Philippe Courrège

Sur la forme intégro-différentielle du générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur une variété

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 10, nº 1 (1965-1966), exp. nº 3, p. 1-48

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1965-1966__10_1_A3_0>

21 avril 1966

SUR LA FORME INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE DU GÉNÉRATEUR INFINITÉSIMAL D'UN SEMI-GROUPE DE FELLER SUR UNE VARIÉTÉ

par Philippe COURRÈGE

Désignant par M une variété compacte, par $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe fortement continu d'opérateurs positifs contractants de l'espace de Banach $C(M)$ (semi-groupe de Feller sur M), et par $(\mathfrak{D}_A , A)$ le générateur infinitésimal de (N_t), on se propose ci-dessous d'étudier la forme de A sur le sous-espace $C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$.

En premier lieu, lorsque M est sans bord et que $C^2(M) \subset \mathfrak{D}_A$ (§ 3), A est, sur $C^2(M)$, de la forme $P + S$, où P est un opérateur différentiel du second ordre de partie principale positive (mais éventuellement dégénérée (n° 1.8)), et S un opérateur intégro-différentiel d'ordre $\leqslant 2$ défini, en chaque $x \in M$, comme une distribution $u \to Su(x)$, partie finie d'ordre 1 d'une mesure positive $s(x , dy)$ sur $M \setminus \{x\}$ singulière en x (n° 2.4, 2.6, 3.1).

En second lieu, lorsque M a un bord ∂M non vide (§ 4), $\mathfrak{D}_A \cap C^2(M)$ voit son étendue limitée par la condition frontière introduite par VENTCEL' dans [14], et qui s'écrit :

$$u \in \mathfrak{D}_A \cap C^2(M) \implies \delta(x') \, Au(x') = \Gamma u(x') , \qquad \forall\, x' \in \partial M ,$$

où δ est une fonction $\geqslant 0$ sur ∂M et Γ un opérateur frontière de la forme $\Gamma u = \alpha \frac{\partial u}{\partial v} + Q(\gamma^0 u) + Tu$ $(u \in C^2(M))$ décrite au n° 4.8 (voir aussi l'exposé n° 302 de [10]). En outre (§ 5), au moins lorsque $\mathfrak{D}_A$ contient suffisamment de fonctions de classe C^2 à l'intérieur de M (ce qui n'est pas un cas exceptionnel ; n° 5.5), A est encore (n° 5.4), sur $\mathfrak{D}_A \cap C^2(M)$, de la même forme intégro-différentielle que dans le cas sans bord :

$$Au(x) = Pu(x) + Su(x) , \qquad u \in \mathfrak{D}_A \cap C^2(M) ;$$

mais ceci seulement pour x intérieur à M $(x \in M \setminus \partial M)$, en ce sens que la fonction $Pu + Su$ sur $\overset{\circ}{M}$ peut ne pas se prolonger continûment au bord pour toute fonction $u \in C^2(M)$, mais seulement, grâce à la condition frontière de VENTCEL', pour les fonctions $u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$; $Au(x')$ $(x' \in \partial M)$ étant alors donné par

$$\lim_{\substack{x \to x' \\ x \in \overset{\circ}{M}}} [Pu(x) + Su(x)] \qquad (\text{n° } 5.4 \text{ et } 5.5) .$$

Ces résultats sont établis dans les paragraphes 3, 4 et 5, tandis que les opérateurs intervenant sont étudiés séparément, dans les paragraphes 1 et 2. Enfin, au paragraphe 6, on énonce les principes de la construction des semi-groupes de Feller qui sera développée dans les exposés n° 4, 5 et 6 de ce séminaire [12] à partir de la résolution des problèmes aux limites correspondants.

§ 1. Opérateurs différentiels du second ordre sur une variété.

On reprend d'abord ici les définitions et propriétés élémentaires des opérateurs différentiels sur une variété qui interviendront dans la suite de cet exposé, ainsi que dans les exposés n° 4, 5 et 6 du présent séminaire [12].

1.1. - On désigne, dans tout cet exposé, par M une variété dénombrable à l'infini [1] de classe C^∞ et de dimension n $(n \geqslant 1)$, et par ∂M son bord, ∂M pouvant être vide et M étant alors une variété sans bord [2]. On désigne, pour m entier $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$, par $C^m(M)$ l'espace des fonctions numériques de classe C^m sur M (ceci, y compris au bord (voir les n° 1.1 et 1.3 de l'exposé n° 1 de ce séminaire [12])), et par $B(M)$ l'espace des fonctions numériques boréliennes et localement bornées sur M.

L'espace $B(M)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et pour chaque $m \geqslant 0$, l'espace $C^m(M)$ de la topologie habituelle de "la convergence uniforme sur tout compact contenu dans une carte locale pour les dérivées jusqu'à l'ordre m correspondantes".

1.2. Définition. - Etant donné un entier $\geqslant 0$, p, un opérateur différentiel d'ordre p sera ici une application linéaire $P : u \to Pu$ d'un espace $C^q(M)$ (q entier $\geqslant p$) dans $B(M)$ telle que,

(α) $\operatorname{supp} Pu \subset \operatorname{supp} u$ pour tout $u \in C^q(M)$ (caractère local).

($\alpha\alpha$) Pour toute carte locale (U, χ) de M [3], l'application

$$\varphi \to P(\varphi \circ \chi) \circ \chi^{-1} \qquad (\varphi \in C^q(\chi(U))$$

de $C^q(\chi(U))$ dans $B(\chi(U))$ est un opérateur différentiel d'ordre p sur l'ouvert $\chi(U)$ de $\overline{R^{n+}}$; autrement dit, pour $u \in C^q(M)$, et $x \in U$,

---

[1] En particulier M est paracompacte. On ne suppose pas que M est connexe.

[2] Voir le § 1 de l'exposé n° 1 de ce séminaire [12].

[3] Toutes les cartes locales de M considérées sont de classe C^∞.

$$(1.1) \qquad Pu(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant p} a_\alpha^\chi(x)\, D_\alpha(u \circ \chi^{-1})(\chi(x)) \quad (^4)$$

où, pour chaque multi-indice α $(|\alpha| \leqslant p)$, a_α^χ est une fonction de $B(\chi(U))$.

Un opérateur différentiel P d'ordre p défini sur $C^q(M)$ $(q \geqslant p)$ se prolonge de façon unique en un opérateur ~~différentiel d'ordre~~ p défini sur $C^p(M)$; ce qui permet de faire opérer naturellement un opérateur d'ordre p sur $C^p(M)$, même s'il n'est donné que sur $C^q(M)$ avec $q > p$.

On dira que P <u>est de classe</u> C^m (m entier $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$) s'il applique $C^{m+p}(M)$ dans $C^m(M)$; ceci équivalant à dire que les coefficients a_α^χ sont des fonctions de classe C^m . P est alors continu de $C^{m+p}(M)$ dans $C^m(M)$.

L'ensemble des opérateurs différentiels d'ordre p et de classe C^m sur M est un sous-espace vectoriel (sur R) de $\mathcal{L}(C^{m+p}(M)\ , C^m(M))$ et même un $C^m(M)$-module.

Les opérateurs différentiels considérés sont à coefficients réels ; ils opèrent évidemment aussi sur les fonctions complexes par la relation $P(u + iv) = Pu + i\,Pv$.

1.3. <u>Caractérisation des opérateurs différentiels comme opérateurs locaux</u>. - La propriété $(\alpha\alpha)$ dans la définition 1.2 est, en fait, presque redondante : PEETRE montre, dans [8], que si P est une application de $C^\infty(M)$ dans $C^k(M)$ ayant le caractère local (α), alors, pour chaque ouvert relativement compact V de M , il existe un entier p tel que P coïncide sur V avec un opérateur différentiel d'ordre p et de classe C^k .

Ainsi, en particulier, le seul caractère local de P entraîne que, pour chaque $x \in M$, la forme linéaire $u \to Pu(x)$ sur $C^\infty(M)$ est continue. A partir de cette continuité, la propriété $(\alpha\alpha)$ de P résulte naturellement du caractère local (α) et de la caractérisation des distributions ayant pour support un point.

1.4. - <u>La partie principale d'un opérateur différentiel</u> précise la notion de "termes de plus haut degré" ; elle est introduite par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit P un opérateur différentiel d'ordre $p \geqslant 1$ sur M . Il existe sur M un champs de p-vecteurs (5) symétrique (6) Π , et un seul, tel

---

(4) $\alpha = (\alpha_1\ , \dots , \alpha_n)$; $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$; $D_\alpha f(z) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$.

(5) Voir, par exemple, le n° 1.9 de l'exposé n° 1.

(6) $\Pi_x(\omega_1\ , \dots , \omega_p) = \Pi_x(\omega_{\sigma 1}\ , \dots , \omega_{\sigma p})$ $(x \in M\ ,\ \omega_j \in T_x^*(M)\ ,\ \sigma \in \mathfrak{S}_p)$.

que, pour chaque $w \in C^p(M)$, $v \in C^p(M)$, et chaque $x \in M$, la fonction

$$\alpha \to e^{-\alpha w(x)} P(ve^{\alpha w})(x) - \alpha^p v(x) \Pi_x(d_x w , \dots , d_x w) \quad (7)$$

(α réel ou complexe) soit un polynôme de degré $p - 1$.

De plus, si P est de classe C^k , il en est de même de Π .

Le champs de p-vecteurs Π , ainsi introduit, est appelé la partie principale d'ordre p de P .

COROLLAIRE 1. - Pour chaque $w \in C^p(M)$, $v \in C^p(M)$ et chaque $x \in M$,

$$(1.2) \quad v(x) \Pi_x(d_x w , \dots , d_x w) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{(i\lambda)^p} e^{-i\lambda w(x)} P(ve^{i\lambda w})(x) \quad (\lambda \text{ réel}) .$$

COROLLAIRE 2. - L'application qui à un opérateur différentiel P , d'ordre $p \geqslant 1$, associe sa partie principale Π , d'ordre p , est linéaire ; et, pour que Π soit nulle, il faut et il suffit que P soit de degré $p - 1$.

Vérification sans difficulté à partir de (1.1) : les fonctions a_α^χ , choisies symétriques en α pour $|\alpha| = p$, sont les composantes de Π dans la carte locale (U , χ) (voir aussi, dans le cas $p = 2$, le n° 1.7 ci-dessous).

1.5. Caractérisation des opérateurs différentiels par transformation de Fourier. - Il résulte du théorème 1.4 que, si P est un opérateur différentiel d'ordre p sur M , il a la propriété suivante :

(h_p) Pour chaque $w \in C^\infty(M)$, $v \in C^\infty(M)$ et $x \in M$, la fonction

$$\lambda \to e^{i\lambda w(x)} P(ve^{i\lambda w})(x) \qquad (\lambda \text{ réel})$$

est un polynôme de degré p .

Inversement, par la méthode employée par HÖRMANDER dans l'introduction de [7], on établit que, si P est une application linéaire continue de $C^\infty(M)$ dans $C(M)$, ayant la propriété (h_p) ci-dessus, alors P est un opérateur différentiel d'ordre p .

1.6. Opérateurs différentiels du premier ordre et champs de vecteurs. - Un opérateur différentiel P d'ordre 0 est de la forme $Pu = a.u$ $(u \in C(M))$, où $a \in B(\partial M)$.

---

(7) $d_x w$ désignant la différentielle de w en x .

Si P est un opérateur différentiel d'ordre 1 , sa **partie principale** (n° 1.4) est (identifiée avec) un champs de vecteurs X sur M , et on a, en vertu du théorème 1.4 :

(1.3) $$Pu = \langle du , X\rangle + P1.u \quad (^8) \qquad (u \in C^1(M)) \quad .$$

1.7. - Les opérateurs différentiels du second ordre de classe C^1 admettent l'expression "intrinsèque" suivante :

THÉORÈME. - Soit P un opérateur différentiel du second ordre sur M . On suppose que la partie principale du second ordre Π de P est de classe C^1 , et on désigne par g une métrique riemannienne de classe C^1 sur M . Alors, il existe un champs de vecteurs X , et un seul, sur M tel que, pour tout $u \in C^2(M)$,

(1.4) $$Pu = \mathrm{div}_g(\Pi(du)) + \langle du , X\rangle + P1.u \quad (^9) \quad .$$

De plus, X est de classe C^k , si Π et g sont de classe C^{k+1} et P de classe C^k .

En effet, posant $Qu = \mathrm{div}_g(\Pi(du))$ $(u \in C^2(M))$, on définit un opérateur différentiel Q d'ordre 2 et de classe C^k , si Π et g sont de classe C^{k+1} ; et on a, pour $u \in C^2(M)$, et α complexe,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha u}\, Q(e^{\alpha u}) &= e^{-\alpha u}\, \mathrm{div}_g(\alpha e^{\alpha u}\, \Pi(du)) \\ &= \alpha\, \mathrm{div}_g(\Pi(du)) + \alpha^2 \langle du , \Pi(du)\rangle \quad , \end{aligned}$$

d'après la propriété de dérivation de la divergence (exposé n° 1, n° 2.6, relation (2.11)). Ainsi,

$$e^{-\alpha u}\, Q(e^{\alpha u}) = \alpha^2\, \Pi(du , du) + \alpha\, Qu \quad ;$$

ce qui montre que Π est aussi la partie principale de Q , donc, d'après le corollaire 2 du théorème 1.4, que $P - Q$ est un opérateur différentiel du premier ordre sur $C^2(M)$:

$$Pu - Qu = \langle du , X\rangle + P1.u \qquad (u \in C^2(M)) \quad .$$

C. Q. F. D.

---

(8) $\langle du , X\rangle = X.u$; voir le n° 1.8 de l'exposé n° 1.

(9) div_g désigne l'opérateur de divergence associé à g sur M (voir le n° 2.6 de l'exposé n° 1), et $\Pi(du)$ désigne le champs de vecteurs Z sur M , image de du par l'application de $T^*(M)$ dans $T(M)$ canoniquement associée à Π :

$$\langle \omega , Z_x\rangle = \Pi_x(\omega , d_x u) \qquad \text{pour tout } x \in M \quad \text{et} \quad \omega \in T^*_x(M) \quad .$$

1.8. - Un opérateur semi-elliptique sur M sera ici un opérateur différentiel (n° 1.2) du second ordre P sur M dont la partie principale du second ordre Π est positive (mais éventuellement dégénérée) :

$$(1.5) \qquad \Pi_x(\omega , \omega) \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in M \quad \text{et} \quad \omega \in T_x^*(M) \ .$$

Si, de plus, $P1(x) \leq 0$ pour tout $x \in M$, on dira que P est un opérateur de diffusion.

Ces opérateurs sont caractérisés par le principe du maximum positif local à l'intérieur de M :

THÉORÈME (AISENSTAT). - Soit P un opérateur de diffusion sur la variété M. Alors, pour tout $u \in C^2(M)$ et $x \in M \setminus \partial M$ (10) :

(PML) u admet un maximum relatif ≥ 0 en $x \implies Pu(x) \leq 0$.

Inversement, si A est une application linéaire de $C^p(M)$ $(2 \leq p \leq \infty)$ dans $C(M)$ telle que, pour tout $u \in C^p(M)$ et $x \in M \setminus \partial M$ (10), soit satisfaite la propriété (PML), alors A est un opérateur de diffusion sur M de classe C^0.

La partie directe est élémentaire. La partie inverse est une conséquence immédiate, à cause du caractère local impliqué par le principe du maximum positif local, du résultat établi pour un ouvert de R^n dans l'exposé n° 2 de ce séminaire [12] (voir le corollaire 2 du théorème 1.5) : on obtient d'abord la forme de A à l'intérieur de M, puis on la prolonge au bord par continuité.

Remarque. - On notera précisément que la relation (PML) n'est plus vérifiée, en général, pour $x \in \partial M$. On renvoie, à ce sujet, à l'exposé n° 302 du séminaire Bourbaki [10], où l'on étudie la forme des sous-espaces vectoriels $\mathfrak{U}$ de $C^2(M)$ tels que la relation (PML) soit satisfaite pour $u \in \mathfrak{U}$ et tout $x \in M$ (voir aussi les § 4 et 5 ci-dessous).

1.9. - On appellera enfin opérateur elliptique (resp. opérateur de diffusion elliptique) un opérateur différentiel du second ordre (resp. un opérateur de diffusion) sur M (n° 1.8) de classe C^0 tel que, Π désignant sa partie principale du second ordre (n° 1.4),

$$(1.6) \qquad \Pi_x(\omega , \omega) > 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in M \quad \text{et tout} \quad \omega \in T_x^*(M) , \quad \omega \neq 0 \ .$$

---

(10) Voir la remarque ci-dessous.

Dans ce cas, il existe un métrique riemannienne g sur M, et une seule, telle que Π soit le champs de 2-vecteurs conjugué de g : $\Pi = \check{g}$ **(voir le n° 2.5 de** l'exposé n° 1). On dira que g est la <u>métrique riemannienne conjuguée de</u> Π.

En particulier, si Π est de classe C^1, il en est de même de g et, prenant précisément cette métrique dans le théorème 1.4 ci-dessus, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit P un opérateur elliptique sur M. On suppose que sa partie principale Π est de classe C^1. Alors, il existe un champs de vecteurs de classe C^0 sur M (et un seul) tel que, pour tout $u \in C^2(M)$,

(1.7) $$Pu = \Delta_g u + \langle du , X \rangle + P1.u ,$$

où g désigne la métrique riemannienne sur M conjuguée de Π, et Δ_g l'opérateur de Laplace-Beltrami de g ([11]).

Quand P est donné par l'expression (1.5), on dit couramment que P est mis <u>sous forme variationnelle</u>.

Parmi les opérateurs elliptiques sur M, les opérateurs de Laplace-Beltrami peuvent être caractérisés comme auto-adjoints :

COROLLAIRE. - Soient P un opérateur elliptique sur M de classe C^1, et g la métrique riemannienne sur M conjuguée de la partie principale de P. Pour que $P = \Delta_g$, il faut et il suffit que,

(1.8) $$P1 = 0 ,$$

(1.9) $$\int_M (u\, Pv - v\, Pu)\, d\tau_g = 0 \quad ([12])$$

pour tout couple u, v de fonctions de $C^2(M)$ à supports compacts disjoints de ∂M.

(Vérification sans difficulté au moyen de la formule de Green ; voir le § 3 de l'exposé n° 1 et l'exposé n° 5.)

§ 2. Opérateurs intégraux singuliers de Levy sur une variété.

Dans ce deuxième paragraphe, on décrit (n° 2.4 à 2.10) le type d'opérateur intégral singulier d'ordre inférieur à 2 sur la variété M, qui, ajouté à un opéra-

---

([11]) Voir le n° 3.3 de l'exposé n° 1 de ce séminaire.

([12]) τ_g désignant la mesure riemannienne associée à g (exposé n° 1, n° 2.2).

teur différentiel de diffusion (n° 1.8), donne la forme générale du générateur infinitésimal $(\mathcal{D}_A , A)$ d'un semi-groupe de Feller sur M, lorsque $\mathcal{D}_A$ contient suffisamment de fonctions de classe C^2 (voir les § 3 et 5 ci-dessous).

2.1. - Avec les notations introduites au n° 1.1 ([13]), on désigne, pour m entier $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$, par $C_k^m(M)$ (resp. $C_k^m(K)$, K compact de M) le sous-espace vectoriel de $C^m(M)$ formé des fonctions à support compact (resp. à support contenu dans K). On munit, une fois pour toute, $C_k^m(K)$ (K compact de M) de la topologie induite par celle de $C^m(M)$, et $C_k^m(M)$ de la topologie limite inductive des $C_k^m(K)$.

2.2. Opérateurs intégraux singuliers de Levy sur un ouvert de $\overline{R^{n+}}$. - A titre de complément aux résultats obtenus dans l'exposé n° 2 de ce séminaire [12], on notera que, si l'on désigne par Ω un ouvert de $\overline{R^{n+}}$ ([14]) (et non plus seulement de R^n) subsistent sans aucune modification :

- les définitions et notations du n° 1.0,
- la définition d'une fonction unité locale sur Ω (n° 1.1),
- la définition sur Ω d'un noyau singulier, d'un noyau singulier de classe C^0, borné à l'infini (n° 1.4),
- les arguments développés aux n° 2.1, 2.6, 2.7 et 2.8 qui conduisent à l'extension suivante du théorème 1.4 de l'exposé n° 2 :

THÉORÈME. - Soient Ω un ouvert de $\overline{R^{n+}}$, N un noyau singulier sur Ω, γ et γ^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ des fonctions de $B(\Omega)$, et σ une fonction unité locale sur Ω. Pour chaque $f \in C_k^2(\Omega)$ et $x \in \Omega$, on pose,

$$(2.1) \quad Sf(x) = \gamma(x)\, f(x) + \sum_{k=1}^{n} \gamma^k(x)\, D_k f(x) + \int_\Omega N(x\,,\, dy)[f(y) - \sigma_x(y)(f(x) + \sum_{k=1}^{n} D_k f(x)(y^k - x^k))] \;.$$

Alors :

(1) $f \to Sf$ est une application linéaire continue de $C_k^2(\Omega)$ dans $B(\Omega)$.

(2) Pour que S applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, il faut et il suffit que les coefficients γ, γ^k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ soient continus et que N soit de classe C^0 sur Ω.

([13]) On ne suppose pas ici que $\partial M = \emptyset$.

([14]) Voir le n° 1.1 de l'exposé n° 1.

(3) Si, de plus, N est borné à l'infini, et si,

$$\gamma(x) + \int_\Omega N(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y)) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in \Omega \ , \tag{2.2}$$

S satisfait au principe du maximum positif à l'intérieur de Ω :

$$\text{pour} \quad x \in \Omega \setminus \partial\Omega \ \ ({}^{15}) \ ,$$
$$f \in C_k^2(\Omega) \quad \text{et} \quad f(x) = \sup f \geqslant 0 \implies Sf(x) \leqslant 0 \quad ({}^{16}) \ . \tag{2.3}$$

Un opérateur de la forme (2.1) pour lequel est satisfaite la relation (2.2) sera appelé opérateur (intégral singulier) de Levy sur Ω . On dira que S est de classe C^0 si S applique $C_k^2(\Omega)$ dans $C(\Omega)$. Ces notions sont invariantes par difféomorphisme (voir l'exposé n° 2, remarque (β) du n° 1.4).

2.3. - On appellera fonction unité locale sur M , toute application σ de $M \times M$ dans $[0\ ,\ 1]$ telle que,

(i) σ est de classe C^∞ sur $M \times M$ et $\sigma(x\ ,\ y) = 1$ dans un voisinage de la diagonale de $M \times M$,

(ii) Pour chaque compact K de M , les fonctions $\sigma_x = \sigma(x\ ,\ .)$ $(x \in K)$ gardent leurs supports dans un compact fixe.

On peut construire comme suit une fonction unité locale sur M : Soient (U_α) et (V_α) deux recouvrements ouverts localement finis de M par des ouverts relativement compacts tels que $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ pour tout α (17). On considère le recouvrement de $M \times M$ formé des ouverts $U_\alpha \times U_\alpha$ et $W = M \times M \setminus \bigcup_\alpha \overline{V_\alpha} \times \overline{V_\alpha}$, et une partition de l'unité $\{(\sigma_\alpha)\ ,\ \rho\}$ de classe C^∞ de M subordonnée à ce recouvrement :

$$\operatorname{supp} \sigma_\alpha \subset U_\alpha \times U_\alpha \ , \quad \operatorname{supp} \rho \subset W \ , \quad 0 \leqslant \sigma_\alpha \leqslant 1 \ , \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_\alpha \sigma_\alpha + \rho = 1 \ .$$

La fonction $\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha$ est alors une fonction unité locale sur M .

On notera que l'on peut construire ainsi une fonction unité locale ayant son support dans un voisinage arbitrairement petit de la diagonale de $M \times M$. En outre, lorsque M est compacte, la fonction constante égale à 1 est une fonction unité locale.

---

(15) $\partial\Omega = \Omega \cap R_0^n$ désignant le bord de Ω considéré comme variété à bord.

(16) Sauf si Ω est un ouvert de R^n $(\partial\Omega = \emptyset)$, la relation (2.3) n'est plus satisfaite, en général, pour $x \in \partial\Omega$. Voir à ce sujet les § 3 et 5.

(17) La paracompacité de M en assure l'existence.

2.4. Opérateurs intégraux singuliers de Levy sur la variété M. - On appellera noyau singulier de Levy [18] [resp. noyau singulier de Levy de classe C^0] sur M, tout noyau $\geqslant 0$ borélien $s(x, dy)$ sur M tel que,

(NS_1) Pour tout $x \in M$, $s(x, \{x\}) = 0$, et $s(x, .)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur l'espace localement compact $M \setminus \{x\}$;

(NS_2) [resp. (NS_2')] Pour toute carte locale (U, χ) de M et toute fonction $f \in C_k(M)$ positive et à support dans U, la fonction

$$x \to \int_U s(x, dy) |\chi(y) - \chi(x)|^2 f(y)$$

est borélienne et localement bornée [resp. finie et continue] [19] sur U ;

(NS_3) [resp. (NS_3')] Pour toute fonction unité locale σ sur M (n° 2.3) et toute fonction positive f de $C_k(M)$, la fonction

$$x \to \int_M s(x, dy)(1 - \sigma(x, y)) f(y)$$

est borélienne et localement bornée [resp. finie et continue] sur M.

On donnera dans l'exposé n° 4 (n° I.8) des conditions suffisantes pour qu'un noyau singulier sur M soit de classe C^0 (même de classe $C^{0,\lambda}$).

Un opérateur (intégral singulier) de Levy [20] sur M est alors une application linéaire S de $C_k^2(M)$ dans $B(M)$ telle que,

(S_1) Il existe un noyau singulier de Levy s sur M pour lequel,

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{Pour chaque } x \in M \text{ et chaque } u \in C_k^2(M), \\ \qquad Su(x) = \int_M s(x, dy)\, u(y) \quad \text{dès que} \quad x \notin \operatorname{supp} u ; \end{cases}$$

(S_2) Pour chaque carte locale (U, χ) de M, l'application

$$\varphi \to S(\varphi \circ \chi) \circ \chi^{-1} \qquad (\varphi \in C_k^2(\chi(U)))$$

de $C_k^2(\chi(U))$ dans $B(\chi(U))$ est un opérateur intégral singulier de Levy sur l'ouvert $\chi(U)$ de $\overline{R^{n+}}$ (n° 2.2) ;

(S_3) $Su(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in M$ et toute fonction $u \in C_k^2(M)$ comprise entre 0 et 1 et égale à 1 au voisinage de x.

---

[18] Par référence aux mesures de Levy qui figurent dans la formule de Levy-Khinčin comme cas particulier de ces noyaux.

[19] Autrement dit, le noyau sur $\chi(U)$ transporté par χ du noyau induit par s sur U est un noyau singulier de Levy [resp. un noyau singulier de Levy de classe C^0] sur $\chi(U)$ (n° 2.2).

[20] On dira aussi simplement "opérateur de Levy".

Le noyau s, qui est entièrement déterminé par S, à cause de (2.4) et (NS_1), sera appelé le noyau singulier de S.

L'ensemble des opérateurs de Levy et l'ensemble des noyaux singuliers de Levy sur M constituent naturellement les cônes convexes, et l'application $S \to s$ qui à un opérateur de Levy sur M associe son noyau singulier est additive et positivement homogène. Au n° 2.7, on donnera aux opérateurs de Levy une forme plus globale, et on obtiendra ainsi une propriété de surjectivité de l'application $S \to s$. Au préalable :

2.5. THÉORÈME. - Tout opérateur de Levy S sur M est continu de $C_k^2(M)$ dans $B(M)$ [21].

En effet, au moyen d'une partition de l'unité, on se ramène d'abord à montrer que si K et K' sont des compacts de M contenus dans des cartes locales (U, χ) et (U', χ'), et si (u_n) est une suite de fonctions de $C_k^2(K)$ tendant vers 0 (dans $C_k^2(K)$), la suite $(Su_n(x))$ tend vers 0, uniformément lorsque x décrit K'. Or, désignant par $\{\varphi, \varphi'\}$ une partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement $\{M \setminus K', U'\}$, on peut écrire, pour $x \in K'$,

$$\begin{aligned} Su_n(x) &= S(u_n \varphi')(x) + S(u_n \varphi)(x) \\ &= S(u_n \varphi')(x) + \int_M s(x, dy)\, u_n \varphi(y) \quad , \end{aligned}$$

puisque $x \notin \operatorname{supp} u_n \varphi$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que le premier terme tend vers 0 par localisation sur la carte (U', χ') en vertu de la continuité en question déjà établie sur l'ouvert $\chi'(U')$ de $\overline{R^{n+}}$ dans le théorème 2.2 (elle résulte aussi facilement de la propriété (NS_2) de s (n° 2.4), en utilisant un développement de Taylor avec reste sous forme intégrale). Le second terme tendant vers 0 d'après la propriété (NS_3) de S, le théorème est établi.

2.6. Expression d'un opérateur intégral singulier de Levy au moyen d'un développement de Taylor à l'ordre 1 "global". - Reprenant la construction d'une fonction unité locale donnée au n° 2.3, on suppose que, sur chaque ouvert U_α, est définie une carte locale χ_α de M, et on pose, pour chaque $u \in C^1(M)$, $x \in M$, $y \in M$,

$$\theta_x u(y) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x, y)\Big[u(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)(\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x))\Big] \quad . \tag{2.5}$$

---

[21] Pour les topologies précisées aux n° 1.1 et 2.1 ci-dessus.

L'application $(x , y , u) \to \theta_x u(y)$ ainsi définie sera appelée un <u>développement de Taylor (à l'ordre 1) global sur</u> M . Elle possède les propriétés suivantes :

(T_1) Pour chaque $x \in M$, $u \to \theta_x u$ est une application linéaire continue de $C^1(M)$ dans $C_k(M)$, et $\theta_x u$ ne dépend que de $u(x)$ et $d_x u$.

(T_2) La fonction $(x , y) \to \theta_x 1(y)$ est une fonction unité locale sur M (n° 2.3) .

(T_3) Pour chaque $u \in C^2(M)$, la fonction $(x , y) \to \theta_x u(y)$ est continue, et, pour chaque compact K de M , il existe une constante $C(K , u) \geqslant 0$ telle que,

$$|u(y) - \theta_x u(y)| \leqslant (1 - \theta_x 1(y))|u(y)| + C(K , u) \sum_\alpha \sigma_\alpha(x , y)|\chi_\alpha(y) - \chi_\alpha(x)|^2$$

pour tout $x \in K$ et $y \in M$. (En effet, il suffit d'écrire

$$u(y) = (1 - \theta_x 1(y))\, u(y) + \theta_x 1(y)\, u(y) ,$$

et de majorer le terme $u(y) - u(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)(\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x))$ par

$$Cte \times |\chi_\alpha(y) - \chi_\alpha(x)|^2 \text{ .)}$$

On peut alors énoncer :

THÉORÈME. - On suppose donnés sur M un développement de Taylor à l'ordre 1 global θ , et :

- un noyau singulier de Levy s ,
- un champs de vecteurs X borélien et localement borné [22],
- une fonction $a \in B(M)$, de telle sorte que,

(2.6) $$a(x) + \int_M s(x , dy)(1 - \theta_x 1(y)) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } x \in M .$$

Alors :

(1) On définit un opérateur de Levy S sur M en posant, pour $u \in C_k^2(M)$ et $x \in M$,

---

([22]) Autrement dit (n° 1.2 et 1.6), X définit un opérateur différentiel du premier ordre homogène.

$$(2.7)\qquad Su(x) = a(x)\, u(x) + \langle d_x u \,,\, X_x\rangle + \int_M s(x\,,\,dy)(u(y) - \theta_x\, u(y)) \qquad [23]\ ;$$

(2) Pour que S applique $C_k^2(M)$ dans $C(M)$, **il faut et il suffit que** a , X et s soient de classe C^0 (on dira alors que S est de classe C^0) ;

(3) Tout opérateur de Levy sur M peut être obtenu ainsi, et ceci d'une seule manière quand θ est fixé : s est déterminé par (2.4) (n° 2.4), et a par

$$(2.8)\qquad a(x) = S(\theta_x\, 1)(x) \qquad (x \in M)\ .$$

COROLLAIRE 1. - Si la variété M est compacte, tout noyau singulier de Levy de classe C^0 sur M est le noyau singulier d'un opérateur de Levy sur M appliquant $C^2(M)$ dans $C(M)$.

(En effet, la fonction $x \to \int_M s(x\,,\,dy)(1 - \theta_x\, 1(y))$ est alors continue sur M d'après $(NS_3^!)$ (n° 2.4), et on peut prendre pour a l'opposé de cette fonction.)

COROLLAIRE 2. - Tout opérateur de Levy S sur M satisfait au principe du maximum à l'intérieur de M : pour $x \in M \setminus \partial M$,

$$f \in C_k^2(M) \quad \text{et} \quad f(x) = \sup f \geqslant 0 \implies Sf(x) \leqslant 0\ .$$

2.7. Démonstration du théorème 2.5.

(α) En vertu des propriétés (NS_2) et (NS_3) de s et de la propriété (T_3) de θ , S applique $C_k^2(M)$ dans $B(M)$. D'autre part, la relation (2.4) est évidemment satisfaite ainsi que, en vertu de (2.6), la propriété (S_1). Pour établir (1), il reste donc à montrer que S possède aussi la propriété (S_2). Pour cela, soient (U, χ) une carte locale de M et $u \in C_k^2(M)$ à support dans U . Désignant par $\tilde\sigma$ une fonction unité locale sur U [24], on a, pour $x \in U$,

$$S_1\, u(x) = \int_M s(x\,,\,dy)(u(y) - \theta_x\, u(y))$$

$$= - \int_M s(x\,,dy)(1-\tilde\sigma(x\,,y))\,\theta_x u(y) + \int_U s(x\,,dy)(u(y)-\tilde\sigma(x\,,y)\,\theta_x u(y))\ .$$

En vertu de la propriété (NS_3) de s , le premier terme est de la forme

$$a'(x)\, u(x) + \langle d_x u \,,\, X'_x\rangle\ .$$

---

[23] Cette intégrale a un sens en vertu des propriétés (T_3) de θ , (NS_2) et (NS_3) de s .

[24] U étant considéré comme sous-variété à bord de M , il existe une telle fonction $\tilde\sigma$ d'après le n° 2.3 ; en outre, pour chaque $x \in U$, $\tilde\sigma_x$ se prolonge en une fonction de $C_k^\infty(M)$ à support dans U .

Le second s'écrit, en posant

$\tilde{\sigma}_\alpha(x , y) = \tilde{\sigma}(x , y)\, \sigma_\alpha(x , y)$ et $\hat{\sigma}(x , y) = \sum_\alpha \tilde{\sigma}_\alpha(x , y)$ $(x \in U , y \in U)$,

$$\int_U s(x , dy)[u(y) - \sum_\alpha \tilde{\sigma}_\alpha(x , y)(u(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)(\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x)))]$$

$$= \langle d_x u , X_x'' \rangle + \int_U s(x , dy)[u(y) - \hat{\sigma}(x , y)(u(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)(\chi^j(y) - \chi^j(x)))]$$

(Il suffit de substituer à $\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x)$ son développement de Taylor

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \chi_\alpha^k}{\partial \chi^j}(x)(\chi^j(y) - \chi^j(x)) + \beta_\alpha^k(x , y)|\chi(y) - \chi(x)|^2 ,$$

où β_α^k est borélienne et localement bornée sur $U \times U$, et d'utiliser la propriété (NS_2) pour "sortir" les termes en $\frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)$.)

Finalement, on obtient, pour $x \in U$, $Su(x)$ sous la forme,

$$Su(x) = a'''(x)\, u(x) + \langle d_x u , X_x''' \rangle$$
$$+ \int_U s(x , dy)[u(y) - \hat{\sigma}(x , y)(u(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x)(\chi^j(y) - \chi^j(x)))] ,$$

où $a''' = a + a'$ est une fonction de $B(U)$, X''' un champs de vecteurs borélien localement borné, et $\hat{\sigma}$ une fonction unité locale sur U .

Enfin, en considérant, pour chaque $x \in U$, une suite (u_n) croissant vers 1 de fonctions positives de $C_k^2(U)$ toutes égales à 1 au voisinage de x , on déduit de (S_3) déjà établie pour S que

$$a'''(x) + \int_U s(x , dy)(1 - \hat{\sigma}(x , y)) \leq 0 .$$

D'où (S_2), et la propriété (1).

(β) Afin d'établir la propriété (3), on considère un opérateur de Levy S sur M , on désigne par s son noyau singulier, et on pose, pour $x \in M$,

$$a(x) = S(\theta_x 1)(x) ,$$

et pour $u \in C_k^2(M)$,

$$S'u(x) = a(x)\, u(x) + \int_M s(x , dy)(u(y) - \theta_x u(y)) .$$

Il suffit de montrer que $a \in B(M)$ et satisfait (2.6) : en effet, S' sera alors, d'après la propriété (1) déjà établie, un opérateur de Lévy sur M ayant même noyau singulier que S ; donc, d'après (S_2), $S - S'$ sera un opérateur différentiel du premier ordre, donc un champs de vecteurs, puisque

$$(S - S')\,1(x) = (S - S')\,\theta_x\,1(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in M \ .$$

Pour montrer que $a \in B(M)$, on peut utiliser le fait que S est continu de $C_k^2(M)$ dans $B(M)$ (théorème 2.5) : a est d'abord bornée dans un voisinage de chaque point x_0 de M ainsi qu'on le voit en écrivant

$$a(x) = S(\theta_x\,1 - \theta_{x_0}\,1)(x) + S(\theta_{x_0}\,1)(x) - S(\theta_{x_0}\,1)(x_0) \ .$$

a est ensuite borélienne, car, pour chaque $x \in M$, on a

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{q=0}^{\infty} 1_{U_q^n}(x)\; S(\theta_{x_q^n}\,1)(x) \ ,$$

où, pour chaque entier $n \geqslant 0$, $(U_q^n)_{q\geqslant 0}$ est une partition borélienne de M telle que le diamètre [25] de U_q^n $(q \geqslant 0)$ soit moindre que $\frac{1}{n}$, et où $x_q^n \in U_q^n$ pour chaque $q \geqslant 0$. [Cette relation résulte de ce que l'application $y \to S(\theta_y\,1)(x)$ est continue pour chaque $x \in M$, comme composée de $y \to \theta_y\,1$, continue de M dans $C_k^2(M)$ et de S.]

Enfin, la relation (2.6) résulte de (S_3) en considérant une suite (u_n) croissant vers 1 comme ci-dessus, et en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation

$$\begin{aligned} 0 \geqslant Su_n(x) &= S(\theta_x\,1)(x) + S(u_n - \theta_x\,1)(x) \\ &= a(x) + \int_M s(x\,,\,dy)(u_n(x) - \theta_x\,1(x)) \ . \end{aligned}$$

(γ) Si a, X et s sont de classe C^0, S applique $C_k^2(M)$ dans $C(M)$: En effet, soient $u \in C_k^2(M)$, V un ouvert relativement compact de M, et F l'ensemble <u>fini</u> des indices α tels que $\sigma_\alpha(x\,,\,\cdot) \neq 0$ (n° 2.3 et 2.6) pour tout $x \in V$. On a, pour $x \in V$,

$$(2.9)\quad S_1\,u(x) = \int_M s(x\,,\,dy)(u(y) - \theta_x\,u(y)) = \int_M s(x\,,\,dy)(1 - \theta_x\,1(y))\,u(y)$$
$$+ \sum_{\alpha\in F} \int_M s(x\,,\,dy)\,\sigma_\alpha(x\,,\,y)\Big[u(y) - u(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \chi_\alpha^k}(x)(\chi_\alpha^k(y) - \chi_\alpha^k(x))\Big] \ .$$

([25]) Pour une distance compatible avec la topologie de M.

Au second membre, d'une part le premier terme est fonction continue de x à cause de la propriété (NS_3) de s (n° 2.4).

D'autre part, pour chaque $\alpha \in F$, le terme correspondant figurant dans la somme, constituant le second terme, est aussi fonction continue de x sur $U_\alpha \cap V$: cela résulte, de $(NS_2^!)$, du théorème 2.2 et du lemme 2.7 de l'exposé n° 2, par transport sur l'ouvert $\chi_\alpha(U_\alpha)$ au moyen de χ_α, en remarquant que l'intégrale ne dépend que des valeurs de u sur le support de $\sigma_\alpha(x\ ,\ .)$ qui est un compact de U_α.

D'où la continuité de Su, puisque $Su - S_1 u = au + \langle du\ ,\ X\rangle$ est continue si a et X sont de classe C^0.

(δ) Inversement, supposant que S applique $C_k^2(M)$ dans $C(M)$, on montre d'abord que le noyau singulier s est de classe C^0 : en effet, pour ce qui est de $(NS_2^!)$, il suffit de remarquer que l'opérateur transporté de S sur une carte locale $(U\ ,\ \chi)$ applique $C_k^2(\chi(U))$ dans $C(\chi(U))$, donc est de classe C^0 d'après le théorème 2.2.

Pour ce qui est de $(NS_3^!)$, on montre d'abord que la fonction

$$x \rightarrow \int_M s(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y))\ f(y)$$

est continue pour tout $f \in C_k^2(M)$ [il suffit de remarquer que

$$\int_M s(x\ ,\ dy)(1 - \sigma_x(y))\ f(y) = S((1 - \sigma_x)f)(x) \quad ,$$

et d'utiliser la continuité de $x \rightarrow (1 - \sigma_x)f$ de M dans $C_k^2(M)$ et de S de $C_k^2(M)$ dans $C(M)$ (n° 2.5)]. On passe ensuite au cas où $f \in C_k(M)$, en approchant f uniformément par une suite de fonctions de $C_k^2(M)$ gardant leurs supports dans un compact fixe, et en utilisant le caractère positif de s.

Ayant ainsi établi que s est de classe C^0, l'opérateur S' (défini par (2.9)) applique $C_k^2(M)$ dans $C(M)$ d'après (γ) ci-dessus. Il en est donc de même de $u \rightarrow (S - S')u = au + \langle du\ ,\ X\rangle$; d'où la classe C^0 de a et X, la propriété (2) et le théorème 2.6.

2.8. - Le symbole principal d'ordre 2 d'un opérateur de Levy est nul [26].

THÉORÈME. - Soit S un opérateur de Levy sur M (n° 2.4).

---

[26] Voir le numéro suivant.

Pour tout $u \in C_k^2(M)$, $w \in C^2(M)$, et tout $x \in M$,

(2.10) $$\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda^2} e^{-i\lambda w(x)} S(ue^{i\lambda w})(x) = 0 \quad ([27]) .$$

En effet, en considérant une carte locale de M au voisinage de x , d'après la propriété (NS_3) du noyau singulier s de S et la propriété (S_2) de localisation de S , on est ramené à établir (2.10) lorsque M est un ouvert Ω de $\overline{R^{n+}}$.

Or, pour $f \in C_k^2(\Omega)$, d'après la formule de Taylor avec reste sous forme intégrale, et la forme (2.1) de S (n° 2.2), on a, en désignant par σ une fonction unité locale sur Ω ,

(2.11) $$Sf(x) = \gamma(x)\, f(x) + \sum_k \gamma^k(x)\, D_k\, f(x) + \int_\Omega s(x\,,\,dy)(1-\sigma(x\,,\,y))\, f(y)$$
$$+ \sum_{j,k=1} \int_\Omega s(x\,,dy)\,\sigma(x\,,y)(y^j-x^j)(y^k-x^k)\int_0^1 (1-t)\,D_j\,D_k f(x+t(y-x))\,dt\,.$$

Et, en posant $f = ue^{i\lambda w}$ dans (2.11), on obtient, pour η réel > 1 (en particulier pour $\eta = 2$ ([28])), une relation de la forme :

(2.12) $$\frac{1}{\lambda^\eta} e^{-i\lambda w(x)} S(ue^{i\lambda w})(x) = \Phi_\sigma^\lambda(x)$$
$$- \lambda^{2-\eta} \sum_{j,k=1}^n \int_\Omega s(x\,,\,dy)\,\sigma(x\,,\,y)(y^j-x^j)(y^k-x^k)\, v_{j,k}^\lambda(x\,,\,y)\quad ,$$

où $v_{j,k}^\lambda(x\,,\,y) = \int_0^1 (1-t)u\, D_j\, w\, D_k\, w(x+t(y-x))\, e^{i\lambda[w(x+t(y-x))-w(x)]}\, dt$ est borné indépendamment de λ , et où, en vertu des propriétés (NS_1) et (NS_2), $\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_\sigma^\lambda(x) = 0$, pour chaque fonction unité locale σ .

Etant donnée alors $\varepsilon > 0$, on choisit d'abord une fonction unité locale σ_ε telle que $\sigma_\varepsilon(x\,,\,.)$ ait son support assez serré autour de x pour que

$$\int_\Omega s(x\,,\,dy)\,\sigma_\varepsilon(x\,,\,y)(y^j-x^j)(y^k-x^k)\, v_{j,k}^\lambda(x\,,\,y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2n^2}$$

pour $1 \leqslant j$, $k \leqslant n$ (ceci est possible d'après les propriétés (NS_2) et

$$s(x\,,\,\{x\}) = 0$$

de s). On choisit ensuite λ_ε assez grand pour que $|\Phi_{\sigma_\varepsilon}^\lambda(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$.

([27]) On étend canoniquement S aux fonctions complexes.

([28]) Voir le numéro suivant.

D'où la relation (2.10) cherchée, en prenant $\eta = 2$ dans (2.12).

C. Q. F. D.

2.9. - Si Λ est une application linéaire de $C_k^\infty(M)$ dans $B(M)$, et si η est un nombre réel, on dira que Λ <u>est d'ordre</u> η si, pour tout $\eta' > \eta$, tout $u \in C_k^\infty(M)$, $w \in C^\infty(M)$, et $x \in M$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda^{\eta'}} e^{-i\lambda w(x)} \Lambda(ue^{i\lambda w})(x) = 0 \quad . \tag{2.13}$$

Par exemple, si $\Lambda = P$ est un opérateur différentiel d'ordre p sur M (n° 1.2), Λ est d'ordre p au sens précédent d'après le théorème 1.4.

Ainsi le théorème 2.7 ci-dessus entraîne qu'un opérateur de Levy Λ sur M est d'ordre 2 ; mais ce théorème exprime davantage ; en effet,

- d'une part, la relation (2.13) est vérifiée non seulement pour $\eta' > 2$, mais aussi pour $\eta' = 2$;
- d'autre part, il existe des opérateurs de Levy qui ne sont d'ordre η pour aucun $\eta < 2$, ainsi que le montre l'exemple suivant :

$$M = R \quad (n = 1) \; , \qquad \int_R s(x\, ,\, dy)\, f(y) = \int_0^1 \varphi(\rho)\, d\rho \int_R \frac{f(y)}{|x-y|^{2+\rho}}\, dy$$

($f \in C_k^2(R)$, $x \notin \operatorname{supp} f$) où φ est une fonction numérique borélienne ≥ 0 sur $[0\, ,\, 1[$ telle que $\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{1-\rho}\, d\rho < +\infty$ (il suffit de reprendre la relation (2.12) (n° 2.7) et de vérifier que, pour $\eta < 2$, on peut choisir u et w de sorte que le deuxième terme du second membre tende vers $+\infty$ avec λ).

Utilisant le langage de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (voir à ce sujet HÖRMANDER [7]) on peut dire que, pour un tel opérateur de Levy, le symbole principal d'ordre 2 est nul.

Par contre, dans l'exposé n° 4, les opérateurs de Levy qui interviendront (n°I.7) seront d'ordre < 2 (voir aussi le n° 2.10 ci-dessous).

2.10. <u>Opérateurs de Levy d'ordre</u> 1 . - On dira qu'un noyau singulier de Levy sur M est d'ordre 1 s'il vérifie aussi :

(NS_2^1) Pour toute carte locale $(U\, ,\, \chi)$ de M, et toute fonction $f \in C_k(M)$ positive et à support dans U, la fonction

$$x \rightarrow \int_U s(x\, ,\, dy)\, |\chi(y) - \chi(x)|\, f(y)$$

est borélienne et localement bornée sur U .

Si s est un noyau singulier de Levy d'ordre 1, si σ est une fonction unité locale sur M (n° 2.3), et si a est une fonction de $B(M)$ telle que,

$$(2.14) \qquad a(x) + \int_M s(x\,,\,dy)(1 - \sigma(x\,,\,y)) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in M \;,$$

on définit un opérateur de Levy sur M en posant

$$(2.15) \quad Su(x) = a(x)\,u(x) + \int_M s(x\,,\,dy)(u(y) - \sigma(x\,,\,y)\,u(x)) \quad (x \in M\,,\,u \in C_k^2(M)) \,.$$

Un tel opérateur sera appelé <u>opérateur de Levy d'ordre</u> 1. Il se prolonge (de façon unique) par la relation (2.15) en une application linéaire continue de $C_k^1(M)$ dans $B(M)$.

§ 3. Générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller sur une variété sans bord et opérateurs de Waldenfels.

Dans tout ce paragraphe ([29]), on suppose que la variété M est <u>sans bord</u> ($\partial M = \emptyset$).

3.1. <u>Opérateurs de diffusion et opérateurs de Levy de classe semi-continue</u>. - On dira qu'un opérateur de diffusion P sur M (n° 1.8) est <u>de classe semi-continue</u> si la fonction $P1$ est continue sur M et si, Π désignant la partie principale d'ordre 2 de P (n° 1.4),

(DS) La fonction $\Pi(\omega\,,\,\omega)$ $(x \to \Pi_x(\omega_x\,,\,\omega_x))$ est semi-continue supérieurement sur M pour toute 1-forme différentielle ω ([30]) de classe C^0 sur M.

On notera que, lorsque M est un ouvert de R^n, cette notion coïncide avec celle introduite au n° 1.3 de l'exposé n° 2.

On dira qu'un noyau singulier de Levy s sur M (n° 2.4) est <u>de classe semi-continue</u> s'il possède la propriété (NS_3') ainsi que,

(NS_2'') Pour toute carte locale $(U\,,\,\chi)$ de M, il existe une fonction ν positive et semi-continue supérieurement sur U telle que, pour toute fonction $f \in C_k(M)$ à support dans U, la fonction

$$x \to \int_U s(x\,,\,dy)\,|\chi(y) - \chi(x)|^2\,f(y) + \nu(x)\,f(x)$$

soit continue sur U.

Lorsque M est un ouvert de R^n, cette définition coïncide avec celle donnée au n° 1.4 de l'exposé n° 2. La propriété (NS_2'') revient d'ailleurs à dire que, pour

---

([29]) Avec la signification attribuée à M au n° 1.1.

([30]) Voir le n° 1.8 de l'exposé n° 1.

chaque carte locale (U , χ) de M, le noyau singulier sur $\chi(U)$ transporté par χ de la restriction de s à U est de classe semi-continue : l'invariance par difféomorphisme qu'énonce le lemme 1.4 de l'exposé n° 2 rend cohérente cette définition.

On dira qu'un opérateur de Levy S sur M (n° 2.4) est <u>de classe semi-continue</u>, si son noyau singulier est de classe semi-continue et si,

(S_4) La fonction $x \to S(\sigma_x)(x)$ est continue sur M pour toute fonction unité locale σ sur M.

Tout opérateur de diffusion (resp. de Levy) de classe C^0 est de classe semi-continue.

Les notions d'opérateurs de diffusion et d'opérateur de Levy de classe semi-continue sont liées par le théorème suivant, qui étend le corollaire 4 du théorème 1.5 de l'exposé n° 2 :

LEMME. - Pour qu'un opérateur de Levy S sur M soit de classe semi-continue, il faut et il suffit qu'il existe un opérateur de diffusion P sur M de classe semi-continue tel que l'opérateur $P + S$ applique $C_k^2(M)$ dans $C(M)$.

On peut établir ce résultat comme suit : Pour montrer que la condition est suffisante, supposant que $P + S$ applique $C_k^2(M)$ dans $C(M)$, on remarque d'abord que, si (U , χ) est une carte locale de M, $P + S$ induit sur l'ouvert $\chi(U)$ de R^n un opérateur presque positif appliquant $C_k^2(\chi(U))$ dans $C(\chi(U))$. D'où on déduit la propriété (NS_2'') du noyau singulier s de S, en vertu du corollaire 4 du théorème 1.5 de l'exposé n° 2 (n° 1.5). Par ailleurs, la propriété (NS_3') de s résulte, par l'argument standard utilisé au n° 2.7 [31], de la relation

$$\int_M s(x , dy)(1 - \sigma_x(y)) f(y) = (P + S)((1 - \sigma_x)f)(x) \qquad (f \in C_k^2(M)) .$$

Inversement, pour montrer que la condition est nécessaire, on construit P localement en se ramenant, au moyen d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par des cartes locales, au cas, déjà élucidé, d'un ouvert de R^n.

C. Q. F. D.

3.2. - Ceci étant, on appellera <u>opérateur de Waldenfels sur la variété (sans bord)</u> M, toute application linéaire W de $C_k^2(M)$ <u>dans</u> $C(M)$ de la forme

---

(31) Voir aussi la démonstration du théorème 3.3 au n° 3.4.

$W = P + S$, où P est un opérateur de diffusion de classe semi-continue, et S un opérateur de Levy aussi de classe semi-continue sur M (n° 3.1).

Un tel opérateur est continu de $C_k^2(M)$ dans $C(M)$ (théorème 2.5). De plus :

LEMME. - Si $W = P + S$ est un opérateur de Waldenfels sur M , la partie principale d'ordre 2 , Π , de P , et le noyau singulier s de S , sont entièrement déterminés par W par les relations :

(3.1) $$\Pi_x(d_x v , d_x v) = \lim_{\lambda\to+\infty} -\frac{1}{\lambda^2} e^{-i\lambda v(x)} W(ue^{i\lambda v})(x)$$

pour tout $x \in M$, $v \in C^2(M)$, et $u \in C_k^2(M)$ tel que $u(x) = 1$.

(3.2) $$\int_M s(x , dy) u(y) = Wu(x)$$

pour tout $x \in M$ et $u \in C_k^2(M)$ tel que $x \notin \operatorname{supp} u$.

(Démonstration immédiate à partir des théorèmes 1.4 et 2.8 ci-dessous.)

Π et s seront appelés respectivement la partie principale et le noyau singulier de W .

On renvoie au n° 1.6 de l'exposé n° 2 relativement aux irrégularités auxquelles donne lieu la décomposition $W = P + S$.

Un opérateur de Waldenfels W pouvant être mis sous la forme $P + S$, où P et S sont de classe C^0 , sera appelé régulièrement décomposable ou seulement décomposable.

3.3. - L'introduction des opérateurs de Waldenfels est justifiée par l'extension suivante du théorème 1.5 de l'exposé n° 2 :

THÉORÈME. - La variété M étant supposée sans bord, on désigne par D un sous-espace vectoriel de $C_k^2(M)$ contenant $C_k^\infty(M)$, et par A une application linéaire de D dans $C(M)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(PM) (principe du maximum positif) Pour tout $u \in D$ et tout $x \in M$,

$$u(x) = \sup u \geqslant 0 \implies Au(x) \leqslant 0 \ ;$$

(W) A coïncide sur D avec un opérateur de Waldenfels W sur M [32].

---

[32] N° 3.2.

COROLLAIRE. - Si A satisfait au principe du **maximum positif, A se prolonge** de façon unique en une **application linéaire-continue de $C_k^2(M)$ dans $C(M)$** [33].

3.4. - Le corollaire résulte du théorème et du fait que tout opérateur de Waldenfels est continu de $C_k^2(M)$ dans $C(M)$ (n° 3.2), et l'implication (W) ==> (PM) du théorème 1.8 et du corollaire 2 du théorème 2.6.

Afin d'établir (PM) ==> (W), on suppose que A satisfait au principe du maximum positif, et on construit d'abord le noyau singulier de l'opérateur de Waldenfels W cherché en s'inspirant de la relation (3.2) (n° 3.2) : Pour chaque $x \in M$, en vertu de (PM), $u \to Au(x)$ induit sur l'espace $C_k^\infty(M \setminus \{x\})$ une forme linéaire positive ; et, puisque $C_k^\infty(M \setminus \{x\})$ est positivement riche sur l'espace localement compact $M \setminus \{x\}$, cette forme linéaire se prolonge de façon unique en une mesure de Radon $s(x\,,\,.)$ sur $M \setminus \{x\}$: En étendant, pour chaque x, $s(x\,,\,.)$ à M au moyen de la relation $s(x\,,\,\{x\}) = 0$, on obtient un noyau positif s sur M qui possède la propriété (NS_2'') (3.1), ainsi qu'on le voit par localisation de A sur une carte locale et application, dans cette carte, du théorème 1.5 de l'exposé n° 2.

Pour établir la propriété (NS_3') de s, on suppose d'abord que f est une fonction <u>positive</u> de $C_k^\infty(M)$. D'une part, $\int_M s(x\,,\,dy)(1 - \sigma(x\,,\,y))\, f(y)$ est fini puisqu'égal par définition à $A((1 - \sigma_x)f)(x)$. D'autre part, pour $x \in M$, $x_0 \in M$,

$$\left|\int_M s(x\,,\,dy)(1 - \sigma(x\,,\,y))\, f(y) - \int_M s(x_0\,,\,dy)(1 - \sigma(x_0\,,\,y))\, f(y)\right|$$

$$\leqslant \int_M s(x\,,dy)\,|\sigma(x\,,y) - \sigma(x_0\,,y)|\, f(y) + |A((1-\sigma_{x_0})f)(x) - A((1-\sigma_{x_0})f)(x_0)|$$

$$\leqslant \|\sigma_x - \sigma_{x_0}\|\, A(\Psi f)(x) + |A((1 - \sigma_{x_0})f)(x) - A((1 - \sigma_{x_0})f)(x_0)| \quad ,$$

dès que x appartient à un voisinage assez petit V de x_0, en désignant par Ψ une fonction positive de $C_k^\infty(M)$ égale à 1 sur un compact contenant le support de $\sigma_x - \sigma_{x_0}$ pour tout $x \in V$. D'où la continuité de la fonction

$$x \to \int_M s(x\,,\,dy)(1 - \sigma(x\,,\,y))\, f(y) \quad ,$$

en vertu de celles de $A(\Psi f)$ et $A((1 - \sigma_{x_0})f)$. On étend ensuite la propriété au cas où $f \in C_k(M)$ par un argument analogue en **approchant uniformément** f par des

---

[33] Pour les topologies précisées aux n° 1.1 et 2.1.

fonctions de $C_k^\infty(M)$. Ainsi, s est un noyau singulier de **classe semi-continue sur** M (n° 3.1).

De plus, pour tout $x \in M$ ~~et~~ tout $u \in C_k^2(M)$ compris entre 0 et 1 et égal à 1 au voisinage de x, on a,

$$(3.3) \qquad Au(x) + \int_M s(x\,,\,dy)(1 - u(y)) \leqslant 0 \quad .$$

En effet, considérant une suite (u_n) de fonctions de $C_k^\infty(M)$ croissant vers 1 et toutes supérieures à u, on a, d'après le principe du maximum de A,

$$0 \geqslant Au_n(x) = Au(x) + A(u_n - u)(x) = Au(x) + \int_M s(x\,,\,dy)(u_n(y) - u(y)) \quad ,$$

d'où la relation (3.3) en faisant tendre n vers $+\infty$.

Désignant alors par θ un développement de Taylor à l'ordre 1 global sur M (n° 2.5), et posant $a(x) = A(\theta_x\,1)(x)$ pour chaque $x \in M$, on définit une fonction continue a sur M [démonstration standard en écrivant,

$$a(x) - a(x_0) = \int_M s(x\,,\,dy)(\theta_x\,1(y) - \theta_{x_0}\,1(y)) + A(\theta_{x_0}\,1)(x) - A(\theta_{x_0}\,1)(x_0) \quad]$$

qui vérifie la relation (2.6) (n° 2.6) en vertu de (3.3).

On définit donc, en vertu du théorème 2.6, un opérateur de Levy S sur M en posant, pour $x \in M$ et $u \in C_k^2(M)$,

$$(3.4) \qquad Su(x) = a(x)\,u(x) + \int_M s(x\,,\,dy)(u(y) - \theta_x\,u(y)) \quad .$$

On conclut alors, compte tenu du choix de a, en remarquant que, en vertu du théorème 1.5 de l'exposé n° 2 ([34]), l'opérateur $A - S$ coïncide sur chaque carte locale de M (éventuellement à un opérateur différentiel d'ordre 0 près) avec un opérateur de diffusion de classe semi-continue.

C. Q. F. D.

3.5. THÉORÈME. - On suppose que M est une <u>variété sans bord compacte</u>, et on désigne par $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe de Feller sur M ([35]), et par $(\mathcal{D}_A\,,\,A)$ son générateur infinitésimal.

([34]) D contenant $C_k^\infty(M)$ est "riche" au sens de l'exposé n° 2 (n° 1.0).

([35]) Voir l'appendice.

Alors, si $C^{\infty}(M) \subset \mathcal{D}_A$, on a aussi $C^2(M) \subset \mathcal{D}_A$, et A coïncide sur $C^2(M)$ avec un opérateur de Waldenfels sur M (36) (37).

En effet, d'une ~~part la restriction~~ de A à $C^{\infty}(M)$ satisfait au principe du ~~maximum positif~~ (38) donc, d'après le ~~théorème 3.3~~ coïncide sur $C^{\infty}(M)$ avec un opérateur de Waldenfels W .

D'autre part, soit $u \in C^2(M)$. Il existe une suite (u_n) de fonctions de $C^{\infty}(M)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{dans} \quad C^2(M) \quad ,$$

et on a :

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} Wu_n = Wu \quad \text{dans} \quad C(M) \quad ,$$

puisque W est continu de $C^2_k(M)$ dans $C(M)$ (n° 3.2), et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \quad \text{dans} \quad C(M) \quad ;$$

d'où $u \in \mathcal{D}_A$ et $Au = Wu$ puisque l'opérateur $(\mathcal{D}_A , A)$ est fermé.

C. Q. F. D.

3.6. THÉORÈME. - On suppose que M est une variété sans bord et non compacte, et on désigne par $(N_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur M (38), et par $(\mathcal{D}_A , A)$ son générateur infinitésimal.

Alors, si $C^{\infty}_k(M) \subset \mathcal{D}_A$, on a aussi $C^2_k(M) \subset \mathcal{D}_A$, et A coïncide sur $C^2_k(M)$ avec un opérateur de Waldenfels sur M .

On établit ce théorème comme le précédent (en remplaçant $C(M)$ par $C_0(M)$) en s'appuyant sur le lemme suivant :

LEMME. - Soit W un opérateur de Waldenfels sur M . Pour que W applique $C^2_k(M)$ dans $C_0(M)$ (38), il faut et il suffit que, désignant par s son noyau singulier (n° 3.2) on ait,

(3.5) $$\lim_{x\to\infty} s(x , K) = 0 \qquad \text{pour tout compact } K \text{ de } M \ .$$

W est alors continu de $C^2_k(M)$ dans $C_0(M)$.

---

(36) Voir le n° 3.2.

(37) Voir WALDENFELS [16] à ce sujet.

(38) Voir l'appendice.

En particulier, si W applique $C_k^\infty(M)$ dans $C_0(M)$, W applique aussi continûment $C_k^2(M)$ dans $C_0(M)$.

En effet, la ~~première partie résulte~~ de ce que, si $u \in C_k^2(M)$,

(3.6) $$Wu(x) = \int_M s(x\ ,\ dy)\ u(y) \qquad \text{pour tout} \quad x \notin \operatorname{supp} u \ .$$

La continuité de W de $C_k^2(M)$ dans $C_0(M)$ résulte alors de sa continuité de $C_k^2(M)$ dans $C(M)$ (n° 3.2) et du théorème du graphe fermé. La dernière partie résulte immédiatement de la première.

C. Q. F. D.

3.7. Remarques.

(a) On étudiera dans l'exposé n° 4 une classe assez large de semi-groupes de Feller sur M pour lesquels $C_k^2(M) \subset \mathcal{D}_A$ ([39]).

Toutefois, cette situation est loin d'être la plus générale : Prenant pour M le tore à une dimension T , et pour (N_t) le semi-groupe de Feller sur T , image du semi-groupe de Wiener-Levy sur R par l'application $x \to e^{ix}$, on sait que le domaine de définition $\mathcal{D}_A$ du générateur infinitésimal de (N_t) est exactement $C^2(T)$ (voir DYNKIN [3], chap. 2, § 3, n° 2.16 et chap. 10, § 6, n° 10.25). Il suffit alors de transformer (N_t) par un homéomorphisme de T sur T non différentiable pour obtenir un semi-groupe de Feller sur T dont le domaine de définition du générateur infinitésimal ne contient pas $\mathbf{C}^\infty(T)$.

(b) Les conclusions des théorèmes 3.3, 3.5 et 3.6 subsistent si on remplace $C_k^\infty(M)$ et $C^\infty(M)$ respectivement par un sous-espace de $C^2(M)$ "riche" au sens introduit au n° 1.0 de l'exposé n° 2.

§ 4. La condition frontière de Ventcel'.

On énoncera la condition frontière de Ventcel' au n° 4.8. Au préalable, on introduit (n° 4.2 à 4.7) le type d'opérateurs frontière qui y intervient.

4.1. - Dans tout ce paragraphe, M désigne, avec les notations introduites au n° 1.1, une variété compacte dont le bord ∂M est non vide ; ∂M est alors une variété compacte (sans bord) de classe C^∞ et de dimension $n - 1$ (M et ∂M ne sont pas supposée connexes).

([39]) Voir aussi YOSIDA [17], p. 400.

4.2. - On appellera <u>opérateur frontière</u> sur M , toute application linéaire Γ de $C^2(M)$ [40] dans l'espace $B(\partial M)$ des fonctions numériques boréliennes bornées sur la variété ∂M (n° 1.1).

On dira que Γ est <u>local</u> si,

(L) Pour tout $u \in C^2(M)$, $v \in C^2(M)$, et tout $x' \in \partial M$,

$$u = v \text{ au voisinage de } x' \text{ (dans } M\text{)} \implies \Gamma u(x') = \Gamma v(x') \quad .$$

On dira que Γ est <u>quasi-local</u> si,

(QL) Pour tout $u \in C^2(M)$, $v \in C^2(M)$,

$$u = v \text{ au voisinage de } \partial M \implies \Gamma u = \Gamma v \quad .$$

Si m est un entier $\geqslant 0$, fini ou $+\infty$, on dira que Γ <u>est de classe</u> C^m s'il applique $C^{m+2}(M)$ dans $C^m(\partial M)$.

<u>Remarque</u>. - A la donnée d'un opérateur frontière Γ sur M et d'un opérateur linéaire A de $C^2(M)$ dans $C(M)$, on peut associer, entre autre, le <u>problème aux limites homogène du type de Green</u> : Pour un second membre $f \in C(M)$, on cherche $u \in C^2(M)$ tel que $Au = -f$ et $\Gamma u = 0$ (voir le § 6 ci-dessous et l'exposé n° 4). Le cas où Γ n'est pas de classe C^0 correspond aux "problèmes mixtes".

4.3. <u>Opérateurs frontière de Ventcel' de type local</u>. - Tout d'abord, on désignera par ν <u>un champs de vecteurs sur</u> ∂M <u>strictement intérieur et de classe</u> C^0 : avec la terminologie introduite au n° 2.8 de l'exposé n° 1, $-\nu$ est un champs de vecteurs extérieurs sur ∂M de classe C^0 et, pour chaque carte locale (U , χ) de M [41], et chaque $x' \in U \cap \partial M$,

$$\langle d_{x'} \chi^n , \nu_{x'} \rangle > 0 \quad . \tag{4.1}$$

Pour chaque $u \in C^1(M)$, on note $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la fonction $x' \to \langle d_{x'} u , \nu_{x'} \rangle$ sur ∂M .

Ceci étant, un <u>opérateur frontière de Ventcel' de type local</u> est de la forme :

---

[40] Conformément aux notations introduites au n° 1.1, les fonctions de $C^2(M)$ sont de classe C^2 , y compris au bord.

[41] χ^n est la coordonnée transversale : voir le n° 1.4 de l'exposé n° 1.

(4.2) $$\Lambda u = \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + Q(\gamma^0 u) \qquad (u \in C^2(M))$$ [42] [43] ,

où, α est une fonction $\geqslant 0$ de $B(\partial M)$, et Q un opérateur différentiel de <u>diffusion</u> sur la variété ∂M (n° 1.8).

On notera qu'une modification du champs de vecteurs ν en entraîne une du coefficient α , ainsi que l'adjonction à Q d'un champs de vecteurs tangentiel sur ∂M , mais ceci sans que la forme (4.2) de Λ , ni la partie principale d'ordre 2 de Q ne soient modifiées.

Si cette dernière est nulle, on retrouve le type d'opérateur frontière qui intervient dans les problèmes aux limites du type "aux dérivées obliques".

Si ν est de classe C^m , pour que Λ soit de classe C^m (m entier positif, fini ou $+\infty$), il faut et il suffit que α et Q soient de classe C^m sur ∂M .

4.4. <u>Opérateurs frontière de Ventcel' de type intégral</u>. – On appellera d'abord <u>noyau singulier de Ventcel'</u> (resp. <u>noyau singulier de Ventcel' régulier</u>), une application $(x', B) \to t(x', B)$ de $\partial M \times \mathcal{B}_M$ [44] dans $[0, +\infty]$ telle que,

(NW_1) Pour chaque $x' \in \partial M$, $t(x', .)$ est une mesure $\geqslant 0$ sur $\mathcal{B}_M$ [45] pour laquelle $t(x', \{x'\}) = 0$, et dont la restriction à $M \setminus \{x'\}$ est une mesure de Radon .

(NW_2) Pour chaque carte locale (U, χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, et chaque fonction positive $f \in C(M)$ à support dans U , la fonction

$$x' \to \int_U t(x', dy)\, f(y)\Big[\chi^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (\chi^j(y) - \chi^j(x'))^2\Big]$$ [46]

est <u>borélienne</u> (resp. <u>continue</u>) et <u>bornée</u> sur $U \cap \partial M$.

(NW_3) Pour chaque fonction unité locale σ sur M (n° 2.3) et chaque fonction $f \in C(M)$, la fonction

---

[42] $\gamma^0 u$ désigne la restriction à ∂M de la fonction u .

[43] Par rapport à la définition donnée dans l'exposé n° 302 de [10] (n° 2.1), tous les signes sont changés et $\delta = 0$ (voir aussi le n° 4.8).

[44] $\mathcal{B}_M$ désigne la tribu borélienne de M .

[45] Pas nécessairement finie sur les compacts au voisinage de x ; l'ordre de croissance est précisé par la propriété (NW_2).

[46] On notera le rôle privilégié joué par la coordonnée transversale χ^n ; voir à ce sujet le n° 4.9, alinéa (d).

$$x' \to \int_M t(x', dy)(1 - \sigma(x', y))\, f(y)$$

est <u>borélienne bornée</u> (resp. <u>continue</u>) sur ∂M .

On dira de plus qu'un noyau singulier de Ventcel' t sur M est <u>quasi-local</u>, si

(4.3) $\qquad t(x', M \setminus \partial M) = 0 \qquad$ pour tout $x' \in \partial M$.

Ceci étant, <u>un opérateur frontière de Ventcel' de type intégral</u> sera une application T de $C^2(M)$ dans $B(\partial M)$ (n° 4.2), pour laquelle il existe un noyau singulier de Ventcel' t sur M tel que,

(W_1) Pour chaque $x' \in \partial M$, et chaque $u \in C^2(M)$,

(4.4) $\qquad Tu(x') = \int_M t(x', dy)\, u(y) \qquad$ dès que $x' \notin \operatorname{supp} u$.

(W_2) Pour chaque carte locale (U, χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, il existe des fonctions numériques boréliennes bornées $\eta, \eta^1, \ldots, \eta^{n-1}$ sur $U \cap \partial M$ telles que, pour tout $x' \in U \cap \partial M$ et tout $u \in C^2(M)$ à support dans U , on ait:

(4.5)
$$Tu(x') = \eta(x')\, u(x') + \sum_{j=1}^{n-1} \eta^j(x') \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x') + \int_U t(x', dy)\Big[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \chi^j}(x')(\chi^j(y) - \chi^j(x'))\Big] \quad (^{47}) \ ;$$

(W_3) $T1(x') \leqslant 0$ pour tout $x' \in \partial M$.

On notera que la conjonction de (W_1), (W_2) et (W_3) est équivalente à celle de (W_1) et de la propriété (W_2') obtenue en adjoignant à (4.5) la relation

(4.6) $\qquad \eta(x') + t(x', M \setminus U) \leqslant 0$.

En particulier, $\eta(x')$ est toujours $\leqslant 0$.

Le noyau singulier de Ventcel' t , qui est entièrement déterminé par T à cause des propriétés (W_1) et (NW_1), sera appelé le <u>noyau singulier de</u> T .

Pour que T soit <u>quasi-local</u>, il faut et il suffit que son noyau singulier le soit. Pour que T soit <u>local</u>, il faut et il suffit que son noyau singulier soit nul.

---

(47) Cette intégrale a un sens en vertu de la propriété (NS_2) de t : il suffit de faire un développement de Taylor d'ordre 1 de u .

4.5. – Comme pour les opérateurs de Levy (n° 2.5), on peut donner aux opérateurs frontière de Ventcel' de type intégral une forme plus globale en utilisant un développement de Taylor global, convenable ~~:~~ ~~Reprenant~~, comme au n° 2.6, la construction d'une fonction unité locale, donnée au n° 2.3 (à ceci près que, M étant ici compacte, on peut supposer le ~~recouvrement~~ (U_α) fini), on ~~suppose que, sur~~ chaque ouvert U_α, est définie une carte locale χ_α de M, et on pose, pour chaque $u \in C^1(M)$, $x' \in \partial M$, et $y \in M$,

$$(4.7) \qquad \theta^*_{x'}\, u(y) = \sum_\alpha \sigma_\alpha(x' , y)[u(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \chi^k_\alpha}(x')(\chi^k_\alpha(y) - \chi^k_\alpha(x'))] \ .$$

L'application $(x' , y , u) \to \theta^*_x u(y)$ ainsi définie sera appelée un développement de Taylor global à la frontière sur M.

θ^* a des propriétés analogues à θ (n° 2.6) qui permettent d'énoncer :

THÉORÈME. – On suppose donnés un développement de Taylor global à la frontière, θ^*, sur M et :

- un noyau singulier de Ventcel' t sur M,
- un champs de vecteurs Z sur la variété ∂M [48] borélien borné,
- une fonction $\eta \in B(\partial M)$ de telle sorte que,

$$(4.8) \qquad \eta(x') + \int_M t(x' , dy)(1 - \theta^*_{x'}\, 1(y)) \leqslant 0 \qquad \text{pour tout } x' \in \partial M \ .$$

Alors, on définit un opérateur frontière de Ventcel' sur M en posant, pour $u \in C^2(M)$ et $x' \in \partial M$,

$$(4.9) \qquad Tu(x') = \eta(x')\, u(x') + \langle d_{x'}\, u , Z_{x'} \rangle + \int_M t(x' , dy)(u(y) - \theta^*_{x'}\, u(y)) \ .$$

En outre, tout opérateur frontière de Ventcel' sur M peut être obtenu de cette manière.

De plus, pour que T applique $C^2(M)$ dans $C(\partial M)$, il faut et il suffit que le noyau singulier t soit régulier (n° 4.4) et que η et Z soient de classe C^0.

La première partie du théorème réclame une simple vérification sans difficulté. La seconde (condition pour que T applique $C^2(M)$ dans $C(\partial M)$) réclame des arguments analogues à ceux qui ont été développés pour les opérateurs de Levy (exposé

---

[48] On dit aussi que Z est un champs de vecteurs "tangent à ∂M ".

n° 2, et ci-dessus § 2). On renvoie, à ce sujet, à l'exposé n° 4 (n° II.6) où sont données des conditions suffisantes pour que T applique $C^2(M)$ dans $C^{0,\lambda}(\partial M)$.

4.6. Opérateurs frontière de Ventcel' de type intégral d'ordre 1 . – Un noyau singulier de Ventcel' (resp. un noyau singulier de Ventcel' régulier) t sur M sera dit d'ordre 1 s'il vérifie aussi :

(NW_2^1) Pour toute carte locale (U , χ) de M telle que $U \cap \partial M \neq \emptyset$, et toute fonction positive $f \in C(M)$ à support dans U , la fonction

$$x' \to \int_U t(x' , dy)\, f(y)[\chi^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1} |\chi^j(y) - \chi^j(x)|]$$

est borélienne (resp. continue) et bornée sur $U \cap \partial M$.

Si t est un tel noyau, et si η est une fonction borélienne bornée sur M partout négative, on définit un opérateur frontière de Ventcel' T sur M en posant :

$$(4.10)\quad Tu(x') = \eta(x') + \int_M t(x' , dy)(u(y) - u(x')) \qquad (x' \in \partial M , \ u \in C^2(M)) .$$

4.7. Opérateurs frontière de Ventcel' quasi-locaux et opérateurs de Levy sur ∂M . – Soit T un opérateur frontière de Ventcel' quasi-local. Son noyau singulier t est aussi quasi-local (n° 4.4, relation (4.3)), donc, en vertu des propriétés (W_1) et (W_2) (ou aussi de la forme (4.9)), pour chaque $u \in C^2(M)$, Tu ne dépend que de la restriction $\gamma^0 u$ de u à ∂M . Autrement dit, T induit un opérateur T' de $C^2(\partial M)$ dans $B(\partial M)$, et on a

$$(4.11)\qquad Tu = T'(\gamma^0 u) \qquad \text{pour tout } u \in C^2(M) .$$

Il résulte immédiatement des définitions que T' est un opérateur de Levy (n° 2.4) sur la variété ∂M ; et inversement, si T' est un opérateur de Levy sur ∂M , la relation (4.11) définit un opérateur frontière de Ventcel' quasi-local sur M .

4.8. – On appellera ici [49] opérateur frontière de Ventcel' sur M , un opérateur frontière Γ de la forme $\Gamma = \Lambda + T$, où Λ est un opérateur frontière de

---

[49] Par rapport à la définition donnée dans l'exposé n° 302 du séminaire Bourbaki [10] (n° 2.4), tous les signes sont changés, et $\delta \equiv 0$ (le terme $\delta\gamma^0 Au$ a été placé au second membre dans la condition de Ventcel' (2.14)).

type local (n° 4.3), et T un opérateur **frontière de Ventcel' de type intégral** (n° 4.4). On peut alors énoncer comme suit "<u>la condition frontière de Ventcel'</u>" :

THÉORÈME. - Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Feller sur la variété à bord compacte M . Il existe un opérateur frontière de Ventcel' Γ sur M , et une fonction positive δ borélienne et bornée sur ∂M tels que : Pour tout $x' \in \partial M$,

(4.12) ou bien $\delta(x') \neq 0$, ou bien $\exists\, u \in C^2(M)$ tel que $\Gamma u(x') \neq 0$ (50) .

(4.13) Pour tout $u \in C^2(M)$ tel que $\lim\limits_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} (N_s\, u(x') - u(x'))$ existe,

$$\delta(x')[\lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} (N_s\, u(x') - u(x'))] = \Gamma u(x') \quad .$$

En particulier, si $(\mathcal{D}_A , A)$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe (N_t) , on a

(4.14) $$u \in C^2(M) \cap \mathcal{D}_A \implies \Gamma u = \delta\gamma^0\, Au \quad (51) .$$

Pour une démonstration de ce théorème, on renvoie actuellement à l'exposé n° 302 du séminaire Bourbaki [10] (n° 2.4, p. 302-308) et à [14].

4.9. <u>Remarques.</u>

(a) Dans son article [14], VENTCEL' postule que le générateur infinitésimal A coïncide sur $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ avec un opérateur différentiel du second ordre elliptique positif P sur M (n° 1.9 ci-dessus), et la condition frontière, qu'il obtient, s'écrit donc (en vertu de (4.14) ci-dessus) :

(4.15) $$u \in C^2(M) \cap \mathcal{D}_A \implies \forall\, x' \in \partial M ,\quad \delta(x')\, Pu(x') = \Gamma u(x') \quad .$$

En réalité cette hypothèse sur A est tout-à-fait inutile ici : Sans aucune hypothèse supplémentaire sur le semi-groupe de Feller $(N_t)_{t\geq 0}$, la méthode de Ventcel' fournit, en chaque point $x' \in \partial M$, un nombre $\delta(x') \geq 0$ et une forme linéaire $\Gamma_{x'}$ sur $C^2(M)$ de la forme

---

(50) Voir au n° 4.9 la remarque (c).

(51) $\Gamma u(x') = \delta(x')\, Au(x')$ pour tout $x' \in \partial M$.

$$(4.16) \qquad \Gamma_{x'}(u) = \alpha(x')\,\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') + \sum_{j,k=1}^{n-1} b^{jk}(x')\,\frac{\partial^2 u}{\partial\chi^j\,\partial\chi^k}(x') + \sum_{j=1}^{n-1} b^j(x')\,\frac{\partial u}{\partial\chi^j}(x')$$

$$- b(x')\,u(x') + \int_U t(x', dy)\Big[u(y) - u(x') - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\chi^j}(x')(\chi^j(y) - \chi^j(x'))\Big]$$

$$+ \int_{M\setminus U} t(x', dy)\,u(y) \qquad (u \in C^2(M))$$

(en choisissant une carte locale (U, χ) au voisinage de x'), où $\alpha(x') \geqslant 0$, $b(x') \geqslant 0$,

$$\sum_{j,k=1}^{n-1} b^{jk}(x')\,\xi_j\,\xi_k \geqslant 0 \qquad \text{pour tout} \quad \xi = (\xi_j) \in R^{n-1} \quad ,$$

et où $t(x', .)$ est une mesure de Radon sur $M \setminus \{x'\}$ telle que

$$(4.17) \qquad \int_U t(x', dy)\Big[\chi^n(y) + \sum_{j=1}^{n-1}(\chi^j(y) - \chi^j(x'))^2\Big] < +\infty \quad ,$$

de telle sorte que, pour toute fonction $u \in C^2(M)$ telle que $\lim\limits_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}(N_s u(x') - u(x'))$ existe (dans R), on ait,

$$(4.18) \qquad \delta(x')\big[\lim_{s\downarrow 0}\,(N_s\,u(x') - u(x'))\big] = \Gamma_{x'}(u) \quad ;$$

et, de plus, tous les termes obtenus n'étant pas simultanément nuls :

(4.19) Si $\delta(x') = b(x') = b^j(x') = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1)$ et $t(x', .) = 0$, alors

$$\alpha(x') + 2\sum_{j=1}^{n-1} b^{jj}(x') > 0 \quad .$$

(b) Ainsi présentée, la condition frontière de Ventcel' apparaît comme ponctuelle: une condition (4.18) en chaque point de ∂M , et ceci, avec une large indétermination sur les coefficients qui peuvent tous être multipliés, en chaque point, par un nombre > 0 arbitraire sans changer la forme de la condition.

Toutefois, en serrant de plus près la méthode de Ventcel' (voir l'exposé n° 302 du séminaire Bourbaki [10]), on peut arriver à choisir $\delta(x')$ et $\Gamma_{x'}$ variant en fonction de x' de façon "mesurable et bornée", ce qui permet raisonnablement d'introduire les opérateurs frontière de Ventcel' comme on l'a fait ci-dessus aux n° 4.3, 4.4 et 4.5, et de présenter la condition frontière en termes de ces opérateurs, ce qui est, on le verra abondamment ci-dessous, un premier pas important vers la construction de semi-groupes correspondant à une condition frontière donnée (voir le § 6 ci-dessous et les exposés n° 4, 5 et 6).

Le problème est actuellement ouvert de savoir à quelle condition sur le demi-groupe (N_t), dont on part, il est possible de choisir δ et Γ plus réguliers que "boréliens bornés", par exemple de classe C^0 ou $C^{0,\lambda}$. En particulier, existe-t-il des semi-groupes (de Feller) pour lesquels ceci n'est pas possible ? L'existence de problèmes aux limites homogènes du type de Green mixtes (voir le n° 4.2 ci-dessus et le n° 6.3 ci-dessous) le laisse penser raisonnablement.

(c) On notera l'importance de la propriété (4.12) (ou de sa forme (4.19)) : Cette propriété assure que la condition frontière (4.13) obtenue a une certaine <u>consistance</u>. Elle entraîne par exemple que, si δ est identiquement nul, $\mathcal{D}_A$ <u>ne peut contenir</u> $C^2(M)$ <u>tout entier</u>.

Toutefois, dans l'état actuel de la question, rien n'élimine le cas où, ayant au contraire $\delta(x') \neq 0$ pour tout $x' \in \partial M$, et $\Gamma \equiv 0$, la condition frontière serait satisfaite pour tout $u \in C^2(M)$, grâce à une dégénérescence totale de A sur ∂M ($Au(x') = 0$ pour tout $u \in C^2(M)$ et $x' \in \partial M$).

(d) Parmi les termes qui constituent l'opérateur frontière de Ventcel' :

$$\Gamma u = \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + Q(\gamma^0 u) + Tu \qquad (u \in C^2(M)) \quad ,$$

on reconnaîtra :

- le terme transversal $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ qui intervient dans le problème aux dérivées obliques,
- le terme du second ordre semi-elliptique sur le bord $Q(\gamma^0 u)$ qui intervient dans les problèmes étudiés par VIŠIK dans [15],
- le terme non local Tu qui intervient, au moins quand il est quasi-local, dans certains problèmes aux limites non locaux étudiés récemment par BADE et FREEDMAN dans [1] et par BEALS dans [2].

Chacun d'eux recevra une interprétation probabiliste en termes de réflexion des trajectoires du processus de Markov sur M associé au semi-groupe (N_t) (voir l'exposé n° 6).

De nombreux problèmes se posent à leur sujet, entre autre :

- Préciser davantage la condition de consistance (4.12) (on sent, par exemple, que la condition frontière ne peut se réduire à la condition $\gamma^0 u = 0$ du problème de Dirichlet, car $\{u \mid u \in C(M) \text{ et } \gamma^0 u = 0\}$ n'est pas dense dans $C(M)$). Les impératifs de la construction des semi-groupes fourniront, entre autre, la condition suffisante suivante (voir l'exposé n° 4, n° II.2 et l'exposé n° 6) :

(4.20) $\delta(x') = \alpha(x') = 0 \implies t(x' , M \setminus \partial M) = +\infty$.

- Parmi tous les couples (δ , Γ) fournissant la condition frontière (4.14) d'un semi-groupe $(N_t)_{t\geq 0}$, préciser la nature de l'indétermination (il est clair que, si φ est une fonction de $B(\partial M)$ partout > 0 , le couple $(\varphi\delta , \varphi\Gamma)$ est équivalent au couple (δ , Γ)). On étudiera dans l'exposé n° 5 un cas où il existe un couple (δ , Γ) privilégié, canoniquement associé au semi-groupe (N_t) .

(e) Ainsi qu'on l'a souligné en (a) ci-dessus, la condition frontière de Ventcel' (4.13) ou (4.14) ne réclame aucune hypothèse sur le générateur infinitésimal, en particulier sur l'étendue de l'espace $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$. Mais il est clair que, comme on ne sait donner un sens à la condition frontière (4.13) ou (4.14) que pour les fonctions de $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$, cette condition sera d'autant plus utile que l'espace $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ contiendra davantage de fonctions. En particulier, dans cet ordre d'idées, la situation idéale est celle où sont vérifiées les deux propriétés suivantes:

(D_1) $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ est dense dans l'espace de Banach $C(M)$;

(D_2) Le générateur infinitésimal $(\mathcal{D}_A , A)$ est identique à la fermeture de l'opérateur $(C^2(M) \cap \mathcal{D}_A , A)$ (52).

C'est cette situation que l'on réalisera éffectivement dans les constructions de semi-groupes effectuées dans les exposés n° 4 et 6 par résolution de problèmes aux limites et application du théorème de Hille-Yosida-Ray (voir l'appendice et les n° 6.2 et 6.3 ci-dessous). Mais, avant d'aborder ces constructions, il faut obtenir des indications sur la forme du générateur infinitésimal A sur $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$. C'est l'objet du § 5.

(f) On notera que la situation idéale (du point de vue différentiable) caractérisée par les propriétés (D_1) et (D_2) ci-dessus est loin d'être la plus générale : prenant, par exemple, pour M le segment $[0 , 1]$, et pour (N_t) le semi-groupe de Feller sur $[0 , 1]$, image du semi-groupe de Wiener-Levy sur R par l'application $x \to \gamma(x)$ définie par $\gamma(x) = |x - 2k|$ (k entier, $|x - 2k| \leq 1$), on sait que le domaine de définition du générateur infinitésimal de (N_t) est exactement l'espace des fonctions $f \in C^2([0 , 1])$ telles que $f'(0) = f'(1) = 0$ (voir DYNKIN [3], chap. 2, § 3, n° 2.16 et chap. 10, § 6, n° 10.25 et 10.26). Il suffit alors de transformer (N_t) par un homéomorphisme de $[0 , 1]$ sur $[0 , 1]$, nulle

---

(52) Le générateur infinitésimal $(\mathcal{D}_A , A)$ (donc aussi le semi-groupe (N_t)) est alors entièrement déterminé par l'opérateur $(C^2(M) \cap \mathcal{D}_A , A)$.

part différentiable, pour obtenir un semi-groupe de Feller sur $[0\ ,\ 1]$ pour lequel (D_1) (et a fortiori (D_2)) n'est pas satisfaite.

On renvoie, à ce sujet, aux travaux de FELLER (voir [5], et aux chapitres 15 et 17 du livre de DYNKIN [3]).

§ 5. Générateurs infinitésimaux des semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte, et opérateurs de Waldenfels généralisés.

Les générateurs infinitésimaux cherchés coïncident sur les fonctions de classe C^2 (voir le théorème 5.4 ci-dessous) avec des opérateurs de Waldenfels "généralisés" en ce sens qu'ils ne sont pas nécessairement prolongeables continûment au bord sur toutes les fonctions de classe C^2 (n° 5.2 et 5.3).

5.1. - Comme au paragraphe 4, on désigne ici par M une variété compacte dont le bord est non vide. On note $\mathring{M}$ l'intérieur de M ($\mathring{M} = M \setminus \partial M$) considéré comme variété paracompacte sans bord ; en particulier, pour p entier ≥ 0, fini ou $+\infty$, $C^p_k(\mathring{M})$ est le sous-espace de $C^p(M)$ formé des fonctions à support compact contenu dans $\mathring{M}$.

5.2. Opérateurs de Levy généralisés sur M. - On appellera d'abord noyau singulier de Levy généralisé sur M (53) une application $(x\ ,\ B) \to s(x\ ,\ B)$ de $\mathring{M} \times \mathcal{B}_M$ dans $[0\ ,\ +\infty]$ telle que,

(NSG_1) Pour tout $x \in \mathring{M}$, $s(x\ ,\ .)$ est une mesure ≥ 0 sur $\mathcal{B}_M$ pour laquelle $s(x\ ,\ \{x\}) = 0$ et $s(x\ ,\ M \setminus V) < +\infty$ pour tout voisinage V de x ;

(NSG_2) La restriction de s à $\mathring{M} \times \mathcal{B}_{\mathring{M}}$ est un noyau singulier de Levy de classe semi-continue sur la variété (sans bord) $\mathring{M}$ (n° 3.1) ;

(NSG_3) Pour chaque fonction unité locale σ sur $\mathring{M}$ (54), et chaque fonction positive $f \in C(M)$, la fonction

$$x \to \int_M s(x\ ,\ dy)(1 - \sigma(x\ ,\ y))\ f(y)$$

est finie et continue sur $\mathring{M}$.

Un noyau singulier de Levy de classe C^0 sur M (n° 2.4) induit naturellement un noyau singulier généralisé.

---

(53) Avec la terminologie du § 3, il s'agit, en fait, de noyaux singuliers de classe semi-continue (voir (NSG_2) et (NSG_3)). On supprime ici le qualificatif de classe semi-continue pour abréger.

(54) On prolonge naturellement les fonctions de $C_k(\mathring{M})$ à M par 0 sur ∂M.

Ceci étant, on appellera <u>opérateur de Levy généralisé</u> sur M une application linéaire S de $C^2(M)$ dans $B(\mathring{M})$ **telle que,**

(SG_1) Il ~~existe un noyau singulier de Levy généralisé sur~~ M pour lequel, pour chaque $x \in M$ et chaque $u \in C^2(M)$,

$$Su(x) = \int_M s(x\ ,\ dy)\ u(y) \qquad \text{dès que} \qquad x \notin \operatorname{supp} u\ ;$$

(SG_2) S induit sur $C_k^2(\mathring{M})$ un opérateur de Levy de classe semi-continue sur $\mathring{M}$ (n° 3.1) ;

(SG_3) $S1(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathring{M}$.

Le noyau singulier s , qui est entièrement déterminé par S , à cause de (SG_1) et (NSG_1), sera appelé le <u>noyau singulier de</u> S .

Désignant par θ un développement de Taylor à l'ordre 1 global sur la variété $\mathring{M}$, on peut obtenir, pour $Su(x)$ $(u \in C^2(M)\ ,\ x \in \mathring{M})$, la même expression globale (2.7) (avec la condition (2.6)) que celle introduite par le théorème 2.6 pour les opérateurs singuliers de Levy sur M ([55]).

5.3. - <u>Un opérateur de Waldenfels généralisé</u> sur M sera alors une application W de $C^2(M)$ <u>dans</u> $C(\mathring{M})$ de la forme $W = P + S$,

$$(5.1) \qquad Wu(x) = Pu(x) + Su(x) \qquad (u \in C^2(M)\ ,\ x \in \mathring{M})\ ,$$

où P est un opérateur différentiel de diffusion sur $\mathring{M}$ de classe semi-continue (n° 3.1), et S un opérateur de Levy généralisé sur M (n° 5.2).

Il est clair que si P et S sont respectivement, un opérateur de diffusion sur M , et un opérateur de Levy sur M , tous deux de classe C^0 , alors $W = P + S$ est un opérateur de Waldenfels généralisé sur M . On dira alors que W est un <u>opérateur de Waldenfels décomposable sur</u> M (voir à ce sujet le § 6 de cet exposé, et l'exposé n° 4).

Mais, tout opérateur de Waldenfels généralisé sur M n'est pas de cette forme : en plus des irrégularités de P et S mutuellement compensées (voir le n° 1.6 de l'exposé n° 2), W peut "ne pas se prolonger continûment au bord" ainsi que le montre l'exemple d'un opérateur de diffusion P sur $\mathring{M}$ de classe C^0 dont les coefficients n'ont pas de limite au bord (voir le n° 5.5, alinéa (b), sur ce sujet).

Ceci étant, on peut énoncer :

([55]) Voir note ([54]).

5.4. THÉORÈME. - Soient $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe de Feller sur la variété compacte M, et $(\mathcal{D}_A, A)$ son générateur infinitésimal.

On suppose que :

(D_1') Pour tout $x \in \mathring{M}$, il existe un voisinage V de x tel que, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, il existe une suite (u_n) de fonctions de $\mathcal{D}_A$ pour laquelle,

(5.2) $$\lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi\| = 0 \quad (^{56}),$$

(5.3) $$u_n = \varphi \quad \text{sur } V \quad \text{pour tout } n \quad (^{57}).$$

Alors, il existe un opérateur de Waldenfels généralisé W sur M (n° 5.3) tel que, pour tout $u \in C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ et tout $x \in \mathring{M}$,

(5.4) $$Au(x) = Wu(x) \quad .$$

5.5. Remarques.

(a) Les semi-groupes qui seront effectivement construits dans les exposés n° 4 et 6, possèderont la propriété (D_1'), et même la propriété (D_1'') ci-dessous qui l'implique ([58]) :

(D_1'') Pour tout compact K contenu dans $\mathring{M}$, et tout $\varphi \in C^\infty(M)$, il existe une suite (u_n) de fonctions de $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi\| = 0 \quad \text{et} \quad u_n = \varphi \quad \text{sur } K \quad \text{pour tout } n \ .$$

On notera que la propriété (D_1'') implique la propriété (D_1) (densité de $C^2(M) \cap \mathcal{D}_A$ dans $C(M)$; n° 4.9, alinéa (e)) ; mais qu'il n'en est pas ainsi de (D_1'). Tenant compte de la forme de l'opérateur Γ qui intervient dans la condition frontière de Ventcel', on peut dire que la propriété (D_1') tient au fait que Γ est de degré 0 à l'intérieur de M et de degré 1 au moins sur le bord ([59]), ce qui permet, partant d'une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, et la modifiant uniquement dans un voisinage du

---

([56]) $\|\ \|$ désignant la norme uniforme sur $C(M)$.

([57]) Voir la remarque (a) du n° 4.9.

([58]) Voir l'appendice 1 de l'exposé n° 6.

([59]) Voir le n° 4.9, alinéa (d).

bord et de moins de ε en norme uniforme, d'obtenir une fonction u satisfaisant la condition frontière $\Gamma u = \delta \cdot \gamma^0 Au$, donc présumée être dans $\mathfrak{D}_A$ (60).

(b) Comme pour les théorèmes 3.5 et 3.6 (dans le cas où M est sans bord), on notera que, pour le théorème 5.4, une hypothèse concernant l'appartenance à $\mathfrak{D}_A$ de fonctions de classe C^∞, entraîne une conclusion concernant la forme de A sur les fonctions de classe C^2, et pas seulement de classe C^∞.

(c) Puisque A applique $\mathfrak{D}_A$ dans $C(M)$, il résulte de (5.4) que, pour chaque $u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$, la fonction Wu, qui, a priori, n'est définie et continue que sur l'intérieur $\overset{\circ}{M}$ de M, se prolonge en une fonction de $C(M)$.

La manière dont Wu se prolonge continûment à M, pour les fonctions $u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A$, c'est-à-dire (§ 4) pour les fonctions satisfaisant la condition frontière de Ventcel', peut être illustrée par l'exemple suivant à une dimension :

$$M = [0 , 1] , \quad Wu(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} \qquad (u \in C^2(M) , \quad x \in]0 , 1[) \ ;$$

avec la condition frontière de Neumann :

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 0 \ .$$

Un développement de Taylor montre que,

$$\text{si } \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 0 , \qquad \text{on a } \lim_{x\to 0} Wu(x) = 2 \left.\frac{d^2 u}{dx^2}\right|_{x=0}$$

(voir à ce sujet FELLER [4], et le chapitre 15 du livre de DYNKIN [3]).

5.6. - La démonstration du théorème 5.4 va reposer sur le lemme suivant :

LEMME (61). - Pour chaque $x \in \overset{\circ}{M}$, on désigne par $\tilde{\mathfrak{U}}_x$ le sous-espace vectoriel de $C(M)$ formé des fonctions $\varphi \in C(M)$ pour lesquelles il existe une suite (u_n) de fonctions de $\mathfrak{D}_A$ telle que,

(P_x) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - \varphi\| = 0$, et il existe un voisinage V de x tel que $u_n = \varphi$ sur V pour tout n.

---

(60) Ceci est particulièrement facile à vérifier lorsque Γ est quasi-local (n° 4.1 et 4.7) et A local.

(61) Avec les notations, et sous l'hypothèse (D_1') du théorème 5.4.

On pose de plus $\tilde{\mathcal{U}} = \bigcap_{x \in \mathring{M}} \tilde{\mathcal{U}}_x$. Alors, $\mathcal{D}_A \subset \tilde{\mathcal{U}}$ et,

(1) Pour chaque $x \in \mathring{M}$, la forme linéaire $u \to Au(x)$ sur $\mathcal{D}_A$ se prolonge de façon unique en une forme linéaire $\tilde{A}_x$ sur $\tilde{\mathcal{U}}_x$ de telle sorte que,

(Q_x) Pour tout $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}_x$,

(5.5) $$\tilde{A}_x(\varphi) = \lim_{n\to\infty} Au_n(x)$$

pour toute suite (u_n) de fonctions de $\mathcal{D}_A$ ayant la propriété (P_x) ci-dessus.

De plus, $\tilde{A}_x$ satisfait au principe du maximum "en x " :

Pour tout $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}_x$, $\varphi(x) = \sup \varphi \geqslant 0 \implies \tilde{A}_x(\varphi) \leqslant 0$.

(2) Si on pose, pour tout $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}$ et tout $x \in \mathring{M}$, $\tilde{A}\varphi(x) = \tilde{A}_x(\varphi)$, on définit une application linéaire de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans $C(\mathring{M})$ qui satisfait au principe du maximum: pour tout $x \in \mathring{M}$,

$$\varphi \in \tilde{\mathcal{U}} \text{ et } \varphi(x) = \sup \varphi \geqslant 0 \implies \tilde{A}\varphi(x) \leqslant 0 .$$

On peut établir ce lemme comme suit :

(α) Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{D}_A \subset \tilde{\mathcal{U}}$, puisque, si $\varphi \in \mathcal{D}_A$, on peut prendre $u_n = \varphi$ pour tout n .

(β) Ensuite, pour chaque $x \in \mathring{M}$, et chaque voisinage U de x dans $\mathring{M}$, il existe des ouverts relativement compacts U_1 et U_2 de $\mathring{M}$ tels que

$$x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U ,$$

et une constante $c \geqslant 0$ telle que, pour toute fonction $u \in \mathcal{D}_A$ nulle sur U_2 , on ait,

(5.6) $$|Au(y)| \leqslant c\|u\| \qquad \text{pour tout } y \in U_1 .$$

En effet, en vertu de (D_1'), il existe des ouverts U_1 et U_2 de M tels que $x \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U$, et une fonction $\Psi \in \mathcal{D}_A$, positive, nulle sur U_1 , et $\geqslant 1$ sur $M \setminus U_2$. Alors, si $u \in \mathcal{D}_A$ est nulle sur U_2 , on a

$$- \|u\|\Psi \leqslant u \leqslant \|u\|\Psi ;$$

donc, puisque A satisfait au principe du maximum positif sur $\mathcal{D}_A$ (voir l'appendice n° A.3), pour $y \in U_1$, on a,

$$- \|u\| \, A\Psi(y) \leqslant Au(y) \leqslant \|u\| \, A\Psi(y) ;$$

d'où la propriété annoncée en prenant $c = \|A\Psi\|$.

(γ) On peut alors définir $\tilde{A}_x$ $(x \in \mathring{M})$ au moyen de la relation (5.5) en remarquant que la propriété établie en (β) assure que la limite $\tilde{A}_x(\varphi) = \lim_{n\to\infty} Au_n(x)$ est indépendante de la suite (u_n) choisie (liée à φ par la propriété (P_x)). De plus, la même propriété entraîne que, lorsque $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}$, la convergence de la suite $(Au_n(x))$ a lieu uniformément localement en x sur $\mathring{M}$; d'où résulte la continuité de $\tilde{A}\varphi$ sur $\mathring{M}$ (propriété (2)).

(δ) Il reste à montrer que $\tilde{A}_x$ satisfait au principe du maximum en x , pour chaque $x \in \mathring{M}$ (la propriété correspondante de $\tilde{A}$ en résulte immédiatement) : soient donc $x \in \mathring{M}$ et $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}_x$ tels que $\varphi(x) = \sup \varphi \geqslant 0$. Par définition de $\tilde{A}$, il existe un voisinage V de x , et une suite (u_n) de fonctions de $\mathcal{D}_A$ telle que, pour chaque entier n ,

$$\|u_n - \varphi\| \leqslant \frac{1}{n} , \quad |\tilde{A}_x(\varphi) - Au_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad u_n = \varphi \quad \text{sur } V .$$

Par ailleurs, en vertu de (D_1'), il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{D}_A$, et un voisinage V_1 de x tels que $V_1 \subset V$, $\Psi \leqslant 1$, $\Psi(x) = 1$ et $\Psi(y) \leqslant 0$ pour tout $y \notin V_1$. Posant alors, pour chaque n , $v_n = u_n + \frac{1}{n}\Psi$, on a

$$v_n \in \mathcal{D}_A \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \sup v_n = \varphi(x) + \frac{1}{n} \geqslant 0 .$$

Donc, d'après le principe du maximum positif de A ,

$$Av_n(x) \leqslant 0 .$$

On en déduit $\tilde{A}_x(\varphi) \leqslant 0$ en faisant tendre n vers l'infini dans la relation

$$\tilde{A}_x(\varphi) = \tilde{A}_x(\varphi) - Au_n(x) + Av_n(x) - \frac{1}{n} A\Psi(x) \leqslant \frac{1}{n} (1 + |A\Psi(x)|) .$$

Le lemme est ainsi établi.

5.7. Démonstration du théorème 5.4.

(α) On remarque d'abord que, d'après l'hypothèse (D_1'), $C^\infty(M) \subset \tilde{\mathcal{U}}$ (lemme 5.6) ; donc aussi $C_k^\infty(\mathring{M}) \subset \tilde{\mathcal{U}}$. En vertu du théorème 3.3, la restriction de $\tilde{A}$ à $C_k^2(\mathring{M}) \cap \tilde{\mathcal{U}}$ coïncide donc avec un opérateur de Waldenfels $\tilde{W} = \tilde{P} + \tilde{S}$ sur la variété $\mathring{M}$, et on peut, de plus, choisir $\tilde{P}$ de sorte que $\tilde{P}1 = 0$. Il reste à montrer que l'opérateur de Levy $\tilde{S}$ sur $\mathring{M}$ se prolonge en un opérateur de Levy généralisé S sur M (n° 5.2) tel que

(5.7) $\quad \tilde{A}\varphi(x) = \tilde{P}\varphi(x) + S\varphi(x) \qquad$ pour tout $\varphi \in C^2(M) \cap \tilde{\mathcal{U}}$ et $x \in \mathring{M}$.

(β) Pour cela, on désigne, pour chaque $x \in \overset{\circ}{M}$, par $\tilde{\mathcal{U}}^0_x$ le sous-espace de $\tilde{\mathcal{U}}_x$ (lemme 5.6) formé des fonctions $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}_x$ nulles au voisinage de x ; et on remarque que, puisque $C^\infty(M) \subset \tilde{\mathcal{U}}^0_x$ en vertu de l'hypothèse (D'_1), le sous-espace $\tilde{\mathcal{U}}^0_x$ est positivement riche sur l'espace localement compact $M \setminus \{x\}$. La restriction de $\tilde{A}_x$ à $\tilde{\mathcal{U}}^0_x$, qui est une forme linéaire positive en vertu du principe du maximum positif qu'elle satisfait (lemme 5.6), se prolonge donc en une mesure de Radon positive $s(x\ ,\ .)$ sur $M \setminus \{x\}$; mesure qui, de par sa définition même, prolonge la mesure $\tilde{s}(x\ ,\ .)$ ($\tilde{s}$ désignant le noyau singulier de l'opérateur de Levy $\tilde{S}$). Prolongeant alors la mesure $s(x\ ,\ .)$ à $\mathcal{B}_M$ au moyen de la relation $s(x\ ,\ \{x\}) = 0$, et faisant décrire $\overset{\circ}{M}$ à x, on définit un noyau de Levy généralisé sur M : (NSG_1) et (NSG_2) (n° 5.2) étant évidemment satisfaites d'après ce qui précède, il reste à vérifier (NSG_3). Or, σ désignant une fonction unité locale sur $\overset{\circ}{M}$, on montre que, pour tout $f \in C(M)$, $f \geqslant 0$, la fonction

$$x \longrightarrow \int_M s(x\ ,\ dy)(1 - \sigma(x\ ,\ y))\ f(y)$$

est finie et continue sur M par le raisonnement standard déjà utilisé au n° 3.4 et fondé sur la relation

$$\int_M s(x\ ,\ dy)(1 - \sigma(x\ ,\ y))\ f(y) = \tilde{A}((1 - \sigma_x)f)(x)$$

pour chaque $f \in C^\infty(M)$ et $x \in \overset{\circ}{M}$ [62] et le fait que $\tilde{A}$ applique $C^\infty(M)$ dans $C(\overset{\circ}{M})$ (lemme 5.6).

(γ) Ceci étant, on pose, pour $\varphi \in C^2(M)$ et $x \in \overset{\circ}{M}$,

$$(5.8) \qquad S\varphi(x) = \tilde{S}(\sigma_x\ \varphi)(x) + \int_M s(x\ ,\ dy)(1 - \sigma(x\ ,\ y))\ \varphi(y) \quad [63]\ .$$

S, ainsi défini, est l'opérateur de Levy généralisé cherché. En effet, soient $\varphi \in C^2(M) \cap \tilde{\mathcal{U}}$ et $x \in \overset{\circ}{M}$. On remarque d'abord que $(1 - \sigma_x)\varphi \in \tilde{\mathcal{U}}^0_x$: en effet, V_1 étant un voisinage de x sur lequel $(1 - \sigma_x)\varphi$ s'annule, il suffit, pour chaque n, de choisir une fonction $\Psi_n \in C^\infty(M)$ telle que $\Psi_n = 0$ sur V_1 et

$$\|\Psi_n - (1 - \sigma_x)\varphi\| \leqslant \frac{1}{2n}\ ,$$

puis, en vertu de (D'_1), de choisir une fonction $u_n \in \mathcal{D}_A$ telle que

---

[62] Cette relation résulte directement des définitions de s et de $\tilde{A}$, et de ce que $(1 - \sigma_x)f \in \tilde{\mathcal{U}}^0_x$.

[63] σ désignant toujours une fonction unité locale sur $\overset{\circ}{M}$.

$$\|\Psi_n - u_n\| \leqslant \frac{1}{2n}$$

et $u_n = 0$ sur V (V étant le voisinage de x figurant dans (D_1')). Il en résulte, puisque $\varphi \in \tilde{\mathcal{U}} \subset \tilde{\mathcal{U}}_x$, que l'on a aussi $\sigma_x \varphi \in \tilde{\mathcal{U}}_x$; et on peut écrire,

$$(5.9) \qquad \tilde{A}\varphi(x) = \tilde{A}_x(\varphi) = \tilde{A}_x(\sigma_x \varphi) + \tilde{A}_x((1-\sigma_x)\varphi)$$
$$= \tilde{A}_x(\sigma_x \varphi) + \int_M s(x , dy)(1 - \sigma_x(y))\, \varphi(y) \quad ,$$

en vertu de la définition de s . Pour achever la démonstration, il suffit alors de montrer que,

$$(5.10) \qquad \tilde{A}_x(\sigma_x \varphi) = \tilde{W}(\sigma_x \varphi)(x) = \tilde{P}\varphi(x) + \tilde{S}(\sigma_x \varphi)(x) :$$

De (5.9) et (5.10), il résulte d'une part, que S satisfait la relation (5.7) requise, d'autre part qu'il possède, en plus des propriétés (SG_1) et (SG_2) qui résultent immédiatement de (5.8), la propriété (SG_3), puisque, en faisant $\varphi = 1$ dans (5.7) on obtient $S1(x) = \tilde{A}1(x) \leqslant 0$, d'après le principe du maximum de $\tilde{A}$, puisque $\tilde{P}1 = 0$.

Or, $\Psi \to \tilde{A}_x(\Psi)$ et $\Psi \to \tilde{W}\Psi(x)$ étant deux formes linéaires sur l'espace $C_k^2(\mathring{M}) \cap \tilde{\mathcal{U}}_x$ (qui contient $C_k^\infty(\mathring{M})$) satisfaisant au principe du maximum "en x ", on est ramené (compte tenu de ce que $C_k^\infty(\mathring{M})$ est dense dans $C_k^2(\mathring{M})$) au lemme suivant:

LEMME. - Soient $\mathcal{V}$ une variété <u>sans bord</u> (avec les hypothèses et notations du n° 1.1), $\mathcal{Q}$ un sous-espace vectoriel de $C_k^2(\mathcal{V})$ contenant $C_k^\infty(\mathcal{V})$, x un point de $\mathcal{V}$, et T une forme linéaire sur $\mathcal{Q}$ satisfaisant au principe du maximum positif en x :

$$f \in \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad f(x) = \sup f \geqslant 0 \implies T(f) \leqslant 0 \quad .$$

On suppose qu'il existe une fonction $\theta \in C_k^\infty(\mathcal{V})$, à support dans une carte locale (U , χ) de $\mathcal{V}$, comprise entre 0 et 1 et égale à 1 au voisinage de x , telle que

$$f \in \mathcal{Q} \implies \theta f \in \mathcal{Q} \quad .$$

Alors, T est <u>continue</u> sur $\mathcal{Q}$ pour la topologie induite par celle de $C_k^2(\mathcal{V})$.

En effet, d'une part la restriction de T à $\mathcal{Q} \cap C_k^2(U)$ est continue (pour la topologie induite par $C_k^2(U)$) ainsi qu'il résulte, par transport au moyen de χ , de la remarque du n° 2.2 de l'exposé n° 2 ; il en résulte que l'application $f \to T(\theta f)$ est continue. D'autre part, l'application $f \to T((1-\theta)f)$ est

est une forme linéaire positive sur $\mathfrak{D}$, donc continue pour la topologie induite par $C_k(\mathcal{V})$, et a fortiori par $C_k^2(\mathcal{V})$.

C. Q. F. D.

§ 6. Conclusion : Construction de semi-groupes de Feller sur une variété à bord et résolutions de problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre.

6.1. - Les résultats présentés aux paragraphes 4 et 5 ci-dessus (théorème 4.8, et théorème 5.4) engagent à poser comme suit le problème de la construction des semi-groupes de Feller sur la variété à bord compacte M pour lesquels le domaine de définition du générateur infinitésimal contient "suffisamment" de fonctions de classe C^2 :

1° On suppose donnés ([64]) :

- une fonction $\delta \geqslant 0$ de $B(\partial M)$ et un opérateur frontière de Ventcel' Γ sur M (n° 4.8),
- un opérateur de Waldenfels généralisé W sur M (n° 5.3).

2° On désigne par $\mathfrak{D}$ le sous-espace de $C^2(M)$ formé des fonctions $u \in C^2(M)$ telles que, pour tout $x' \in \partial M$:

$$\lim_{\substack{x \to x' \\ x \in \overset{\circ}{M}}} Wu(x') \quad \text{existe} \qquad (\text{on note } Wu(x') \text{ cette limite}) \,, \tag{6.1}$$

et

$$\delta(x')\, Wu(x') = \Gamma u(x') \quad . \tag{6.2}$$

3° On cherche un semi-groupe de Feller (N_t) sur M (appendice 1, n° A.1) dont le générateur infinitésimal $(\mathfrak{D}_A , A)$ ait les propriétés suivantes :

$$C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D} \quad , \tag{6.3}$$

$$Au = Wu \qquad \text{pour tout } u \in C^2(M) \cap \mathfrak{D}_A \quad . \tag{6.4}$$

6.2. - Grâce au théorème de Hille-Yosida-Ray (appendice, n° A.4) on peut aborder cette construction, en considérant l'opérateur (non partout défini) $(\mathfrak{D} , W)$ sur $C(M)$, et en s'attachant à montrer les propriétés (1), (2) et (3) (ou (3')) du n° A.4.

([64]) Avec les mêmes hypothèses sur M qu'au § 5 (n° 5.1).

6.3. - Pour cela, on se placera, dans les exposés n° 4 et 6, dans un cadre plus restrictif, en particulier on supposera que,

- W est un opérateur de Waldenfels décomposable sur M (n° 5.3), et pas seulement un opérateur de Waldenfels généralisé,
- δ et Γ sont de classe C^0 [65].

La propriété (3'), par exemple, revient alors à la résolution du problème aux limites :

$$(6.5) \qquad u \in C^2(M) \ , \quad -Au = f \ , \quad \Gamma u - \delta\gamma^0 Wu = 0$$

pour un ensemble dense dans $C(M)$ de seconds membres f.

On verra dans l'exposé n° 4 comment la possibilité de résoudre un tel problème aux limites est liée au principe du maximum positif sous sa forme faible (propriété (2) du théorème de Hille-Yosida-Ray, appendice n° A.4) qui assure l'unicité de la solution.

On verra enfin dans l'exposé n° 6 que, selon un résultat de SATO et UENO dans [9], la densité de $\mathcal{D}$ (propriété (1)) est aussi conséquence de la résolution du problème aux limites (6.5).

Appendice

Semi-groupes de Feller et théorème de Hille-Yosida-Ray

Dans tout cet appendice, on désigne par E un espace localement compact à base dénombrable d'ouverts (espace LCD), et par $C_0(E)$ l'espace des fonctions numériques continues sur E tendant vers zéro à l'infini.

$C_0(E)$ est muni de la norme uniforme $\| \ \|$ qui en fait un espace de Banach. Lorsque E est compact, $C_0(E)$ est identique à l'espace $C(E)$.

A.1. - Un semi-groupe de Feller sur E est un semi-groupe $(N_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach $C_0(E)$

$$(N_t \, N_s = N_{t+s} \ , \quad \forall \ t \ , s \geq 0 \ ; \quad N_0 = \underset{\sim}{1}) \ ,$$

---

[65] On ne décrit ici que le cadre très général : il faudra faire, en plus, une hypothèse de régularité des opérateurs (caractère höldérien), des hypothèses d'ellipticité, et une hypothèse de transversalité de Γ dans le genre de (4.20) (n° 4.9, alinéa (d)).

fortement continu $(\lim_{t\downarrow 0} \|N_t f - f\| = 0 \ , \ \forall f \in C_0(E))$, et tel que, pour tout $t \geqslant 0$,

(A.1) $$f \in C_0(E) \text{ et } 0 \leqslant f \leqslant 1 \implies 0 \leqslant N_t f \leqslant 1 \ .$$

Le générateur infinitésimal $(\mathcal{D}_A , A)$ du semi-groupe (N_t) sera toujours entendu au sens fort : $\mathcal{D}_A$ est l'ensemble des $u \in C_0(E)$ tels que $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} (N_t u - u)$ existe dans $C_0(E)$, et, pour $u \in \mathcal{D}_A$,

(A.2) $$Au = \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} (N_t u - u) \ .$$

Le générateur infinitésimal $(\mathcal{D}_A , A)$ détermine entièrement le semi-groupe (N_t) .

La résolvante du semi-groupe de Feller (N_t) est, comme d'ordinaire, la famille $(G_\lambda)_{\lambda>0}$ d'opérateurs linéaires bornés de $C_0(E)$ dans $C_0(E)$ définis par :

(A.3) $$G_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} N_s f(x)\, ds \qquad (f \in C_0(E) \ , \ x \in E \ , \ \lambda > 0) \ .$$

Et, pour chaque $\lambda > 0$,

(A.4) $$f \in C_0(E) \text{ et } 0 \leqslant f \leqslant 1 \implies 0 \leqslant G_\lambda f \leqslant \frac{1}{\lambda} \ ,$$

et

(A.5) $\lambda - A$ est injectif , et $G_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ [66] .

A.2. - On dira que le semi-groupe de Feller (N_t) sur E est intégrable [67] si, pour chaque $f \in C_0(E)$, $f \geqslant 0$, la fonction $x \to \int_0^\infty N_t f(x)\, dt$ appartient aussi à l'espace $C_0(E)$. On définit alors un opérateur linéaire positif G de $C_0(E)$ dans lui-même en posant, pour $f \in C_0(E)$ et $x \in E$,

(A.6) $$Gf(x) = \int_0^\infty N_t f(x)\, dt \ .$$

G sera appelé le potentiel du semi-groupe intégrable (N_t) .

LEMME. - Soient (N_t) un semi-groupe de Feller sur E , $(\mathcal{D}_A , A)$ son générateur infinitésimal, et $(G_\lambda)_{\lambda>0}$ sa résolvante. Pour que (N_t) soit intégrable,

---

[66] $\mathcal{D}_A = G_\lambda(C_0(E))$ et $(\lambda - A)G_\lambda f = f$ pour tout $f \in C_0(E)$.

[67] Voir la remarque du n° A.5.

il faut et il suffit que A applique injectivement $\mathcal{D}_A$ sur $C_0(E)$; et alors, si G est le potentiel de (N_t) ,

(A.7) $G = - A^{-1}$ ([68]) et $G_\lambda = G(\underset{\sim}{1} + \lambda G)^{-1}$ pour $\lambda < \frac{1}{\|G\|}$.

A.3. - Le générateur infinitésimal $(\mathcal{D}_A , A)$ d'un semi-groupe de Feller (N_t) satisfait au <u>principe du maximum positif</u> :

(A.8) Pour tout $u \in \mathcal{D}_A$ et $x \in E$, $u(x) = \sup u \geqslant 0 \implies Au(x) \leqslant 0$

(en effet, il suffit d'écrire

$$\frac{1}{t}(N_t u(x) - u(x)) = \frac{1}{t}\int_E N_t(x , dy)(u(y) - u(x)) + \frac{u(x)}{t}(N_t 1(x) - 1) ,$$

et d'utiliser la propriété (A.1) du semi-groupe (N_t)).

Inversement :

A.4. THÉORÈME (HILLE-YOSIDA-RAY). - Soient $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel de $C_0(E)$, et D une application linéaire de $\mathcal{D}$ dans $C_0(E)$. On suppose que :

(1) $\mathcal{D}$ est dense dans $C_0(E)$;

(2) Pour tout $u \in \mathcal{D}$, tel que $\sup u > 0$, il existe $x \in E$ tel que

$$u(x) = \sup u \quad \text{et} \quad Du(x) \leqslant 0 ;$$

(3) Il existe $\lambda \geqslant 0$, tel que $\lambda - D$ applique $\mathcal{D}$ sur un sous-espace dense de $C_0(E)$.

Alors, l'opérateur $(\mathcal{D} , D)$ est préfermé dans $C_0(E)$, et sa fermeture $(\hat{\mathcal{D}} , \hat{D})$ est le générateur infinitésimal d'un unique semi-groupe de Feller (N_t) sur E .

COROLLAIRE. - Si, en plus de (1) et (2), on a aussi,

(3') D applique $\mathcal{D}$ sur un sous-espace dense de $C_0(E)$,

alors le semi-groupe (N_t) obtenu (il est clair que (3') $\implies$ (3)), est <u>intégrable</u> ([69]).

On trouvera une démonstration du théorème de Hille-Yosida-Ray à partir du théorème de Hille-Yosida dans SATO et UENO [9], p. 535.

([68]) $\mathcal{D}_A = G(C_0(E))$ et $- AGf = f$ pour tout $f \in C_0(E)$.

([69]) Ce corollaire est une forme du théorème de Hunt de la théorie du potentiel ; voir [11], exposés n° 6 et 7.

Le corollaire résulte du théorème et du lemme A.2.

A.5. Remarque. - La définition d'un semi-groupe intégrable adopté ici (n° A.2) ne coïncide pas avec celle utilisée parfois en théorie du potentiel (voir l'exposé n° 9 de [11], p. 9-01) : la propriété introduite ici est beaucoup plus forte ; c'est elle uniquement qui interviendra dans les exposés n° 4, 5 et 6 de ce séminaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADE (W. G.) and FREEMAN (R. S.). - Closed extensions of the Laplace operator determined by a general class of boundary conditions, Pacific J. of Math., t. 12, 1962, p. 395-410.

[2] BEALS (Richard). - Non local elliptic boundary value problems, Bull. Amer. math. Soc., t. 70, 1964, p. 693-696.

[3] DYNKIN (E. B.). - Markovskie processy. - Moscou, 1963. [En traduction :] Markov processes, 1 und 2. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 121 und 122).

[4] FELLER (William). - The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, Annals of Math., Series 2, t. 55, 1952, p. 468-519.

[5] FELLER (William). - Generalized second order differential operators and their lateral conditions, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 459-504.

[6] HÖRMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).

[7] HÖRMANDER (Lars). - Pseudo-differential operators, Comm. pure and appl. Math., t. 18, 1965, p. 501-517.

[8] PEETRE (Jaak). - Rectification à l'article "Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels", Math. Scand., t. 8, 1960, p. 116-120.

[9] SATO (K.) and UENO (T.). - Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., t. 4, 1965, p. 529-605.

[10] Séminaire Bourbaki, 18e année, 1965/66.

[11] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 5e année, 1960/61. - Paris, Secrétariat mathématique, 1961.

[12] Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, 10e année, 1965/66.

[13] STAMPACCHIA (Guido). - Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du 2e ordre à coefficients discontinus, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, fascicule 1, p. 189-258 (Colloques internationaux du C. N. R. S. : La théorie du potentiel [146. 1964. Orsay], p. 189-257).

[14] VENTCEL' (A. D.). - O Graničykh uslovijakh dlja mnogomernykh diffuzionnykh processov, Teor. Veroj. i Primen., t. 4, 1959, p. 172-185 ; On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, Theor. Prob. and Appl., t. 4, 1959, p. 164-177.

[15] VIŠIK (M. I.). - **Sur les problèmes aux limites généraux pour les équations** différentielles elliptiques[en russe], Trudy Mosk. Mat. Obšč., t. 1, 1952, p. 187-246 ; Doklady Akad. Nauk SSSR, N. S., 1952, p. 181-184.

[16] von WALDENFELS (W.). - Positive Halfgruppen auf einem n-dimensionalen Torus, Archiv der Math., t. 15, 1964, p. 191-203.

[17] YOSIDA (Kôsaku). - Functional analysis. - Berlin, Springer-Verlag, 1965 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 123).