Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

ROLAND DURIER

# Travaux de Kishi sur les relations entre divers principes de théorie du potentiel

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 9 (1964-1965), exp. n° 8, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A5_0>

# TRAVAUX DE KISHI
# SUR LES RELATIONS ENTRE DIVERS PRINCIPES DE THÉORIE DU POTENTIEL

par Roland DURIER

Les principaux résultats obtenus par Masanori KISHI ([4] et [5]) concernent les relations entre des principes usuels de théorie du potentiel dans le cas d'un noyau non symétrique.

Le cadre général de cette étude est le suivant :
$\Omega$ est un espace localement compact dont tous les compacts sont métrisables (1).
$G$ est une fonction définie sur $\Omega \times \Omega$, à valeurs dans $]0, +\infty]$, semi-continue inférieurement, et vérifiant : $G(x, y) < +\infty$ pour $x \neq y$. Pour abréger, on dira que $G$ est un noyau sur $\Omega$ lorsqu'il possède ces propriétés.
On note $G^*$ le noyau (adjoint de $G$) défini par $G^*(x, y) = G(y, x)$. Lorsque $G = G^*$, on dit que le noyau $G$ est symétrique ; cette hypothèse ne sera jamais faite dans la suite.

Pour toute mesure de Radon $\mu$, positive sur $\Omega$, on définit le $G$-potentiel (resp. le $G^*$-potentiel) de $\mu$ par

$$G\mu(x) = \int G(x, y)\, d\mu(y) \qquad (\text{resp. } G^*\mu(x) = \int G^*(x, y)\, d\mu(y)) .$$

L'énergie d'une telle mesure $\mu$ est le nombre (positif ou nul, fini ou non) :

$$I(\mu) = \int G\mu(x)\, d\mu(x) = \int G^*\mu(x)\, d\mu(x) .$$

On notera :
$\mathfrak{M}$ : l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\Omega$, à support compact,
$\mathfrak{M}(K)$ : l'ensemble des mesures de $\mathfrak{M}$ à support dans le compact $K$,
$\mathcal{E}$ : l'ensemble des mesures de $\mathfrak{M}$ d'énergie finie,
$S\mu$ : le support d'une mesure $\mu$ de $\mathfrak{M}$.

On appelle ensemble exceptionnel une partie de $\Omega$ qui est de mesure nulle pour toute mesure de $\mathcal{E}$ ; une propriété vraie en tout point du complémentaire d'un ensemble exceptionnel sera dite vraie à peu près partout (en abrégé : a. p. p. p.).

Noyau régulier : on dit que $G$ est régulier (ou satisfait au principe de continuité) si, quelle que soit la mesure $\mu$ de $\mathfrak{M}$, la continuité de la restriction

---

(1) Cette hypothèse de dénombrabilité n'est pas indispensable. En particulier, le lemme fondamental de Kishi reste valable sans cette restriction (NAKAI [6]).

de $G\mu$ à $S\mu$ entraîne la continuité de $G\mu$ sur $\Omega$ .

## 1. Le lemme fondamental de Kishi.

LEMME fondamental. - *Soit* $G$ *un noyau sur* $\Omega$ *dont l'adjoint* $G^*$ *est régulier. Pour tout compact* $K$ *non vide de* $\Omega$ *et pour toute fonction* $u$ *finie, strictement positive, continue sur* $K$ , *il existe une mesure* $\tau \in \mathfrak{M}(K)$ *satisfaisant à* :

$$G\tau(x) \geqslant u(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\tau(x) \leqslant u(x) \quad \text{partout sur } S_\tau .$$

Ce résultat est bien connu lorsque le noyau est symétrique : il peut être obtenu en minimisant une intégrale de Gauss. Mais cette méthode n'est pas applicable ici. La démonstration se fait en trois étapes :

- $K$ est un ensemble fini,
- $K$ est quelconque et $G$ est fini continu sur $K \times K$ ,
- $K$ est quelconque et $G$ est semi-continu inférieurement sur $K \times K$ .

1° $K$ *est un ensemble fini de* $n$ *points*.

Le lemme fondamental peut s'énoncer sous la forme suivante :

LEMME 1. - *Pour tous systèmes* $(a_{ij})$ *et* $(u_i)$ $(i , j = 1 , 2 , \ldots , n)$ *de nombres strictement positifs, il existe un système* $t_j$ $(j = 1 , 2 , \ldots , n)$ *de nombres positifs satisfaisant à*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j \geqslant u_i \qquad \text{pour } i = 1 , 2 , \ldots , n ,$$

*l'égalité ayant sûrement lieu pour tout* $k$ *tel que* $t_k \neq 0$ .

On peut se ramener à $u_i = 1$ , quel que soit $i$ , en remplaçant $a_{ij}$ par $\frac{a_{ij}}{u_i}$ (puisque $u_i > 0$ ).

En outre les conditions

$$\forall\, i = 1 , 2 , \ldots , n \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j \geqslant 1$$

et

$$\forall\, k \text{ tel que } t_k \neq 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, t_j = 1 ,$$

équivalent à

$$\forall\, i = 1 , 2 , \ldots , n \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_i \sum_j a_{ij}\, t_i\, t_j = \sum_k t_k .$$

Le lemme 1 est donc équivalent à :

LEMME 1'. - Pour tout système $(a_{ij})$ $(i , j = 1 , 2 , \dots , n)$ de nombres strictement positifs, il existe un système $(t_j)$ $(j = 1 , 2 , \dots , n)$ de nombres positifs satisfaisant à :

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \geqslant 1$ pour $i = 1 , 2 , \dots , n$ et $\sum_i \sum_j a_{ij} t_j t_i = \sum_k t_k$ .

Suivant NAKAI ([6]), nous utiliserons le théorème important suivant :

THÉORÈME du point fixe de Kakutani ([1] , [3]). - Soit $X$ un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ , et soit $f$ une application de $X$ dans l'ensemble des parties convexes non vides de $X$ . On suppose en outre que, pour toutes suites $(x_p)$ et $(y_p)$ d'éléments de $X$ telles que $y_p \in f(x_p)$ , $\lim_{p\to\infty} x_p = x$ , et $\lim_{p\to\infty} y_p = y$ , on a $y \in f(x)$ . Alors il existe $x \in X$ tel que $x \in f(x)$ .

Considérons la forme bilinéaire $\varphi$ associée à $(a_{ij})$ : si

$$x = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad y = (y_1 , y_2 , \dots , y_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

on pose

$$\varphi(x , y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad .$$

On note $X$ l'ensemble :

$$\{x = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in \mathbb{R}^n ; \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 , \ x_i \geqslant 0 \ (i = 1 , 2 , \dots n)\} ;$$

$X$ est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ . $\varphi$ est continue sur $X \times X$ ; donc, pour $x$ fixé dans $X$ , il existe $y \in X$ tel que

$$\inf_{z\in X} \varphi(z , x) = \varphi(y , x) .$$

On pose

$$f(x) = \{y \in X ; \ \inf_{z\in X} \varphi(z , x) = \varphi(y , x)\} ;$$

$f(x)$ est un convexe non vide de $X$ , et l'application $f$ possède la propriété de "continuité" du théorème de Kakutani. Donc il existe $x \in X$ tel que $x \in f(x)$ , c'est-à-dire tel que

(2) $$\forall\ z \in X \qquad \varphi(z , x) \geqslant \varphi(x , x) > 0 .$$

On définit $t \in \underset{\sim}{R}^n$ par $t_i = \frac{x_i}{\varphi(x , x)}$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$. Vérifions que cet élément $t$ répond aux conditions (1) du lemme 1'. On a

$$\varphi(t , t) = \frac{1}{\varphi(x , x)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{\sum_{n=1}^{n} x_i}{\varphi(x , x)} = \frac{1}{\varphi(x , x)} = \sum_i \sum_j a_{ij}\, t_j\, t_i \ .$$

En outre, $\forall\, z \in X$ , $\varphi(z , t) \geqslant 1$. En appliquant ceci à $z = \delta_i$ (le i-ième vecteur de la base canonique de $\underset{\sim}{R}^n$ ), on obtient

$$\varphi(\delta_i , t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j \geqslant 1 \ .$$

<u>Remarque</u>. - Si l'on désigne par $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ les $n$ points de $K$ et si l'on pose $G(x_i , x_j) = a_{ij}$ , les formules (1) et (2) s'interprètent en termes de théorie du potentiel par rapport au noyau $G$ sur l'ensemble fini $K$.

(a) Il existe une mesure $\tau$ positive telle que

$$G\tau(x) \geqslant 1 \quad \text{sur } K \qquad \text{et} \qquad I(\tau) = \int d\tau \quad (\text{masse totale de } \tau) \ .$$

(b) Il existe une mesure $\mu$ positive de masse 1 telle que, quelle que soit la mesure $\nu$ positive de masse 1 , on ait $\int G\mu \, d\nu \geqslant I(\mu)$ .

2° $K$ <u>est un compact (métrisable) de</u> $\Omega$ <u>et</u> $G$ <u>est continue sur</u> $K \times K$ .

LEMME 2. - <u>Soit</u> $G$ <u>une fonction finie, continue, strictement positive sur</u> $K \times K$ , <u>et soit</u> $u$ <u>une fonction finie, continue, strictement positive sur</u> $K$ . <u>Alors il existe une mesure</u> $\tau \in \mathfrak{M}(K)$ <u>satisfaisant à</u> :

$$G\tau(x) \geqslant u(x) \quad \underline{\text{sur}}\ K \qquad \underline{\text{et}} \qquad G\tau(x) = u(x) \quad \underline{\text{sur}}\ S_\tau \ .$$

<u>Démonstration</u>. - $K$ étant métrisable, il est séparable, et il existe dans $K$ une suite partout dense $D = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_n , \ldots\}$ . Posons

$$D_n = \{x_1 , x_2 , \ldots , x_n\} \ .$$

En vertu du lemme 1, quel que soit $n$ , il existe une mesure $\tau_n \in \mathfrak{M}(D_n)$ telle que

$$G\tau_n(x) \geqslant u(x) \quad \text{sur } K \qquad \text{et} \qquad G\tau_n(x) = u(x) \quad \text{sur } S_{\tau_n} \ .$$

Posons :

$$\alpha = \inf_{(x,y)\in K\times K} G(x , y) > 0 \qquad \text{et} \qquad \beta = \sup_{x\in K} u(x) < +\infty \ .$$

Soit $x \in S_{\tau_n}$ . On a :

$$\alpha \int d\tau_n \leqslant \int G(x , y) \, d\tau_n(y) = G\tau_n(x) = u(x) \leqslant \beta .$$

Donc l'ensemble des masses totales des mesures positives $\tau_n$ est majoré : l'ensemble des mesures $(\tau_n)$ est relativement compact, donc il existe une sous-suite convergente, qu'on notera encore $(\tau_n)$ . Soit $\tau$ la limite de cette sous-suite. Vérifions que cette mesure $\tau$ convient.

Il est clair que la famille des fonctions $G\tau_n$ est équicontinue sur $K$ .

- Soit $x \in S_\tau = \cap S_{\tau_n}$ . Il existe une suite $(x_n)$ telle que $x_n \in S_{\tau_n}$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ . Grâce à la propriété d'équicontinuité des $G\tau_n$ , on a

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} G\tau_n(x_n) = G\tau(x) .$$

- Soit $x \in K$ : $\forall \varepsilon > 0$ , $\exists \omega$ , voisinage de $x$ , tel que $\forall x' \in \omega$ , $\forall n$ ,

(3) $\qquad G\tau_n(x) + \frac{\varepsilon}{3} > G\tau_n(x') \qquad$ (équicontinuité des $G\tau_n$ ) ,

(4) $\qquad u(x') + \frac{\varepsilon}{3} > u(x) \qquad$ (continuité de $u$ ) .

Pour $n$ assez grand,

(5) $\qquad G\tau(x) + \frac{\varepsilon}{3} > G\tau_n(x) \qquad$ (convergence vague de $(\tau_n)$ ) .

Enfin, $D$ étant dense dans $K$ , pour $n$ assez grand, tel que $D_n \cap \omega \neq \emptyset$ ,

(6) $\qquad \forall x' \in D_n \cap \omega \qquad G\mu_n(x') \geqslant u(x')$ .

De (3) , (4) , (5) , (6) , on déduit, $\forall \varepsilon > 0$ , $G\tau(x) + \varepsilon > u(x)$ , donc

$$G\tau(x) \geqslant u(x) .$$

Voici un corollaire du lemme 2 que nous utiliserons dans le § 4.

COROLLAIRE. - Soit $G$ une fonction finie, continue, strictement positive sur $K \times K$ , et soit $u$ une fonction finie, continue, strictement positive sur $K$ . Alors il existe une mesure $\sigma \in \mathfrak{M}(K)$ satisfaisant à

$$G\sigma(x) \leqslant u(x) \quad \text{sur } K \quad \text{et} \quad G\sigma(x) = u(x) \quad \text{sur } S_\sigma .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $M$ un nombre tel que $M > \max_{K\times K} G(x , y)$ . Posons

$$G'(x , y) = M - G(x , y) .$$

$G'$ est finie, continue, strictement positive sur $K \times K$ . Le lemme 2 entraîne l'existence d'une mesure $\sigma' \in \mathfrak{M}(K)$ vérifiant :

$$G'\sigma'(x) \geqslant u(x) \quad \text{sur } K \qquad \text{et} \qquad G'\sigma'(x) = u(x) \quad \text{sur } S_{\sigma'} ,$$

c'est-à-dire

$$M \int d\sigma' - u(x) \geqslant G\sigma'(x) \quad \text{sur } K \qquad \text{et} \qquad M \int d\sigma' - 1 = G\sigma' \quad \text{sur } S_{\sigma'} .$$

La fonction $v(x) = M \int d\sigma' - u(x)$ est strictement positive sur $K$, et la mesure $\sigma = \frac{1}{v} \sigma'$ répond aux conditions demandées.

3° $K$ <u>est un compact quelconque (métrisable) de</u> $\Omega$ <u>et</u> $G$ <u>un noyau sur</u> $\Omega$.

La démonstration du lemme fondamental utilise le lemme 2 et un théorème de convergence (BRELOT-CHOQUET [2]).

LEMME 3. - <u>Soit</u> $G$ <u>un noyau sur un espace compact</u> $X$ <u>tel que l'adjoint</u> $G^*$ <u>soit régulier. Si une suite</u> $(\tau_n)$ <u>de mesures positives sur</u> $X$ <u>converge vaguement vers</u> $\tau$, <u>alors</u>

$$\underline{\lim}\, G\tau_n(x) = G\tau(x) \quad \text{a. p. p. p. dans } X .$$

La semi-continuité inférieure de $G$ entraîne

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} G\tau_n(x) \geqslant G\tau(x) \qquad \text{partout dans } X .$$

Supposons que l'on n'ait pas : $\underline{\lim}\, G\tau_n(x) \leqslant G\tau(x)$ a. p. p. p. dans $X$ ; alors, il existe une mesure $\nu$, de masse 1 et d'énergie finie, telle que

$$\underline{\lim}\, G\tau_n(x) > G\tau(x) \qquad \text{sur } S_\nu .$$

Puisque $\int G^*\nu \, d\nu = \int G\nu \, d\nu < +\infty$, $G^*\nu$ est $\nu$-mesurable ; donc il existe un compact $K_1 \subset S_\nu$ tel que la restriction à $K_1$ de $G^*\nu$ soit finie continue. Appelons $\nu_1$ la restriction de $\nu$ à $K_1$. La restriction à $S_{\nu_1}$ de $G^*\nu_1$ est continue ; grâce à la régularité de $G^*$, $G^*\nu_1$ est continue sur $X$. D'où

$$\int G\tau \, d\nu_1 < \int \underline{\lim}\, G\tau_n \, d\nu_1 \leqslant \underline{\lim} \int G\tau_n \, d\nu_1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int G^*\nu_1 \, d\tau_n = \int G^*\nu_1 \, d\tau = \int G\tau \, d\nu_1 .$$

La contradiction mise en évidence prouve qu'on a

$$\underline{\lim}\, G\tau_n(x) \leqslant G\tau(x) \qquad \text{a. p. p. p. dans } X .$$

<u>Démonstration du lemme fondamental</u>. - $G$ étant semi-continu inférieurement sur $K \times K$, compact métrisable, il existe une suite croissante $G_n$ de noyaux finis, continus, strictement positifs sur $K \times K$, tels que $\lim_{n\to\infty} G_n(x, y) = G(x, y)$.

En vertu du lemme 2 :

$$\forall\, n\ ,\quad \exists\, \tau_n \in \mathfrak{M}(K) :\quad \begin{array}{ll} G_n\, \tau_n(x) \geqslant u(x) & \text{sur } K\ , \\ G_n\, \tau_n(x) = u(x) & \text{sur } S_{\tau_n}\ . \end{array}$$

La suite des mesures $(\tau_n)$ est bornée, donc relativement compacte. Il existe une sous-suite, qu'on notera encore $(\tau_n)$, convergeant vers une mesure $\tau$.

Vérifions que cette mesure $\tau$ convient.

En appliquant le lemme 3 :

$$G\tau(x) = \underline{\lim}\, G\tau_n(x) \geqslant \underline{\lim}\, G_n\, \tau_n(x) \geqslant u(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K\ .$$

D'autre part, soit $x \in S_\tau$ et soit $(x_n)$ une suite : $x_n \in K$ telle que

$$x_n \in S_{\tau_n} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x\ .$$

Quel que soit $n_0$ fixé, on a

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u(x_n) = \lim_{n\to\infty} G_n\, \tau_n(x_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} G_{n_0}\, \tau_n(x_n) = G_{n_0}\, \tau(x)$$

(la suite $G_n$ est croissante, $G_{n_0}$ est continu, et $\tau_n$ converge vaguement vers $\tau$ ).

En faisant tendre $n_0$ vers $+\infty$, on trouve

$$\forall\, x \in S_\tau\ , \qquad u(x) \geqslant G\tau(x)\ .$$

## 2. Principes de domination et de balayage.

1° Afin d'obtenir des relations entre les principes de domination et de balayage, on énonce un théorème faisant intervenir des principes un peu plus généraux.

Soit $u$ une fonction définie sur $\Omega$, strictement positive, semi-continue inférieurement et non identique à $+\infty$, et soit $v$ une fonction quelconque sur $\Omega$, non identique à $+\infty$, et vérifiant $u \leqslant v$. Considérons les propositions :

(a) $\forall\, K$ compact de $\Omega$, $\exists\, \mu \in \mathfrak{M}(K)$ vérifiant

$$G\mu(x) \geqslant u(x) \ \text{ a. p. p. p. sur } K \qquad \text{et} \qquad G\mu(x) \leqslant v(x) \ \text{ partout sur } \Omega\ .$$

(b) $\forall\, \mu \in \mathcal{E}\ \ (G\mu(x) \leqslant u(x) \text{ sur } S_\mu) \Longrightarrow (G\mu(x) \leqslant v(x) \text{ sur } \Omega)$ .

THÉORÈME 1.

- Si $G$ est régulier, alors (a) $\Longrightarrow$ (b) .
- Si $G^*$ est régulier, alors (b) $\Longrightarrow$ (a) .

Définitions. - $u$ et $v$ étant données, on dira que $G$ satisfait au principe de l'équilibre (resp. du maximum) relativement à $(u , v)$ si $G$ vérifie la proposition (a) (resp. (b)).

Du théorème 1, on déduit que, si $G$ et $G^*$ sont réguliers, alors il y a équivalence entre les principes de l'équilibre et du maximum relativement à $(u , v)$ .

Démonstration du théorème 1.

($\alpha$) On suppose $G$ régulier et satisfaisant au principe d'équilibre relativement à $(u , v)$ . On donne $\mu \in \mathcal{E}$ vérifiant $G\mu(x) \leqslant u(x)$ sur $S\mu$ . Soit $x_0 \notin S\mu$: on veut prouver que $G\mu(x_0) \leqslant v(x_0)$ .

En notant $\varepsilon_{x_0}$ la mesure ponctuelle en $x_0$ , de masse $1$ , on peut écrire :

$$G\mu(x_0) = \int G\mu(y)\, d\varepsilon_{x_0}(y) = \int G^*\varepsilon_{x_0}(y)\, d\mu(y) .$$

$G^*\varepsilon_{x_0}$ est une fonction semi-continue inférieurement sur le compact métrisable $S\mu$ . Il existe donc une suite croissante $(f_n)$ de fonctions continues sur $S\mu$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = G^*\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{sur } S\mu .$$

Appliquons le lemme fondamental au noyau $G^*$ , au compact $S\mu$ , et à $f_n$ .

$\forall n , \exists \tau_n \in \mathfrak{M}(S\mu) :\quad G\tau_n(x) \geqslant f_n(x)$ a.p.p.p. sur $S\mu$ et $G\tau_n(x) \leqslant f_n(x)$ sur $S_{\tau_n}$ ,

alors,

$$\int G^*\varepsilon_{x_0}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int G^*\tau_n . d\mu \leqslant \underline{\lim} \int G\mu\, d\tau_n \leqslant \underline{\lim} \int u . d\tau_n .$$

Notons $\nu_n$ la mesure d'équilibre sur $S_{\tau_n}$ relativement à $(u , v)$ .

$$\int u\, d\tau_n \leqslant \int G\nu_n\, d\tau_n = \int G^*\tau_n\, d\nu_n \leqslant \int f_n\, d\nu_n \leqslant \int G^*\varepsilon_{x_0}\, d\nu_n$$
$$= \int G\nu_n\, d\varepsilon_{x_0} \leqslant \int v\, d\varepsilon_{x_0} = v(x_0) .$$

Donc, $G\mu(x_0) \leqslant v(x_0)$ .

($\beta$) On suppose $G^*$ régulier et satisfaisant au principe du maximum relativement à $(u , v)$ . Soit $K$ un compact de $\Omega$ .

Il existe une suite croissante $(u_n)$ de fonctions continues sur $K$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ sur $K$. Appliquons le lemme fondamental au noyau $G$, au compact $K$, et à la fonction $f_n$ :

$$\forall n , \exists\, \mu_n \in \mathfrak{M}(K) : \quad G\mu_n(x) \geq u_n(x) \text{ a.p.p.p. sur } K \quad \text{et} \quad G\mu_n \leq u_n \text{ sur } S\mu_n ;$$

$\mu_n$ est d'énergie finie, car $G\mu_n(x) \leq u_n(x)$ sur $S\mu_n$. On a $G\mu_n \leq u$ sur $S\mu_n$, donc, par le principe du maximum, $G\mu_n(x) \leq v(x)$ partout sur $\Omega$. Soit $x_1$ tel que $v(x_1) < +\infty$ et $\alpha = \inf\limits_{K\times K} G(x , y) > 0$. On a

$$\alpha \int d\mu_n \leq \int G(x_1 , y)\, d\mu_n(y) = G\mu_n(x_1) \leq v(x_1) < +\infty .$$

L'ensemble des mesures $(\mu_n)$ est relativement compact : il existe une sous-suite, qu'on note encore $(\mu_n)$, qui converge vers une mesure $\mu$. On a

$$G\mu(x) \leq \underline{\lim}\, G\mu_n(x) \leq v(x) \quad \text{sur } \Omega ,$$

et, grâce au théorème de convergence (lemme 3),

$$G\mu(x) = \underline{\lim}\, G\mu_n(x) \geq \lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K .$$

La mesure $\mu$ est bien la mesure d'équilibre sur $K$ relativement à $(u , v)$.

Remarques.

- Lorsque $u = v = 1$, les principes d'équilibre et de maximum relativement à $(u , v)$ sont les principes d'équilibre et du maximum classiques. On peut énoncer sommairement :

  (i) Si $G$ est régulier, alors l'équilibre entraîne le maximum.

  (ii) Si $G^*$ est régulier, alors le maximum entraîne l'équilibre.

- Pour $u = 1$ et $v = k$, constante $\geq 1$, le principe du maximum relativement à $(u , v)$ est le principe du maximum $k$-dilaté. Le théorème 1 permet de lier ce principe du maximum $k$-dilaté à un principe d'équilibre.

2° On aborde maintenant les principes usuels de domination et de balayage sous la forme suivante :

DÉFINITION 1. - On dit que $G$ satisfait au principe de domination si

$$\forall \mu \in \mathcal{E} , \ \forall \nu \in \mathfrak{M} : \quad (G\mu(x) \leq G\nu(x) \text{ sur } S\mu) \implies (G\mu(x) \leq G\nu(x) \text{ sur } \Omega) .$$

DÉFINITION 2. – On dit que $G$ satisfait au principe de domination élémentaire si

$$\forall \mu \in \mathcal{E}\ ,\ \forall x_0 \notin S\mu\ ,\ \forall a > 0 :\quad (G\mu(x) \leqslant aG\varepsilon_{x_0}(x) \text{ sur } S\mu) \Longrightarrow (G\mu(x) \leqslant aG\varepsilon_{x_0}(x) \text{ sur } \Omega).$$

DÉFINITION 3. – On dit que $G$ satisfait au principe du balayage si :

$\forall$ compact $K$ de $\Omega$ , $\forall \mu \in \mathcal{M}$ , $\exists \mu' \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G\mu'(x) \leqslant G\mu(x) \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad G\mu'(x) \geqslant G\mu(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K .$$

DÉFINITION 4. – On dit que $G$ satisfait au principe du balayage élémentaire si :

$\forall$ compact $K$ de $\Omega$ , $\forall x_0 \notin K$ , $\exists \mu' \in \mathcal{M}(K)$ vérifiant :

$$G\mu'(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad G\mu'(x) \geqslant G\mu(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K .$$

THÉORÈME 2. – <u>Si</u> $G$ <u>et</u> $G^*$ <u>sont des noyaux réguliers, alors les</u> 8 <u>propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(1) $G$ <u>satisfait au principe de</u> domination.

(2) $G^*$ <u>satisfait au principe de</u> domination.

(3) $G$ <u>satisfait au principe du</u> balayage.

(4) $G^*$ <u>satisfait au principe du</u> balayage.

(5) $G$ <u>satisfait au principe de</u> domination élémentaire.

(6) $G^*$ <u>satisfait au principe de</u> domination élémentaire.

(7) $G$ <u>satisfait au principe du</u> balayage élémentaire.

(8) $G^*$ <u>satisfait au principe du</u> balayage élémentaire.

Le schéma de la démonstration est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
(3) \arrow[r, Rightarrow] & (7) \arrow[ddl, Rightarrow] \\
(1) \arrow[u, Rightarrow, "\text{(si } G^* \text{ est régulier) -}"] \arrow[r, Rightarrow] & (5) \arrow[u, Rightarrow, swap, "\text{- (si } G^* \text{ est régulier)}"] \\
(2) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, swap, "\text{(si } G \text{ est régulier) -}"] & (6) \arrow[d, Rightarrow, "\text{- (si } G \text{ est régulier)}"] \\
(4) \arrow[r, Rightarrow] & (8) \arrow[uul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

.

<u>Démonstration</u>.

a. <u>Il est trivial que</u> (1) $\Longrightarrow$ (5) , (2) $\Longrightarrow$ (6) , (3) $\Longrightarrow$ (7) , <u>et</u> (4) $\Longrightarrow$ (8) .

b. <u>Si</u> $G^*$ <u>est régulier, alors</u> (1) $\Longrightarrow$ (3) (<u>et</u> (5) $\Longrightarrow$ (7) ).

Les données sont un compact $K$ de $\Omega$ et une mesure $\mu \in \mathcal{M}(K)$ (ponctuelle ou non). L'hypothèse est, dans les deux cas envisagés, que $G$ satisfait au principe du maximum relativement à $(G\mu\ ,\ G\mu)$ . Donc, en vertu du théorème 1, $G$ satisfait au principe d'équilibre relativement à $(G\mu\ ,\ G\mu)$ , c'est-à-dire au principe du balayage (élémentaire ou non). De façon duale, si $G$ est régulier, alors $(2) \Longrightarrow (4)$ et $(6) \Longrightarrow (8)$ .

c. Sans hypothèse de régularité sur $G$ et sur $G^*$ , alors $(7) \Longrightarrow (2)$ (et $(8) \Longrightarrow (1)$ ).

Démontrons que $(7) \Longrightarrow (2)$ . Les données sont : $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathfrak{M}$ telles que $G^*\mu \leqslant G^*\nu$ sur $S\mu$ . Soit $x_0 \notin S\mu$ : on veut démontrer que $G^*\mu(x_0) \leqslant G^*\nu(x_0)$ . Appelons $\lambda$ la balayée pour $G$ de $\varepsilon_{x_0}$ sur $S\mu$ : on a

$$\lambda \in \mathfrak{M}(S\mu) \qquad G\lambda(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \text{ sur } \Omega \text{ et } G\lambda(x) \geqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \text{ a.p.p.p. sur } S\mu .$$

Comme $\mu \in \mathcal{E}$ , on a $\int G\lambda\ d\mu = \int G\varepsilon_{x_0}\ d\mu$ , et par conséquent

$$G^*\mu(x_0) = \int G^*\mu\ d\varepsilon_{x_0} = \int G\varepsilon_{x_0}\ d\mu = \int G\lambda\ d\mu = \int G^*\mu\ d\lambda$$
$$\leqslant \int G^*\nu\ d\lambda = \int G\lambda\ d\nu \leqslant \int G\varepsilon_{x_0}\ d\nu = \int G^*\nu\ d\varepsilon_{x_0} = G^*\nu(x_0) .$$

Remarque. - L'hypothèse : $G$ régulier (resp. $G^*$ régulier), n'intervient que pour : $(2) \Longrightarrow (4)$ et $(6) \Longrightarrow (8)$ (resp. $(1) \Longrightarrow (3)$ et $(5) \Longrightarrow (7)$).

## 3. Principe complet et principe fort du maximum.

DÉFINITION 5. - On dit que $G$ satisfait au principe complet du maximum si :

$$\forall \mu \in \mathcal{E} ,\ \forall \nu \in \mathfrak{M},\ \forall a \geqslant 0 \quad (G\mu(x) \leqslant G\nu(x) + a \text{ sur } S\mu) \Longrightarrow (G\mu(x) \leqslant G\nu(x) + a \text{ sur } \Omega) .$$

DÉFINITION 6. - On dit que $G$ satisfait au principe fort du maximum si :

$$\forall \mu \in \mathcal{E} ,\ \forall \nu \in \mathfrak{M},\ \forall a \geqslant 0 \quad (G\mu(x) \leqslant G\nu(x) + a \text{ sur } S\mu \cup S\nu) \Longrightarrow (G\mu(x) \leqslant G\nu(x) + a \text{ sur } \Omega) .$$

THÉORÈME 3. - Si $G$ et $G^*$ sont réguliers, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $G$ satisfait au principe complet du maximum.

(2) $G$ satisfait au principe fort du maximum.

(3) $G$ satisfait simultanément au principe de domination et au principe classique du maximum.

Démonstration.

1° Il est clair que $(1) \Longrightarrow (2)$ .

Le principe complet du maximum, appliqué avec $a = 0$ , donne le principe de domination et, avec $a = 1$ et $\nu = 0$ , donne le principe classique du maximum.

Donc (1) $\Longrightarrow$ (3) .

2° Montrons que (3) $\Longrightarrow$ (1) .

Soient $\mu \in \mathcal{E}$ , $\nu \in \mathfrak{M}$ , et $a \geqslant 0$ tels que $G\mu(x) \leqslant G\nu(x) + a$ sur $S\mu$ . Soit $x_0 \notin S\mu$ . On étudie la quantité $G\mu(x_0) = \int G\mu \, d\varepsilon_{x_0} = \int G^*\varepsilon_{x_0} \, d\mu$ .

$G$ satisfait au principe de domination, donc en vertu du théorème 2, $G^*$ satisfait au principe du balayage élémentaire. Soit $\mu'$ la mesure balayée pour $G^*$ de $\varepsilon_{x_0}$ sur le compact $S\mu$ . On montre d'abord que

$$\int d\mu' = 1 .$$

Pour cela, $G$ , satisfaisant au principe classique du maximum, satisfait (en vertu du théorème 1, remarque 1) au principe classique de l'équilibre. Soit $\lambda$ la mesure d'équilibre pour $G$ sur $S\mu$ . On a

$$\int d\mu' = \int G\lambda \, d\mu' = \int G^*\mu' \, d\lambda \leqslant \int G^*\varepsilon_{x_0} \, d\lambda = \int G\lambda \, d\varepsilon_{x_0} \leqslant \int d\varepsilon_{x_0} = 1 .$$

La première égalité résulte de ce que $\mu'$ est d'énergie finie : en effet, comme $x_0 \notin S\mu$ , $G\varepsilon_{x_0}(x) = G(x , x_0)$ est borné sur $S\mu$ et

$$I(\mu') = \int G\mu' \, d\mu' \leqslant \int G\varepsilon_{x_0} \, d\mu' < +\infty .$$

On déduit maintenant, comme $\mu \in \mathcal{E}$ ,

$$G\mu(x_0) = \int G^*\varepsilon_{x_0} \, d\mu = \int G^*\mu' \, d\mu = \int G\mu \, d\mu' \leqslant \int G\nu \, d\mu' + a \int d\mu'$$
$$\leqslant \int G^*\varepsilon_{x_0} \, d\nu + a = G\nu(x_0) + a .$$

3° Montrons que (2) $\Longrightarrow$ (3) .

Le principe fort du maximum, appliqué avec $a = 1$ et $\nu = 0$ , donne le principe classique du maximum. Il suffit de vérifier, en vertu du théorème 2, qu'il entraîne aussi le principe de domination élémentaire.

Soient $\mu \in \mathcal{E}$ et $x_0 \notin S\mu$ , tels que $G\mu(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x)$ sur $S\mu$ . En vertu du principe fort, il suffit de vérifier que $G\mu(x_0) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x_0)$ pour que l'inégalité $G\mu(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x)$ ait lieu partout.

On peut supposer que $G(x_0 , x_0) < +\infty$ , sinon la vérification est faite. La mesure $\varepsilon_{x_0}$ est d'énergie finie et, par le principe du maximum, on a

$$G\varepsilon_{x_0}(x) \leqslant G(x_0 , x_0) \quad \text{sur } \Omega .$$

Donc, sur $S\mu$ , on a $G\mu(x) \leqslant G(x_0 , x_0)$ . La même inégalité a lieu partout, en vertu du principe du maximum à nouveau, donc en particulier en $x_0$ . Donc,

$$G\mu(x_0) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x_0) = G(x_0 , x_0) .$$

Remarque. - Le théorème 1 permet d'établir, si $G$ et $G^*$ sont réguliers, une équivalence entre le principe complet du maximum et un principe convenable de balayage (qu'on appellera principe complet du balayage).

## 4. Le principe de domination faible.

DÉFINITIONS 7. - On envisage la proposition suivante :

$$\forall \mu \in \mathcal{E} , \forall \nu \in \mathfrak{M} \quad (G\mu(x) \leqslant G\nu(x) \text{ sur } A \subset \Omega) \Longrightarrow (G\mu(x) \leqslant G\nu(x) \text{ sur } \Omega) .$$

On dit que $G$ satisfait au principe de domination faible si $A = S\mu \cup S\nu$ , ordinaire si $A = S\mu$ (cf. définition 3), et inverse si $A = S\nu \neq \emptyset$ .

Il est clair que si $G$ satisfait au principe de domination ordinaire ou inverse, alors il satisfait au principe de domination faible. Le résultat de ce paragraphe concerne la réciproque.

Appelons noyau continu un noyau (au sens de l'introduction) tel que l'application de $\Omega \times \Omega$ dans $]0 , +\infty]$ : $(x , y) \to G(x , y)$ soit continue.

THÉORÈME 4. - Soit $G$ un noyau continu dont l'adjoint $G^*$ est régulier. Si $G$ satisfait au principe de domination faible, alors il satisfait au principe de domination ordinaire ou inverse.

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, voici une proposition utile :

PROPOSITION 1. - Si le noyau $G$ continu satisfait au principe de domination faible, alors il est régulier (OHTSUKA-KISHI).

Démonstration. - Soit $\mu \in \mathfrak{M}$ tel que la restriction de $G\mu$ à $S\mu$ soit continue. $G\mu$ est une fonction continue sur le complémentaire de $S\mu$ (car la fonction $(x , y) \to G(x , y)$ est continue pour $x \neq y$ ).

Examinons la continuité de $G\mu$ au point $x_0$ de $S\mu$ . Si $G(x_0 , x_0) < +\infty$ , $G\mu$ est continu en $x_0$ .

Supposons au contraire que $G(x_0 , x_0) = +\infty$ . $G\mu(x_0)$ est fini, donc $\mu$ ne charge pas $x_0$ . Soit $K$ un voisinage compact de $x_0$ , et soit $(\omega_n)$ une suite de voisinages ouverts de $x_0$ telle que $\bigcap_n \omega_n = \{x_0\}$ et $\omega_{n+1} \subset \omega_n \subset K$ ( $K$ est dénombrable). Appelons $\mu_n$ la restriction de $\mu$ à $\omega_n$ ; la suite de fonctions numériques $G\mu_n$ est décroissante et tend vers $0$ en tout point de $S\mu$ (car $\mu$ ne charge pas $x_0$ ). D'après le théorème de Dini, cette suite converge uniformément vers $0$ sur $S\mu$ , donc :

$$\forall \alpha > 0 \ , \ \exists \ \omega_\alpha \ \text{(voisinage ouvert de } x_0 \text{)} \ \text{tel que} \ G\mu_\alpha \leqslant \alpha \ \text{sur} \ S\mu \ ,$$

où $\mu_\alpha$ désigne la restriction de $\mu$ à $\omega_\alpha$ .

Soit $x_1 \in K \cap \complement S\mu$ . Posons : $a = \inf\limits_{K \times K} G(x , y)$ . On a :

$$\forall \ x \in K \qquad G\varepsilon_{x_1}(x) = G(x , x_1) > a > 0 \ ,$$

et par suite

$$\forall \ x \in \omega_\alpha \cap S\mu = S\mu_\alpha \qquad G\mu_\alpha(x) \leqslant \alpha \frac{G\varepsilon_{x_1}(x)}{a} \ .$$

Si $G(x_1 , x_1) = +\infty$ , cette inégalité a lieu aussi en $x_1$ .

Si $G(x_1 , x_1) < +\infty$ , on pose :

$$M(\alpha) = \max\left(\frac{G\mu_\alpha(x_1)}{G(x_1 , x_1)} \ , \ \frac{\alpha}{a}\right) \ ;$$

on a alors

$$G\mu_\alpha(x) \leqslant M(\alpha) \ G\varepsilon_{x_1}(x) \qquad \text{sur} \quad S\mu_\alpha \cup \{x_1\} \ .$$

D'après le principe de domination faible, la même inégalité a lieu partout. On observe enfin que $M(\alpha)$ tend vers $0$ quand $\alpha$ tend vers $0$ . Ceci entraîne bien la continuité de $G\mu = G\mu_\alpha + G(\mu - \mu_\alpha)$ en $x_0$ .

La démonstration du théorème 4 nécessite plusieurs lemmes. Nous utiliserons la notation suivante :

$$\Gamma(x , y) = \Gamma(y , x) = G(x , x) \ G(yy) - G(x , y) \ G(y , x) \qquad \text{pour} \quad x \neq y \ .$$

LEMME 1. - <u>Soit</u> $G$ <u>un noyau sur l'ensemble à trois points</u> $\{x_1 , x_2 , x_3\}$ . <u>On pose</u> :

$$g_{ij} = G(x_i , x_j) \quad \underline{\text{et,}} \quad \underline{\text{pour}} \ \ i \neq j \ , \quad \gamma_{ij} = \Gamma(x_i , x_j) \ .$$

<u>Si</u> $G$ <u>satisfait au principe de domination faible, alors parmi les 3 nombres</u> $\gamma_{ij}$ ,

(a) <u>ou bien deux sont</u> $> 0$ <u>et le troisième</u> $\geqslant 0$ ,

(b) <u>ou bien deux sont</u> $< 0$ <u>et le troisième</u> $\leqslant 0$ ,

(c) <u>ou bien les trois sont nuls</u>.

<u>Remarque</u>. - C'est toujours l'éventualité (a) qui se produit lorsque $G$ n'est pas fini (en un point $(x , x)$ ).

<u>1er cas</u>. - $g_{ii} < +\infty$ pour $i = 1 , 2 , 3$ .

($\alpha$) On établit d'abord, $i$ , $j$ , $k$ étant différents, que

$$(\star) \qquad \gamma_{ij} \geqslant 0 \implies \frac{g_{ii}}{g_{ij}} \geqslant \frac{g_{ki}}{g_{kj}} \geqslant \frac{g_{ji}}{g_{jj}} ,$$

$$(\star\star) \qquad \gamma_{ij} \leqslant 0 \implies \frac{g_{ii}}{g_{ij}} \leqslant \frac{g_{ki}}{g_{kj}} \leqslant \frac{g_{ji}}{g_{jj}} ,$$

$$(\star\star\star) \qquad \gamma_{ij} = 0 \implies \frac{g_{ii}}{g_{ij}} = \frac{g_{ki}}{g_{kj}} = \frac{g_{ji}}{g_{jj}} .$$

Démontrons ($\star$) : les potentiels des deux mesures $\varepsilon_i$ et $\nu_j = \dfrac{g_{ii}}{g_{ij}} \varepsilon_j$ vérifient

$$G\varepsilon_i(x_i) = G\nu_j(x_i)$$

et

$$G\varepsilon_i(x_j) \leqslant G\nu_j(x_j) ;$$

grâce au principe de domination faible, on a

$$G\varepsilon_i(x_k) \leqslant G\nu_j(x_k) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad g_{ki} \leqslant \frac{g_{ii}}{g_{ij}} g_{kj} .$$

En permutant $i$ et $j$ , on trouve une deuxième inégalité, d'où ($\star$).

($\star\star$) se démontre de la même façon, et ($\star\star\star$) est conséquence de ($\star$) et ($\star\star$).

($\beta$) On établit ensuite que

$$\gamma_{12} > 0 \implies \gamma_{13} \geqslant 0 \text{ et } \gamma_{23} \geqslant 0 ,$$

$\gamma_{13}$ et $\gamma_{23}$ non nuls tous deux.

Pour cela, on montre en utilisant ($\star$) et ($\star\star$) l'impossibilité des propositions :

$$\gamma_{12} > 0 , \quad \gamma_{23} \leqslant 0 \text{ et } \gamma_{13} \leqslant 0 ,$$

et

$$\gamma_{12} > 0 , \quad \gamma_{23} < 0 \text{ et } \gamma_{13} \geqslant 0 .$$

On établit de même que

$$\gamma_{12} < 0 \implies \gamma_{13} \leqslant 0 \text{ et } \gamma_{23} \leqslant 0 ,$$

$\gamma_{13}$ et $\gamma_{23}$ non nuls tous deux ; et enfin

$$\gamma_{12} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{ou} \quad \gamma_{23} > 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{13} > 0 \ , \\ \text{ou} \quad \gamma_{23} < 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{13} < 0 \ , \\ \text{ou} \quad \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0 \ . \end{cases}$$

Les implications ci-dessus démontrent bien le lemme 1 dans le cas où $g_{ii} < +\infty$ $(i = 1 , 2 , 3)$.

2ème cas. - Supposons $g_{11} = +\infty$ .

Si $g_{22} = +\infty$ ou $g_{33} = +\infty$ , alors les trois nombres $\gamma_{12}$ , $\gamma_{23}$ , et $\gamma_{13}$ sont $> 0$ .

Si $g_{22} < +\infty$ et $g_{33} < +\infty$ , alors $\gamma_{12} > 0$ et $\gamma_{13} > 0$ .

Par un raisonnement analogue à celui qui conduit à la formule (☆), on a

$$\gamma_{12} > 0 \Longrightarrow \frac{g_{31}}{g_{32}} \geqslant \frac{g_{21}}{g_{22}} \qquad \text{et} \qquad \gamma_{13} > 0 \Longrightarrow \frac{g_{21}}{g_{23}} \geqslant \frac{g_{31}}{g_{33}} \ ,$$

d'où

$$\frac{g_{23}}{g_{33}} \leqslant \frac{g_{21}}{g_{31}} \leqslant \frac{g_{22}}{g_{32}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \gamma_{23} \geqslant 0 \ .$$

LEMME 2. - Soit $G$ un noyau satisfaisant au principe de domination faible, alors
(a) ou bien $\Gamma(x , y) \geqslant 0$ et $\Gamma(x , y)$ non identiquement nul,
(b) ou bien $\Gamma(x , y) \leqslant 0$ et $\Gamma(x , y)$ non identiquement nul,
(c) ou bien $\Gamma(x , y) \equiv 0$ .

Remarque. - Dans (a) et (b), on peut même affirmer que, pour tout ensemble de trois points distincts de $\Omega$ , deux des trois nombres $\Gamma(x , y)$ , $\Gamma(y , z)$ , et $\Gamma(z , x)$ sont différents de $0$ .

Supposons $\Gamma$ non identiquement nul ; on a deux cas à considérer : Il existe deux points distincts $x_1$ et $x_2$ tels que,
- ou bien $\Gamma(x_1 , x_2) > 0$ ,
- ou bien $\Gamma(x_1 , x_2) < 0$ .

Si $\Gamma(x_1 , x_2) > 0$ , le lemme 1 exprime que $\Gamma(x , x_1) \geqslant 0$ et $\Gamma(x , x_2) \geqslant 0$ , quel que soit $x$ , et l'un au moins est non nul. Supposons $\Gamma(x , x_1) > 0$ ; alors, quel que soit $y$ , $\Gamma(x , y) \geqslant 0$ .

De même, $\Gamma(x_1 , x_2) \leqslant 0$ entraîne $\Gamma(x , y) \leqslant 0$ .

DÉFINITION 8. - On dit que $G$ satisfait au principe ordinaire (resp. inverse) de domination "très élémentaire" si :

$\forall x_1 \in \Omega$, $\forall x_2 \in \Omega$, $\forall a > 0$ $G\varepsilon_{x_1}(x_1) \leqslant aG\varepsilon_{x_2}(x_1)$ (resp. $G\varepsilon_{x_1}(x_2) \leqslant aG\varepsilon_{x_2}(x_2)$ ) entraîne l'inégalité : $G\varepsilon_{x_1}(x) \leqslant aG\varepsilon_{x_2}(x)$ partout sur $\Omega$ .

LEMME 3. - Soit $G$ un noyau satisfaisant au principe de domination faible. Si $\Gamma(x , y) \geqslant 0$ (resp. $\Gamma(x , y) \leqslant 0$ ) et $\Gamma(x , y) \not\equiv 0$ , alors $G$ satisfait au principe ordinaire (resp. inverse) de domination "très élémentaire".

Supposons $\Gamma(x , y) \geqslant 0$ . Considérons $x_1 \in \Omega$ , $x_2 \in \Omega$ , et $a > 0$ , tels que

$$G\varepsilon_{x_1}(x_1) \leqslant aG\varepsilon_{x_2}(x_1) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{G(x_1 , x_1)}{G(x_2 , x_2)} \leqslant a \quad (\text{d'où } G(x_1 , x_1) < + \infty).$$

$$\Gamma(x_1 , x_2) \geqslant 0 \qquad \text{entraîne} \qquad G\varepsilon_{x_1}(x_2) \leqslant \frac{G(x_1 , x_1)}{G(x_1 , x_2)} G\varepsilon_{x_2}(x_2) \leqslant aG\varepsilon_{x_2}(x_2) .$$

Comme $G(x_1 , x_1) < + \infty$ , $\varepsilon_{x_1}$ est une mesure d'énergie finie et le principe de domination faible entraîne $G\varepsilon_{x_1}(x) \leqslant aG\varepsilon_{x_2}(x)$ sur $\Omega$ .

On ferait un raisonnement analogue pour $\Gamma(x , y) \leqslant 0$ .

Remarque. - Soit $G$ un noyau satisfaisant au principe de domination faible. Si $\Gamma(x , y) \equiv 0$ , alors $G$ est fini sur $\Omega \times \Omega$ et

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} , \quad \forall x_0 \in \Omega \qquad G\mu(x) = \frac{G\mu(x_0)}{G(x_0 , x_0)} G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{partout sur } \Omega$$

(ceci se déduit aisément des relations (☆☆☆) du lemme 1).

$G$ vérifie alors la propriété suivante :

$\forall \mu \in \mathfrak{M}$ , $\forall \nu \in \mathfrak{M}$ , s'il existe $x_1 \in \Omega$ tel que $G\mu(x_1) \leqslant G\nu(x_1)$ , alors $G\mu(x) \leqslant G\nu(x)$ partout sur $\Omega$ ,

ce qui est une propriété plus forte que n'importe quel principe de domination.

LEMME 4. - Soit $G$ un noyau continu dont l'adjoint $G^*$ est régulier et satisfaisant au principe de domination "très élémentaire". Alors, $\forall K$ (compact de $\Omega$ ), $\forall x_0 \notin K$ , $\exists \tau \in \mathfrak{M}(K)$ vérifiant :

$$G\tau(x) \geqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K ,$$

$$G\tau(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{sur } S_\tau \cup \{x_0\} .$$

En effet, $G\varepsilon_{x_0}$ est une fonction continue sur $K$ puisque $x_0 \notin K$. Le <u>lemme fondamental de Kishi</u> affirme l'existence d'une mesure $\tau \in \mathfrak{M}(K)$ vérifiant :

$$G\tau(x) \geqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{a. p. p. p. sur } K \quad \text{et} \quad G\tau(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \text{sur } S\tau .$$

Si $G(x_0 , x_0) = +\infty$, cette mesure répond évidemment aux conditions du lemme.

Supposons $G(x_0 , x_0) < +\infty$. Par le principe de domination "très élémentaire", on a :

$$\forall\, x \in K \qquad G\varepsilon_{x_0}(z) \leqslant \frac{G(x_0 , x_0)}{G(x_0 , x)} G\varepsilon_x(z) \quad \text{sur } \Omega ,$$

d'où

$$G\tau(x_0) = \int G(x_0 , x)\, d\tau(x) \leqslant \int \frac{G(x_0 , x_0)}{G(z , x_0)} G(z , x)\, d\tau(x) = \frac{G(x_0 , x_0)}{G(z , x_0)} G\tau(z) .$$

Prenons $z \in S_\tau$. Alors,

$$G\tau(x_0) = \frac{G(x_0 , x_0)}{G(z , x_0)} G\tau(z) \leqslant \frac{G(x_0 , x_0)}{G(z , x)} G\varepsilon_{x_0}(z) = G(x_0 , x_0) .$$

Dans tous les cas, la mesure $\tau$ convient, et $\tau$ est d'énergie finie puisque $G\varepsilon_{x_0}$ est finie continue sur $K$.

LEMME 4'. - <u>Soit</u> $G$ un noyau continu fini <u>satisfaisant au principe inverse de domination "très élémentaire"</u>. Alors,

$$\forall\, K \ (\underline{\text{compact de}}\ \Omega),\ \forall\, x_0 \notin K ,\ \exists\, \sigma \in \mathfrak{M}(K) \ \underline{\text{vérifiant}} :$$

$$G\sigma(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \underline{\text{sur}}\ K ,$$

$$G\sigma(x) \geqslant G\varepsilon_{x_0}(x) \quad \underline{\text{sur}}\ S_\sigma \cup \{x_0\} .$$

Ceci résulte du corollaire du lemme 2, paragraphe 1.

LEMME 5. - <u>Soit</u> $G$ <u>un noyau continu sur</u> $\Omega$ <u>dont l'adjoint</u> $G^*$ <u>est régulier</u>. <u>Si</u> $G$ <u>satisfait au principe de domination faible et au principe ordinaire de domination "très élémentaire", alors</u> $G$ <u>satisfait au principe de domination ordinaire</u>.

On sait déjà (proposition 1) que $G$ est régulier. Montrons que $G^*$ satisfait au principe ordinaire de domination, ce qui suffit d'après le <u>théorème 2</u>.

Soient $\mu \in \mathcal{E}$ et $\nu \in \mathfrak{M}$ vérifiant $G^*\mu(x) \leqslant G^*\nu(x)$ sur $S\mu$. Soit $x_0 \notin S\mu$ : il faut vérifier que $G^*\mu(x_0) \leqslant G^*\nu(x_0)$. Considérons la mesure $\tau$ relative au compact $S\mu$ mise en évidence dans le lemme 4 : $\tau$ est d'énergie finie et vérifie:

$G\tau(x) \leqslant G\varepsilon_{x_0}(x)$ sur $S_\tau \cup \{x_0\}$ , donc partout, grâce au principe de domination faible. En outre, $G\tau(x) \geqslant G\varepsilon_{x_0}(x)$ a. p. p. p. sur $S\mu$ , d'où, puisque $\mu \in \mathcal{E}$ ,

$$\int G\tau(x)\, d\mu(x) = \int G\varepsilon_{x_0}(x)\, d\mu(x) .$$

On en déduit :

$$G^*\mu(x_0) = \int G\varepsilon_{x_0}\, d\mu = \int G\tau\, d\mu = \int G^*\mu\, d\tau \leqslant \int G^*\nu\, d\tau$$
$$= \int G\tau\, d\nu \leqslant \int G\varepsilon_{x_0}\, d\nu = G^*\nu(x_0) .$$

LEMME 5'. - Soit $G$ un noyau fini continu sur $\Omega$ . Si $G$ satisfait au principe de domination faible et au principe inverse de domination "très élémentaire", alors il satisfait au principe de domination inverse.

En utilisant le lemme 4', on montre que $G^*$ satisfait au principe de domination inverse. Un énoncé analogue au théorème 2 (utilisant le corollaire du lemme 2, paragraphe 1) permet de déduire que $G$ satisfait au principe de domination inverse.

Démonstration du théorème 4. - C'est une conséquence facile des lemmes précédents On observera que, si $G$ n'est pas fini, la conclusion du théorème 4 est : " $G$ satisfait au principe de domination ordinaire". Enfin, l'énoncé donné ici ne contient plus une restriction utilisée par M. KISHI : le noyau $G$ est "non dégénéré", c'est-à-dire, il n'existe aucun couple $x_1$ , $x_2$ de points de $\Omega$ tels que les fonctions $x \longrightarrow G(x , x_1)$ et $x \longrightarrow G(x , x_2)$ soient proportionnelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE (Claude). - Espaces topologiques. Fonctions multivoques. - Paris, Dunod, 1959 (Collection universitaire de Mathématiques, 3).

[2] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Le théorème de convergence en théorie du potentiel, J. Madras Univ., Series B, t. 27, 1957, p. 277-286.

[3] KAKUTANI (S.). - A generalisation of Brouwer's fixed point theorem, Duke math. J., t. 8, 1941, p. 457-459.

[4] KISHI (Masanori). - Maximum principles in the potential theory, Nagoya math. J., t. 23, 1963, p. 165-187.

[5] KISHI (Masanori). - Weak domination principles, J. Sc. Hiroshima Univ., Section A1, t. 28, 1964, p. 1-17.

[6] NAKAI (M.). - On the fundamental existence theorem of Kishi, Nagoya math. J., t. 23, 1963, p. 189-198.