y)-\theta^{\star}_{x''}u(y)| \leq C\|u\|_2\, \varepsilon^{1-2\delta} ,$$

$$B_3 = \int |t(x',dy)-t(x'',dy)|\;|\theta^{\star}_{x''}u(y)| \leq C\|u\|_2\, \varepsilon^{\mu-\delta N} .$$

Choisissons δ tel que $\mu-\delta N$ et $1-2\delta$ soient >0. Soit

$$\lambda \leq \inf(\mu-\delta N,\ 1-2\delta,\ \delta\alpha) ,$$

l'inégalité $(\star\star)$ résulte des majorations ci-dessus.

II.7. Application à la construction de semi-groupes.

Donnons-nous W, opérateur de Waldenfels sur M, et $Lu = \Gamma u - \delta W u$ un opérateur frontière. Soit

$$\mathcal{D} = \{u \in C^2 \mid Lu = 0\} .$$

---

[27] Dans toute la démonstration, la lettre C désignera toute constante ne dépendant pas de x', x'', u.

Nous considèrerons l'opérateur $(W, \mathcal{D})$, restriction de W à $\mathcal{D}$, opérateur non partout défini de $C(M)$ dans $C(M)$.

Problème (réciproque des théorèmes 4.8 et 5.4 de l'exposé 3) : Existe-t-il un semi-groupe de Feller sur M dont le générateur infinitésimal prolonge $(W, \mathcal{D})$?

Pour le résoudre, appliquons le théorème de Hille-Yosida-Ray ; il faut vérifier les trois conditions suivantes :

(1) $\mathcal{D}$ est dense dans $C(M)$,

(2) Principe du maximum positif faible : $\forall\, u \in \mathcal{D}$ avec $\sup u > 0$, il existe $x \in M$ avec $u(x) = \sup u$ et $Wu(x) \leq 0$,

(3) $\exists\, \beta \geq 0$, $(W - \beta)(\mathcal{D})$ dense dans $C(M)$.

(2) est vérifié en supposant L faiblement transversal (proposition 5). (3) est vérifié sous les hypothèses du théorème 3 (ou du théorème 3'), $(W - \beta)(\mathcal{D})$ contient en effet $C^{0,\lambda}$ (resp. $C^{1,\lambda}$).

Il reste donc à montrer la densité de $\mathcal{D}$, ce qui sera fait dans l'exposé 6 de ce séminaire.

Remarque. - Nous avons fait, outre les conditions nécessaires provenant des théorèmes directs (théorèmes 4.8 et 5.4 de l'exposé 3), des hypothèses supplémentaires pour démontrer (2) et (3) :

- Régularité de W au bord : le théorème 5.4 montrait seulement que le générateur était un opérateur de Waldenfels généralisé ;
- Régularité höldérienne de P et S : le théorème 5.4 n'assurait que leur semi-continuité ;
- Régularité höldérienne de L : le théorème 4.8 ne donnait que des coefficients boréliens bornés ;
- Transversalité faible de L (dans l'exposé 6, pour démontrer (1), il faudra supposer L transversal) ;
- Ellipticité de P, avec :

ou bien Q elliptique (théorème 3),

ou bien la partie différentielle de L est réduite à une dérivation strictement dirigée vers l'intérieur (théorème 3'). Cette condition signifie que les parties différentielles de W et L constituent un système frontière elliptique du 2nd ordre sur M (au sens de [1] ou [6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIREMBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions, Commun. pure and appl. Math., t. 12, 1959, p. 623-727.

[2] BONY (Jean-Michel). - Majorations a priori et problèmes frontière elliptiques du second ordre, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 5e année, 1965/66 (à paraître).

[3] BONY (J.-M.), COURRÈGE (P.) et PRIOURET (P.). - Solutions höldériennes de problèmes aux limites intégro-différentiels elliptiques donnant lieu au principe du maximum, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, 1966, Série A, p. 451-454.

[4] FIORENZA (Renato). - Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche, Ric. di Mat., t. 8, 1959, p. 83-110.

[5] GRISVARD (Pierre). - Opérateurs à indice. Lemme de compacité, Séminaire Cartan-Schwartz, t. 16, 1963/64 : Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique, n° 12, 9 p.

[6] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[7] MIRANDA (Carlo). - Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, neue Folge, 2).

[8] PALAIS (Richard S.). - Seminar on the Atiyah-Singer index theorem. - Princeton, Princeton University Press, 1965 (Annals of Mathematics Studies, 57).

[9] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 10e année, 1965/66, exposés 1 à 6, 234 p.