

# SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY. THÉORIE DU POTENTIEL

ROSE-MARIE HERVÉ

## **Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à un opérateur uniformément elliptique de la forme**

*Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel*, tome 9 (1964-1965), exp. n° 7, p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SBCD\\_1964-1965\\_\\_9\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A4_0)

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964-1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SURHARMONIQUES  
 ASSOCIÉES À UN OPÉRATEUR UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE DE LA FORME

$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0$$

par Mme Rose-Marie HERVÉ

Cet exposé résume deux articles récents [4] et [5] auxquels je renvoie pour les démonstrations techniques.

Notations. -  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Les coefficients  $a_{ij}(x)$  sont des fonctions réelles, mesurables sur  $\Omega$ ,  
 $a_{ij} = a_{ji}$ , et  $\frac{1}{\lambda} \sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda \sum_i \xi_i^2$ ,  $\forall x \in \Omega$ , où  $\lambda \geq 1$ .

$W^{1,q}(\Omega)$ ,  $q \geq 1$  est l'espace des fonctions  $f \in L^q(\Omega)$ , avec  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$ ,  
 $\forall i$ , muni de la norme  $\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\text{grad } f\|_{L^q(\Omega)}$ .

$W_{\text{loc}}^{1,q}(\Omega)$  est l'espace des  $f \in W^{1,q}(\Omega')$  pour tout ouvert  $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ .

$W_0^{1,q}(\Omega)$  est l'adhérence, dans  $W^{1,q}(\Omega)$ , de  $\mathcal{O}(\Omega)$ , ou encore des fonctions  
 $\in W^{1,q}(\Omega)$  à support compact dans  $\Omega$ .

Une solution (resp. une solution locale) de  $Lu = 0$  dans  $\Omega$  est une fonction  
 $u \in W^{1,2}(\Omega)$  (resp.  $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ ) telle que

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\Omega),$$

ou encore  $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  (resp.  $\forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$  et à support compact dans  $\Omega$ ).

Une sous-solution (resp. une sous-solution locale) dans  $\Omega$  est une fonction  
 $u \in W^{1,2}(\Omega)$  (resp.  $W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ ) telle que

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}(\Omega) \text{ et } \geq 0.$$

1. Un principe du maximum pour les sous-solutions locales.

Le principe du maximum que je démontre ici est inspiré d'un principe du maximum,  
 classique en théorie du potentiel : une fonction sous-harmonique dans  $\Omega$ , majorée

par un potentiel dans  $\Omega$ , au voisinage de  $\partial\Omega$  (c'est-à-dire hors d'un compact de  $\Omega$ ), est  $\leq 0$  dans  $\Omega$ . Ici, les potentiels sont remplacés par les fonctions  $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ , qui jouent le rôle de fonctions "nulles à la frontière", d'où l'énoncé:

THÉOREME 1. - Une sous-solution locale dans  $\Omega$ , majorée p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$  par une fonction  $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ , est  $\leq 0$  p. p. dans  $\Omega$ .

Démonstration du théorème 1 pour les sous-solutions dans  $\Omega$ . - On s'appuie sur le lemme suivant :

LEMME 1 <sup>(1)</sup>. - Soit  $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$ , et  $f \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $\geq 0$  p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$ . Alors

$$\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega) .$$

Démonstration. -  $\varphi$  est limite dans  $W^{1,q}(\Omega)$  de fonctions  $\varphi_n \in W^{1,q}(\Omega)$ , et à support compact dans  $\Omega$ ; alors, d'après une propriété classique de  $W^{1,q}$  (voir par exemple [4]),  $\inf(\varphi, f)$  est limite dans  $W^{1,q}(\Omega)$  des fonctions  $\inf(\varphi_n, f)$ , et celles-ci sont à support compact dans  $\Omega$ .

Conséquences :

$$1^\circ \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega) \implies \varphi^+ \text{ et } \varphi^- \in W_0^{1,q}(\Omega) .$$

$$2^\circ \varphi \in W_0^{1,q}(\Omega) \text{ et } f \in W^{1,q}(\Omega) \text{ avec } 0 \leq f \leq \varphi \text{ p. p. au voisinage de } \partial\Omega \\ \implies f \in W_0^{1,q}(\Omega) .$$

3° Une constante non nulle  $\notin W_0^{1,q}(\Omega)$  : supposons que  $1 \in W_0^{1,q}(\Omega)$ ;  $\Omega$  étant borné, il existe 2 constantes  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\alpha \neq 0$ , telles que  $0 \leq \alpha x_1 + \beta \leq 1$  sur  $\Omega$ ; donc

$$\alpha x_1 + \beta \in W_0^{1,q}(\Omega)$$

et

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_1} (\alpha x_1 + \beta) dx = 0 ,$$

ce qui entraîne  $\alpha = 0$ .

Soit alors  $u$  une sous-solution dans  $\Omega$ , majorée p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$  par  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ . On en déduit  $u^+ \leq \varphi^+$  p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$ , et comme  $\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ,  $u^+$  aussi. Par suite

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx \leq 0 ,$$

<sup>(1)</sup> Ce résultat est bien connu si  $f$  est une constante  $\geq 0$ .

soit

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx \leq 0 ,$$

et, grâce à la condition d'uniforme ellipticité :

$$\|\text{grad } u^+\|_{L^2(\Omega)} = 0 .$$

D'où  $u^+ = \text{Cte}$  p. p. dans  $\Omega$ , et cette constante est nulle.

Démonstration du théorème 1 dans le cas général. - On utilise

a. un théorème connu d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites du type de Dirichlet :  $\forall f \in W^{1,2}(\Omega)$ , il existe une solution et une seule de  $Lu = 0$  dans  $\Omega$ , notée  $L_f^\Omega$ , telle que  $f - L_f^\Omega \in W_0^{1,2}(\Omega)$ .

L'application  $f \rightarrow L_f^\Omega$ , de  $W^{1,2}(\Omega)$  dans lui-même, est continue ; on a même, pour tout ouvert  $\omega \subset \Omega$  :

$$(1) \quad \|L_f^\omega\|_{W^{1,2}(\omega)} \leq k \|f\|_{W^{1,2}(\omega)} \quad \text{avec } k(n, \lambda, \Omega) .$$

En outre, cette application est croissante, d'après le théorème 1 pour les solutions de  $Lu = 0$ .

b. la propriété suivante, inspirée de la théorie du potentiel :

LEMME 2. - Etant donnés  $f \in W^{1,2}(\Omega)$  et un ouvert  $\omega \subset \Omega$ , la fonction

$$f_\omega = \begin{cases} L_f^\omega & \text{dans } \omega \\ f & \text{dans } \Omega - \omega \end{cases} \in W^{1,2}(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_\omega\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq k' \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \text{avec } k'(n, \lambda, \Omega) .$$

Par suite, si les ouverts  $\omega_n$  sont tels que tout compact  $\subset \Omega$  est contenu dans  $\omega_n$  pour  $n$  assez grand,  $f_{\omega_n}$  converge faiblement dans  $W^{1,2}(\Omega)$  vers  $L_f^\Omega$ .

Pour la démonstration de l'inégalité (1) et du lemme 2, voir [4].

Soient  $u$  une sous-solution locale dans  $\Omega$ , majorée p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$  par  $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  et  $\omega_n$  une suite croissante d'ouverts,  $\bar{\omega}_n \subset \Omega$  et  $\Omega = \cup \omega_n$ . Pour  $n$  assez grand :

$$u - L_\varphi^{\omega_n} \leq \varphi - L_\varphi^{\omega_n} \quad \text{p. p. au voisinage de } \partial\omega_n ;$$

donc  $u - L_\varphi^{\omega_n} \leq 0$  p. p. dans  $\omega_n$ , soit  $u \leq \varphi_{\omega_n}$  p. p. dans  $\Omega$ . Comme  $\varphi_{\omega_n}$  converge faiblement vers 0 dans  $W^{1,2}(\Omega)$ , pour tout ensemble mesurable

$E \subset \bar{E} \subset \Omega$  :  $\int_E \varphi_{\omega_n} dx \rightarrow 0$  ; par suite,  $\int_E u dx \leq 0$  et  $u \leq 0$  p. p. dans  $\Omega$ .

Conséquences du théorème 1.

1° On retrouve le principe du maximum démontré par LITTMAN, STAMPACCHIA et WEINBERGER [6], valable pour les sous-solutions  $\in H^{1,2}(\Omega)$  (si  $C^0(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions continues dans  $\bar{\Omega}$ , et  $C^1(\bar{\Omega})$  l'espace des  $f \in C^0(\bar{\Omega})$  avec  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $\forall i$ ,  $H^{1,2}(\Omega)$  est l'adhérence de  $C^1(\bar{\Omega})$  dans  $W^{1,2}(\Omega)$ ) :

une sous-solution  $u$  dans  $\Omega$ , limite dans  $W^{1,2}(\Omega)$  de fonctions  $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\leq 0$  sur  $\partial\Omega$ , est  $\leq 0$  p. p. dans  $\Omega$ .

En effet, on peut supposer  $u_n < 0$  sur  $\partial\Omega$ , donc  $u_n^+$  à support compact dans  $\Omega$ ; comme  $u^+$  est limite de  $u_n^+$  dans  $W^{1,2}(\Omega)$ ,  $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$  et  $u, \leq u^+$ , est  $\leq 0$  p. p. dans  $\Omega$ .

2° Si  $u$  est une sous-solution locale dans  $\Omega$  telle que

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow y}} \text{ess } (2) \quad u(x) \leq 0 \quad \text{en tout point } y \in \partial\Omega,$$

alors  $u$  est  $\leq 0$  p. p. dans  $\Omega$ ,

car  $u - \varepsilon \leq 0$  p. p. au voisinage de  $\partial\Omega \implies u - \varepsilon \leq 0$  p. p. dans  $\Omega$ .

2. Les fonctions harmoniques associées à l'opérateur  $L$ .

Les solutions locales de  $Lu = 0$  dans les ouverts  $\omega \subset \Omega$  forment un système de fonctions harmoniques dans  $\Omega$ , satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot.

En effet, une solution locale dans un ouvert  $\omega$  est continue d'après le théorème de de GIORGI [8]; on a même, pour chaque compact  $K \subset \omega$ ,

$$|u(x) - u(x')| \leq \beta \|u\|_{L^2(\omega)} |x - x'|^\alpha, \quad \forall x \text{ et } x' \in K,$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent seulement de  $n, \lambda, K$  et  $\omega$ .

L'axiome 1 est satisfait de façon presque évidente.

Pour vérifier l'axiome 2, on montre que toute boule  $\beta$  est un ouvert régulier. Soit  $f$  continue sur  $\partial\beta$ ; supposons d'abord que  $f$  est la restriction à  $\partial\beta$  d'une fonction  $F \in W^{1,p}(\beta) \cap C^0(\bar{\beta})$  avec  $p > n$ . D'après un résultat de MORREY [7] et STAMPACCHIA [10],  $L_F^\beta$  est alors lipschitzienne dans  $\beta$ :

$$|L_F^\beta(x) - L_F^\beta(x')| \leq Cte |x - x'|^{1-(n/p)}, \quad \forall x \text{ et } x' \in \beta,$$

(2) c'est-à-dire la borne inférieure du  $\sup \text{ess}$  de  $u$  sur  $V \cap \Omega$ , quand  $V$  décrit le filtre des voisinages de  $y$ .

et par suite, prolongée par  $f$  sur  $\partial\beta$ , elle est continue dans  $\bar{\beta}$ . En outre, le théorème 1 entraîne, d'une part la croissance de la solution du problème de Dirichlet avec la donnée, d'autre part l'unicité de cette solution. Le cas d'une fonction continue quelconque sur  $\partial\beta$  se traite en l'approchant, uniformément sur  $\partial\beta$ , par des polynômes dans  $\mathbb{R}^n$ ; on utilise à nouveau le théorème 1 pour montrer la convergence uniforme dans  $\bar{\beta}$ , et le résultat suivant pour montrer la convergence dans  $W_{loc}^{1,2}(\beta)$ : si  $u$  est solution locale de  $Lu = 0$  dans la boule  $\beta$  de centre  $O$  et de rayon  $r$ , pour toute boule  $\beta'$  de centre  $O$  et de rayon  $r' < r$ :

$$\sum_i \int_{\beta'} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \frac{4\lambda^4}{(r - r')^2} \int_{\beta} u^2 dx.$$

L'axiome 3' est vérifié grâce au théorème de MOSER [9]: étant donné un domaine  $\delta$  et un compact  $K \subset \delta$ , il existe une constante  $C(n, \lambda, \delta \text{ et } K)$  telle que

$$\sup_K u \leq C \inf_K u,$$

pour toute solution locale  $u \geq 0$  dans  $\delta$ . On en déduit qu'une solution locale  $u \geq 0$  dans  $\delta$  est soit  $> 0$  soit  $\equiv 0$  sur  $\delta$ , et, en utilisant le théorème de de Giorgi, l'égalité de continuité au point  $x_0 \in \delta$  des solutions locales  $> 0$  dans  $\delta$ , égales à 1 en  $x_0$ .

La théorie axiomatique de M. Brelot s'applique et permet de définir les fonctions sous-harmoniques et surharmoniques associées à ce système de fonctions harmoniques (notées encore  $L$ -harmoniques lorsqu'il y a ambiguïté) et en particulier les potentiels. On montre facilement [4] qu'il existe un potentiel continu  $> 0$  dans  $\Omega$ .

Remarque. - Le théorème de Moser permet d'améliorer le lemme 2.

LEMME 3. - Etant donné  $f \in W^{1,2}(\Omega)$  et une suite d'ouverts  $\omega_n$  tels que tout compact  $c \subset \Omega$  est contenu dans  $\omega_n$  pour  $n$  assez grand, la suite

$$f_{\omega_n} = \begin{cases} L_f^{\omega_n} & \text{dans } \omega_n \\ f & \text{dans } \Omega - \omega_n \end{cases}$$

converge uniformément sur tout compact  $c \subset \Omega$  vers  $L_f^{\Omega}$ .

Démonstration. - L'application  $f \rightarrow L_f^{\Omega}$  étant linéaire, on peut supposer  $f \geq 0$  p. p. dans  $\Omega$ , d'où  $f_{\omega_n} \geq 0$  p. p. dans  $\Omega$ . Alors, pour tout compact  $K \subset \Omega$ , les fonctions  $f_{\omega_n}$  sont bornées dans leur ensemble sur  $K$ , pour  $n$  assez grand: en effet, si  $\Omega'$  est un ouvert tel que  $K \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$ , pour  $n$  assez grand,  $f_{\omega_n}$  est harmonique  $\geq 0$  dans  $\Omega'$  et par suite

$$\sup_K f_{\omega_n} \leq C \inf_K f_{\omega_n} ,$$

d'où

$$\sup_K f_{\omega_n} \leq C \frac{\|f_{\omega_n}\|_{L^2(K)}}{\sqrt{\text{mes } K}} \leq \frac{Ck'}{\sqrt{\text{mes } K}} \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)} .$$

L'axiome 3' s'applique et prouve l'existence d'une suite partielle  $f_{\omega_{n'}}$ , uniformément convergente sur tout compact  $c \subset \Omega$ , vers une fonction  $h$  harmonique dans  $\Omega$ ; donc, pour tout ensemble mesurable  $E \subset \bar{E} \subset \Omega$ ,

$$\int_E f_{\omega_{n'}} dx \rightarrow \int_E h dx .$$

Comme la suite  $f_{\omega_n}$  converge faiblement vers  $L_f^\Omega$  dans  $W^{1,2}(\Omega)$ , on a aussi

$$\int_E f_{\omega_n} dx \rightarrow \int_E L_f^\Omega dx ,$$

d'où

$$L_f^\Omega = h \text{ p. p. dans } \Omega$$

donc partout, et la suite  $f_{\omega_n}$  toute entière converge vers  $L_f^\Omega$ , uniformément sur tout compact  $c \subset \Omega$ .

### 3. Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à l'opérateur $L$ .

THÉORÈME 2. - Les potentiels dans  $\Omega$ , de support ponctuel donné, sont proportionnels.

On commence par démontrer une propriété des solutions locales  $> 0$  au voisinage d'une singularité isolée, analogue à celle démontrée par GILBARG et SERRIN [2] dans le cas d'une équation écrite sous forme développée et à coefficients localement lipschitziens.

LEMME 4. - Pour toute solution locale  $u > 0$  dans  $\beta(0, R) - \{0\}$ , (où  $\beta(0, R)$  est la boule de centre  $0$  et de rayon  $R$ ), et tout nombre  $r$ ,  $0 < r \leq \frac{R}{2}$ , on a :

$$\sup_{\partial\beta(0,r)} u \leq C \inf_{\partial\beta(0,r)} u ,$$

où  $C(n, \lambda)$ .

Démonstration. - Il suffit de faire une homothétie de centre  $0$  et de rapport  $r$ ; on vérifie facilement que  $v(x) = u(rx)$  est solution locale, dans  $\beta(0, \frac{R}{r}) - \{0\}$ , d'une équation du même type que  $Lu = 0$ , avec le même  $\lambda$ . Le théorème de Moser appliqué à  $v$ , solution locale  $> 0$  en particulier dans l'ouvert fixe  $\beta(0, 2) - \{0\}$ , et au compact  $\partial\beta(0, 1)$ , donne le résultat.

Soient  $p$  et  $q$  deux potentiels de même support ponctuel  $0$ , qu'on peut choisir extrémaux dans l'ensemble des potentiels de support  $0$ . S'ils ne sont pas proportionnels, on ne peut avoir  $p \geq \alpha q$ ,  $\alpha > 0$ , dans un voisinage de  $0$  privé de l'origine. Alors

$$\frac{\inf p}{\frac{\partial \beta(0,r)}{\sup q}} \rightarrow 0 \text{ quand } r \rightarrow 0,$$

car sinon, il existerait  $\alpha > 0$  et une suite  $r_n$  strictement décroissante vers  $0$ , tels que

$$\frac{\inf p}{\frac{\partial \beta(0,r_n)}{\sup q}} \geq \alpha,$$

d'où  $p \geq \alpha q$  sur chaque sphère  $\partial \beta(0, r_n)$ , donc aussi dans un voisinage de  $0$  privé de l'origine. On en déduit, grâce au lemme 4,

$$\frac{\sup p}{\frac{\partial \beta(0,r)}{\inf q}} \rightarrow 0 \text{ quand } r \rightarrow 0,$$

d'où  $p \leq q$  dans un voisinage de  $0$  privé de l'origine, et  $p$  et  $q$  proportionnels

Conséquence. - Dans une boule  $\beta$ , il résulte du théorème 2 que les potentiels de support  $y \in \beta$  sont proportionnels à la fonction de Green de pôle  $y$ , soit  $g_y$ , dont l'existence est démontrée dans [6], ainsi que la propriété, essentielle pour la suite :

étant donné un compact  $K \subset \beta$ , de diamètre  $< 1$  si  $n = 2$ , il existe deux constantes  $A$  et  $B > 0$  telles que

$$\frac{A}{|x-y|^{n-2}} \leq g_y(x) \leq \frac{B}{|x-y|^{n-2}}, \quad \forall x \text{ et } y \in K, \quad n > 2,$$

$$A \log \frac{1}{|x-y|} \leq g_n(x) \leq B \log \frac{1}{|x-y|}, \quad \forall x \text{ et } y \in K, \quad n = 2.$$

THÉOREME 3. - Pour tout ensemble  $E \subset \Omega$ , les conditions  $E$  L-effilé en  $x_0$  et  $E$   $\Delta$ -effilé en  $x_0$  sont équivalentes.

On suppose  $x_0 \in \bar{E} - E$  :  $E$  L-effilé au point  $x_0$  équivaut à l'existence d'un L-potential  $p$  dans une boule  $\beta$  de centre  $x_0$ , fini au point  $x_0$  et tendant vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow x_0$  en restant dans  $E$  [1].

D'autre part, tout L-potential dans  $\beta$  admet une représentation intégrale à l'aide des L-fonctions de Green  $g_y$  et d'une mesure  $\geq 0$  sur  $\beta$  ([3], théorème 18, 2).



Le théorème 3 résulte alors de la double inégalité vérifiée par  $g_y$ , en remarquant que la mesure associée au potentiel caractérisant l'effilement de  $E$  peut être supposée à support compact dans  $\beta$ .

**THÉORÈME 4.** - Soit  $\rho_n$  une suite régularisante formée de fonctions  $\geq 0$ , indéfiniment différentiables, dépendant seulement de  $|x|$ , nulles pour  $|x| \geq \frac{1}{n}$  et telles que  $\int \rho_n dx = 1$ . Alors, pour toute fonction  $V$  surharmonique et localement bornée dans  $\Omega$ ,  $V * \rho_n \rightarrow V$  en tout point  $\in \Omega$ .

$\forall x_0 \in \Omega$  et  $\varepsilon > 0$ , on a immédiatement  $V * \rho_n(x_0) \geq V(x_0) - \varepsilon$  pour  $n$  assez grand.

Pour obtenir une inégalité dans l'autre sens, on considère l'ensemble  $E$  des points  $x \in \Omega$  tels que  $V(x) > V(x_0) + \varepsilon$  et

$$V * \rho_n(x_0) = \int_{x_0 - CE} V(x_0 - t) \rho_n(t) dt + \int_{x_0 - E} V(x_0 - t) \rho_n(t) dt .$$

La première intégrale est  $\leq V(x_0) + \varepsilon$ , et la deuxième s'écrit encore

$$I = \int_0^{1/n} \left[ \int_{(x_0 - E) \cap \partial\beta(0, r)} V(x_0 - t) d\sigma(t) \right] f_n(r) dr ,$$

où  $r = |t|$ ,  $f_n(r) = \rho_n(t)$ , et  $\sigma$  est la mesure superficielle sur la sphère  $\partial\beta(0, r)$ . En tenant compte de  $V \leq M$  sur un voisinage de  $x_0$ , et  $E$  effilé au point  $x_0$ :

$$\begin{aligned} I &\leq M \int_0^{1/n} \sigma[E \cap \partial\beta(x_0, r)] f_n(r) dr , \\ &\leq \varepsilon M \int_0^{1/n} \sigma[\partial\beta(0, r)] f_n(r) dr = \varepsilon M , \text{ pour } n \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

**THÉORÈME 5.** - La solution du problème de Dirichlet dans  $\omega$ , pour la donnée  $f$  sur  $\partial\omega$ ,  $H_F^\omega$ , coïncide avec la solution  $L_F^\omega$  de  $Lu = 0$  dans  $\omega$ , telle que  $F - L_F^\omega \in W_0^{1,2}(\omega)$ , dans les deux cas suivants :

1°  $f$  est la restriction à  $\partial\omega$  de  $F \in C^0(\bar{\omega}) \cap W^{1,2}(\omega)$  ;

2°  $f$  et  $F$  sont les restrictions à  $\partial\omega$  et à  $\omega$  d'une fonction  $V$ , surharmonique dans un ouvert  $\Omega \supset \bar{\omega}$  et  $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ .

1° Soit  $u$  sous-harmonique dans  $\omega$ , telle que

$$\limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \rightarrow y}} u(x) \leq f(y) , \quad \forall y \in \partial\omega ,$$

et soit une suite croissante d'ouverts réguliers  $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \omega$ , dont la réunion

est  $\omega$  ([3], prop. 7.1). Grâce à la continuité de  $F$ , on a, au voisinage de  $\partial\omega$  :

$$u \leq F + \varepsilon ,$$

donc aussi

$$u_1 = u - L_F^\omega - \varepsilon \leq F - L_F^\omega = \varphi .$$

$u_1$  est sous-harmonique dans  $\omega$ , et majorée, au voisinage de  $\partial\omega$ , par une fonction continue  $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$  ; donc, pour  $n$  assez grand,

en chaque point  $y \in \partial\omega_n$

$$\limsup_{\substack{x \in \omega_n \\ x \rightarrow y}} H_{u_1}^{\omega_n}(x) \leq u_1(y) \leq \varphi(y) ,$$

et au voisinage de  $\partial\omega_n$

$$H_{u_1}^{\omega_n} \leq \varphi + \varepsilon_1 .$$

Alors (théorème 1) :

$$H_{u_1}^{\omega_n} - L_\varphi^{\omega_n} \leq \varepsilon_1 \text{ dans } \omega_n , \text{ soit } H_{u_1}^{\omega_n} \leq L_\varphi^{\omega_n} \text{ dans } \omega_n .$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $L_\varphi^{\omega_n} \rightarrow 0$  (lemme 3) ;  $H_{u_1}^{\omega_n}$  est une suite croissante de fonctions harmoniques ; sa limite est donc une fonction harmonique  $\leq 0$  dans  $\omega$  et, a fortiori,  $u_1 \leq 0$  dans  $\omega$ , soit  $u \leq L_F^\omega$  dans  $\omega$ .

On montrerait de même que toute fonction  $v$ , surharmonique dans  $\omega$  et telle que

$$\liminf_{\substack{x \in \omega \\ x \rightarrow y}} v(x) \geq f(y) , \quad \forall y \in \partial\omega ,$$

majore  $L_F^\omega$  dans  $\omega$ , et par suite  $H_f^\omega = L_F^\omega$  dans  $\omega$ .

2° Soit maintenant  $V$  surharmonique dans  $\Omega$  et  $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ .

Dans le cas où  $V$  est localement borné, on a immédiatement  $H_V^\omega = L_V^\omega$  : en effet,  $V$  est limite dans  $\Omega$  de ses régularisées  $V * \rho_n$ , qui  $\in C^\infty(\overline{\omega})$  pour  $n$  assez grand, et par conséquent vérifient

$$H_{V * \rho_n}^\omega = L_{V * \rho_n}^\omega ;$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $H_{V * \rho_n}^\omega \rightarrow H_V^\omega$  dans  $\omega$ , et, pour une suite partielle  $n'$ ,

$$L_{V * \rho_{n'}}^\omega \rightarrow L_V^\omega \text{ p. p. dans } \omega .$$

Si  $V$  est quelconque, alors  $V$  est limite d'une suite croissante de fonctions

$V_n = \inf(V, n)$  du type précédent, d'où  $H_V^\omega = L_V^\omega$  ; et le passage à la limite est licite, car  $V_n \rightarrow V$  dans  $W^{1,2}(\omega)$  .

**THÉORÈME 6.** - Une fonction sous-harmonique dans  $\Omega$  , majorée p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$  par une fonction  $\in W_0^{1,2}(\Omega)$  , est  $\leq 0$  dans  $\Omega$  .

Soit  $u$  sous-harmonique dans  $\Omega$  ,  $\leq \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$  p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$  ;  $u^+$  est sous-harmonique et localement bornée dans  $\Omega$  , et  $u^+ \leq \varphi^+$  p. p. au voisinage de  $\partial\Omega$  .

On montre d'abord que, pour tout ouvert  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$  tel que  $u^+ \leq \varphi^+$  p. p. sur un voisinage de  $\partial\omega$  , on a  $H_{u^+}^\omega \leq L_{\varphi^+}^\omega$  : on considère une suite régularisante  $\rho_n$  ; pour  $n$  assez grand,

$$u^+ \star \rho_n \in C^\infty(\bar{\omega}) , \text{ donc } H_{u^+ \star \rho_n}^\omega = L_{u^+ \star \rho_n}^\omega ,$$

et  $u^+ \star \rho_n \leq \varphi^+ \star \rho_n$  au voisinage de  $\partial\omega$  , donc

$$L_{u^+ \star \rho_n}^\omega \leq L_{\varphi^+ \star \rho_n}^\omega ;$$

le passage à la limite se fait comme dans la première partie de la démonstration du théorème 5, 2°.

Soit  $\omega_n$  une suite croissante d'ouverts,  $\bar{\omega}_n \subset \Omega$  et  $\Omega = \cup \omega_n$  : pour  $n$  assez grand,  $H_{u^+}^{\omega_n} \leq L_{\varphi^+}^{\omega_n}$  , et quand  $n \rightarrow +\infty$  ,  $L_{\varphi^+}^{\omega_n} \rightarrow 0$  ; donc  $\lim_n H_{u^+}^{\omega_n} \leq 0$  dans  $\Omega$  et  $u^+ \leq 0$  , donc nul dans  $\Omega$  .

**THÉORÈME 7.** - Si  $V$  est surharmonique dans  $\Omega$  et  $\in W^{1,2}(\Omega)$  , alors  $V$  admet une p. g. m. h. (plus grande minorante harmonique) dans  $\Omega$  qui est  $L_V^\Omega$  .

La p. g. m. h. de  $V$  dans  $\Omega$  est la limite de la suite décroissante  $H_V^{\omega_n}$  pour toute suite croissante d'ouverts  $\omega_n \subset \bar{\omega} \subset \Omega$  , de réunion  $\Omega$  , quand cette limite n'est pas  $-\infty$  .

D'après le théorème 5 :  $H_V^{\omega_n} = L_V^{\omega_n}$  , et quand  $n \rightarrow +\infty$  ,  $L_V^{\omega_n} \rightarrow L_V^\Omega$  dans  $\Omega$  , d'où

$$\lim_n H_V^{\omega_n} = L_V^\Omega .$$

**COROLLAIRE 1.** - Soit  $V$  surharmonique dans  $\Omega$  et  $\in W^{1,2}(\Omega)$  ; alors  $V$  est un potentiel dans  $\Omega$  si et seulement si  $V \in W_0^{1,2}(\Omega)$  .

COROLLAIRE 2. - Soit  $V$  surharmonique dans  $\Omega$  et  $\in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$  ; alors, pour tout ouvert  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$  , la p. g. m. h. de  $V$  dans  $\omega$  est  $H_V^\omega$  .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRELOT (Marcel). - Introduction axiomatique de l'effilement, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 57, 1962, p. 77-95.
- [2] GILBARG (D.) and SERRIN (J.). - On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations, J. Anal. math., Jerusalem, t. 4, 1954-1956, p. 309-340.
- [3] HERVÉ (Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).
- [4] HERVÉ (Rose-Marie). - Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme 
$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 14, 1964 (à paraître).
- [5] HERVÉ (Rose-Marie). - Quelques propriétés des fonctions surharmoniques associées à une équation uniformément elliptique de la forme 
$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0,$$
 Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 15, 1965, (à paraître).
- [6] LITTMAN (W.), STAMPACCHIA (G.) and WEINBERGER (H. F.). - Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Scuola norm. sup. di Pisa, Série 3, t. 17, 1963, p. 43-77.
- [7] MORREY (Charles B.). - Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity, Math. Z., t. 72, 1959, p. 146-164.
- [8] MOSER (Jürgen). - A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 13, 1960, p. 457-468.
- [9] MOSER (Jürgen). - On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 577-591.
- [10] STAMPACCHIA (Guido). - Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 51, 1960, p. 1-37.
-