GEORGES LION

Familles résolvantes et frontière de Choquet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 9 (1964-1965), exp. nº 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A3_0>

FAMILLES RÉSOLVANTES ET FRONTIÈRE DE CHOQUET

par Georges LION

Cet exposé a pour objet de développer une note récente [7]. Pour étudier les familles résolvantes, nous allons partir du théorème d'existence de Choquet. Certains des résultats figurant ci-dessous peuvent être obtenus en utilisant les fonctions surmédianes ([6], [9]) ; certaines démonstrations en seraient simplifiées. Mais il faut de toutes façons introduire la frontière de Choquet. Ce dernier fait nous a conduits à rédiger un exposé autonome, sans parler de fonctions surmédianes.

L'origine de cette étude se situe dans le problème de représenter un noyau positif satisfaisant au principe complet du maximum, sur un espace localement compact ([4], [5], [6]). Nous ne reviendrons pas sur le passage de cette situation à la situation envisagée ici ([7]).

1. Notations.

Soient K un espace compact métrisable, $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur K.

$(V^\lambda)_{\lambda>0}$ désigne une famille d'opérateurs sur $\mathcal{C}$, transformant toute fonction positive en une fonction positive, et satisfaisant aux conditions :

1° Pour tout $\lambda > 0$, $\lambda V^\lambda(1) = 1$,

2° Pour tous λ et $\mu > 0$, $V^\lambda - V^\mu = (\mu - \lambda)V^\lambda V^\mu$.

Le sous-espace $H = V^\lambda(\mathcal{C})$ ne dépend pas de λ.

On suppose que H sépare les points de K.

2.

Pour tout x de K, on note M_x l'ensemble des mesures positives μ telles que, pour toute h de H, $\mu(h) = h(x)$.

La mesure ε_x appartient à M_x.

DÉFINITION. - On appelle frontière de Choquet de K, relativement à H, l'ensemble des points x de K tels que M_x se réduise à ε_x.

Soit P cette frontière ; on a alors le théorème d'existence de Choquet [2] :

Pour tout x de K, il existe dans M_x, au moins une mesure portée par P. P est un G_δ non vide.

Nous pouvons démontrer maintenant :

THÉORÈME 1.

(a) Pour tout x de K et toute f de $\mathcal{C}$, $\lambda V^\lambda f(x)$ tend vers une limite $\hat{f}(x)$ lorsque λ augmente indéfiniment.

(b) La mesure $f \to \hat{f}(x)$ est l'unique mesure de M_x portée par P.

Démonstration.

(a) Soit $h = V^\mu f$, $f \in \mathcal{C}$.

$$\lambda V^\lambda h = \lambda V^\lambda V^\mu f = \mu V^\lambda V^\mu f + V^\mu f - V^\lambda f$$

tend vers $V^\mu f = h$, lorsque λ tend vers ∞. Soit μ_λ^x la mesure $f \to \lambda V^\lambda f(x)$; et $M_{\lambda_0}^x = \{\mu_\lambda^x\}_{\lambda \geq \lambda_0}$. Chaque mesure μ_λ^x est positive, de masse 1.

Les ensembles $M_{\lambda_0}^x$ constituent une base de filtre $\mathcal{B}^x$ sur l'espace compact des mesures positives de masse 1 sur K.

Soit ν une mesure adhérente à tous les ensembles $M_{\lambda_0}^x$; et $h \in H$. $\nu(h)$ est adhérent à l'ensemble $\{\mu_\lambda^x(h)\}$; or, lorsque λ tend vers l'infini, $\mu_\lambda^x(h) = \lambda V^\lambda h(x)$ tend vers $h(x)$; $\nu(h) = h(x)$, et $\nu \in M_x$.

Si l'on suppose de plus que x appartient à P, ν est nécessairement ε_x. $\mathcal{B}^x$, qui a un seul point adhérent ε_x, tend vers ε_x. Si x appartient à P, μ_λ^x tend vers ε_x ; donc pour toute f de $\mathcal{C}$, $\lambda V^\lambda f(x)$ tend vers $f(x)$ sur P. Si x n'appartient pas à P, il existe une mesure μ de M_x portée par P. Donc pour tout λ,

$$\lambda V^\lambda f(x) = \int_P \lambda V^\lambda f(y)\, d\mu(y) .$$

Le théorème de Lebesgue montre alors que $\lambda V^\lambda f(x)$ a une limite $\hat{f}(x)$ et

$$\hat{f}(x) = \int_P f(y)\, d\mu(y) .$$

(b) Le dernier raisonnement est valable pour toute mesure μ de M_x portée par P ; pour toute telle mesure, on a donc

$$\mu(f) = \hat{f}(x) .$$

COROLLAIRE 1. - Le dual H' de H est réticulé pour son ordre naturel.

C'est la réciproque du théorème d'unicité de Choquet [8].

COROLLAIRE 2. - Pour que x appartienne à P, il faut et il suffit que, pour toute f de $\mathcal{C}$, $\hat{f}(x) = f(x)$.

La condition est nécessaire, on l'a vu plus haut.

Elle est suffisante, car tout x de K, tel que la mesure $f \to f(x)$ soit portée par P, appartient nécessairement à P.

3.

Ayant étudié le rôle de P relativement à la limite des fonctions $\lambda V^\lambda f$, nous allons préciser le lien entre P et un opérateur V^λ quelconque.

THÉORÈME 2. - Pour tous x de K et $\lambda > 0$, la mesure $f \to \lambda V^\lambda f(x)$ est portée par P.

Soit Γ le cône des fonctions f de $\mathcal{C}$ qui vérifient l'inégalité $\hat{f} \leq f$. Le cône Γ est semi-réticulé inférieurement. L'espace vectoriel $V = \Gamma - \Gamma$ est réticulé comme le prouve la relation

$$|f_1 - f_2| = f_1 + f_2 - 2\inf(f_1, f_2).$$

De plus, V contient H (puisque $\hat{h} = h$ si $h \in H$). V est donc partout dense dans $\mathcal{C}$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

K étant métrisable, il existe dans $\mathcal{C}$ un sous-ensemble dénombrable partout dense ; on peut supposer que ce sous-ensemble est contenu dans V, et constitué par la suite des fonctions $f_n - g_n$ où f_n et $g_n \in \Gamma$.

Pour tout n

$$\int \hat{f}_n(y)\, d\mu_\lambda^x(y) \doteq \int \lim_\mu \mu V^\mu f_n(y)\, d\mu_\lambda^x(y) = \lim_\mu \int \mu V^\mu f_n(y)\, d\mu_\lambda^x(y)$$

$$= \lim_\mu \mu V^\mu \lambda V^\lambda f_n(x) = \lambda V^\lambda f_n(x) = \int f_n(y)\, d\mu_\lambda^x(y) ;$$

or $\hat{f}_n \leq f_n$, donc

$$\int |f_n(y) - \hat{f}_n(y)|\, d\mu_\lambda^x(y) = \int (f_n(y) - \hat{f}_n(y))\, d\mu_\lambda^x(y) = 0.$$

L'ensemble A_n, où $\hat{f}_n$ est distincte de f_n, est négligeable pour la mesure μ_λ^x. Il en est de même pour l'ensemble B_n, où $\hat{g}_n \neq g_n$.

Soit $A = \bigcup_n (A_n \cup B_n)$; $\mu_\lambda^x(A) = 0$.

En $\xi \notin A$, on a, pour tout n,

$$\hat{f}_n(\xi) = f_n(\xi) \quad \text{et} \quad \hat{g}_n(\xi) = g_n(\xi) \ .$$

D'où, par convergence uniforme, $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ pour toute f de $\mathcal{C}$; donc $\xi \in P$. P contient donc le complémentaire de A ; $\mu_\lambda^x(P) = 1$, et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. - Pour que $V^\lambda f$ soit nulle, il faut et il suffit que f soit nulle sur P.

La condition est évidemment <u>suffisante</u>.

Elle est <u>nécessaire</u>. Soit f, telle que $V^\lambda f = 0$ pour un certain $\lambda > 0$, alors pour tout $\mu > 0$,

$$V^\mu f = V^\lambda f + (\lambda - \mu) V^\mu V^\lambda f = 0 \ .$$

Donc $\hat{f} = 0$, f étant égale à $\hat{f}$ sur P est nulle sur P.

COROLLAIRE 2. - Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, noyau de l'opérateur V^λ, est aussi un idéal de l'algèbre $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE 3 (Principe du maximum positif faible sur $\overline{P}$). - Si $V^\lambda f$ a un maximum > 0, elle atteint ce maximum en au moins un point <u>de $\overline{P}$</u> où f est $\geqslant 0$.

On sait déjà [3] que V^λ vérifie le principe complet du maximum, donc le principe du maximum positif faible ([4], [5]). $V^\lambda f$ atteint donc son maximum > 0 en au moins un point <u>de K</u> où f est $\geqslant 0$.

Soient C le compact où $V^\lambda f$ est maximum, D le compact où f est $\geqslant 0$; supposons que $C \cap D$ soit disjoint de $\overline{P}$. Dans ce cas, il existe une fonction positive g, nulle sur P, supérieure à $\sup(1 , 2 f)$ sur $C \cap D$. $V^\lambda f = V^\lambda(f - g)$ atteint son maximum seulement sur C. $f - g \leqslant f$, donc $f - g$ est < 0 hors de D et dans $C \cap D$; $f - g$ n'est donc positive qu'en des points où $V^\lambda(f - g)$ n'est pas maximum. D'où la contradiction qui prouve le corollaire.

4.

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}$ se trouve définie une fonction $\hat{f}$, limite simple de $\lambda V^\lambda f$; cette limite n'est pas nécessairement continue (voir § 5). Nous allons maintenant caractériser les cas où, pour toute f continue, $\hat{f}$ est aussi continue.

Rappelons qu'il existe un semi-groupe d'opérateurs sous-markoviens P_t sur K, tels que, en posant $P_0 f = \hat{f}$, on ait :

$$V^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) \, dt \qquad ([6], [7]).$$

On va maintenant démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

(A) La frontière de Choquet P est un sous-ensemble fermé de K.

(B) Pour toute f continue, $\hat{f}$ est continue.

(C) Lorsque λ augmente indéfiniment, $\lambda V^{\lambda} f$ tend vers $\hat{f}$ uniformément sur K $(f \in \mathcal{C})$.

(D) Le semi-groupe P_t est fortement continu sur $\mathcal{C}$.

Démonstration. - (A) $\Longrightarrow$ (B) :

Soit $f \in \mathcal{C}$. Posons

$$\overline{f}(x) = \inf_{\substack{h \geq f \text{ sur } P \\ h \in H}} h(x) \qquad \underline{f}(x) = \sup_{\substack{h \leq f \text{ sur } P \\ h \in H}} h(x)$$

Remarquons d'abord que si $h \in H$ est positive sur P, h est positive partout d'après le théorème d'existence de Choquet. Donc

$$\underline{f}(x) \leq \overline{f}(x) \quad \text{partout, et} \quad h = \underline{h} = \overline{h} \quad \text{si} \quad h \in H .$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure π telle que $\pi(f) = \overline{f}(x)$ et, pour toute g de $\mathcal{C}$, $\pi(g) \leq \overline{g}(x)$ (car l'application $g \to \overline{g}(x)$ est sous-additive).

Si $h \in H$, $\pi(h) \leq \overline{h}(x)$

$$\pi(-h) = -\pi(h) \leq \overline{-h}(x) = -h(x)$$

donc $\pi(h) = h(x)$.

Si $g \in \mathcal{C}$ est ≤ 0,

$$\pi(g) \leq \overline{g}(x) \leq 0 .$$

π est donc une mesure de M_x.

De plus, si g est nulle sur P, et positive ailleurs, $\pi(g) = 0$.

Soit ξ un point n'appartenant pas à P ; P étant fermé, il existe un voisinage U de ξ, tel que, pour toute fonction $g \geq 0$ dont le support est contenu dans U, on ait $\pi(g) = 0$. ξ n'appartient pas au support de π. A fortiori π est portée par P.

D'après le théorème 1, $\overline{f}(x) = \pi(f) = \hat{f}(x)$.

On montrerait de même que, pour toute f de $\mathcal{C}$, $\underline{f}(x) = \hat{f}(x)$. Or $\overline{f}$ (resp. $\underline{f}$) est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement), $\hat{f}$ est donc continue.

(B) $\Longrightarrow$ (A) . - Posons $P_f = \{x \mid f(x) = \hat{f}(x)\}$; P_f est fermé dans K et $P = \bigcap_{f \in \mathcal{C}} P_f$ est aussi fermé dans K (corollaire 2 du théorème 1).

(B) $\Longrightarrow$ (C) . - On a l'égalité

$$\hat{f}(x) = \inf_{\substack{h \geq f \text{ sur } P \\ h \in H}} h(x) = \sup_{\substack{h \leq f \text{ sur } P \\ h \in H}} h(x) .$$

Soit $\varepsilon > 0$; pour tout x , il existe une fonction h_x de H telle que

$$\hat{f}(x) - h_x(x) < \varepsilon \quad \text{et} \quad \hat{f} - h_x \geq 0 \text{ partout sur } K .$$

Soit U_x l'ouvert de K défini par $U_x = \{y \mid \hat{f}(y) - h_x(y) < \varepsilon\}$. On peut recouvrir K par une suite finie des ouverts U_x . Soient $U_1, \ldots, U_n$ correspondant à $h_1, \ldots, h_n \in H$. On a donc

$$\left.\begin{array}{l} \sup(h_1, \ldots, h_n) \leq \hat{f} \\ \text{et} \\ \hat{f} - \sup(h_1, \ldots, h_n) < \varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } K .$$

De même, il existe m fonctions $h'_1, \ldots, h'_m$ de H telles que

$$\left.\begin{array}{l} \inf(h'_1, \ldots, h'_m) \geq \hat{f} \\ \text{et} \\ \inf(h'_1, \ldots, h'_m) - \hat{f} < \varepsilon \end{array}\right\} \text{ sur } K .$$

Cette construction s'inspire de BAUER [1].

On sait que

$$u = \sup(h_1, \ldots, h_n) \leq \hat{f} \leq \inf(h'_1, \ldots, h'_m) = v$$

et

$$v - u < 2\varepsilon ;$$

on en déduit, en tenant compte de l'égalité $\lambda V^\lambda \hat{f} = \lambda V^\lambda f$,

$$u_\lambda = \sup(\lambda V^\lambda h_1, \ldots, \lambda V^\lambda h_n) \leq \lambda V^\lambda u \leq \lambda V^\lambda f \leq \lambda V^\lambda v \leq \inf(\lambda V^\lambda h'_1, \ldots, \lambda V^\lambda h'_m) = v_\lambda .$$

Lorsque λ augmente indéfiniment, u_λ tend vers u , v_λ vers v uniformément sur K .

Il existe donc un nombre positif λ_0 tel que, pour $\lambda \geq \lambda_0$, on ait

$$|v - v_\lambda| \quad \text{et} \quad |u - u_\lambda| \leq \varepsilon ,$$

ce qui entraîne

$$|u_\lambda - v_\lambda| \leq 4\varepsilon .$$

Pour $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$|\hat{f} - \lambda V^{\lambda} f| \leqslant |\hat{f} - u| + |u - u_{\lambda}| + |u_{\lambda} - \lambda V^{\lambda} f| \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + 4\varepsilon = 7\varepsilon .$$

(C) $\Longrightarrow$ (B) est évident.

(C) $\Longrightarrow$ (D) . - Pour toute f de $\mathcal{C}$, $\hat{f}$ appartient à $\overline{H}$; le théorème de Hille-Yosida précise que le semi-groupe P_t est fortement continu sur $\overline{H}$. Si nous posons $P_t f = P_t \hat{f}$, le semi-groupe devient fortement continu sur $\mathcal{C}$, et on a $P_0 f = \hat{f}$.

(D) $\Longrightarrow$ (C) . - P_t étant fortement continu sur $\mathcal{C}$, on peut écrire

$$\lambda V^{\lambda} f = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P_t f \, dt ;$$

si λ tend vers l'infini, $\lambda V^{\lambda} f$ tend vers $P_0 f = \hat{f}$ uniformément sur K .

Du théorème 3, on déduit les corollaires

COROLLAIRE 1. - L'espace de Banach $\overline{H}$ est isomorphe à l'espace des fonctions continues sur le compact P .

Soit φ une fonction continue sur P . On peut la prolonger à K tout entier par une fonction Φ ; $\lambda V^{\lambda} \Phi$ et $\hat{\Phi}$ ne dépendent que de φ ; on peut poser $\hat{\Phi} = \hat{\varphi}$. L'application $\varphi \to \hat{\varphi}$ de $\mathcal{C}(P)$ dans $\overline{H}$ a une application réciproque qui est la restriction d'une fonction de $\overline{H}$ à P (en effet $\varphi = \hat{\varphi}$ sur P).

Enfin il est facile de voir que, pour tout x de K et toute $\mu \in M_x$, on a

$$\mu(f) = f(x) \quad \text{pour toute } f \text{ de } \overline{H} .$$

On en déduit que $\|\varphi\| = \|\hat{\varphi}\|$.

COROLLAIRE 2. - L'opérateur V^{λ} induit un noyau de Hunt sur le compact P .

En effet, la restriction de V^{λ} à $\mathcal{C}(P)$ vérifie le principe du maximum positif faible, donc le principe complet du maximum [7]. De plus, l'image par V^{λ} de $\mathcal{C}(P)$ est isomorphe à H donc partout dense dans $\mathcal{C}(P)$.

5.

Nous allons maintenant donner un exemple où P n'est pas fermé.

Soit E l'espace topologique somme des trois demi-axes

$$D_1 =]-\infty , a] \qquad D_2 =]-\infty , b] \qquad D_3 = [c , +\infty[,$$

où les abscisses de a , b et c sont nulles. K est le compactifié d'Alexandroff de E , ω le point à l'infini.

Soient f continue sur K , f_i la restriction de f à D_i .

Si $f(\omega) = 0$, on pose

$$V^\lambda f = \begin{cases} e^{-(\lambda+1)x} \int_{-\infty}^{x} e^{(\lambda+1)u} f_1(u)\, du & x \in D_1 \\ e^{-(\lambda+1)y} \int_{-\infty}^{y} e^{(\lambda+1)u} f_2(u)\, du & y \in D_2 \\ e^{-(\lambda+1)z} \int_{-\infty}^{0} e^{(\lambda+1)u} \frac{f_1(u) + f_2(u)}{2}\, du + e^{-(\lambda+1)z} \int_{0}^{z} e^{(\lambda+1)u} f_3(u)\, du \end{cases}$$

$z \in D_3$, et si $f(\omega)$ n'est pas nul, on pose

$$V^\lambda f = V^\lambda[f - f(\omega)] + \frac{f(\omega)}{\lambda} .$$

On voit que $\hat{f} = f$ en tout point de K distinct de c ,

$$\hat{f}(c) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

P est l'ouvert $K - \{c\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Frontière de Silov et problème de Dirichlet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 3, 1958/59, n° 7, 23 p.

[2] CHOQUET (Gustave). - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1961/62, n° 8, 13 p.

[3] DENY (Jacques). - Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61, n° 6, 9 p.

[4] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et 316-369.

[5] LION (Georges). - Construction du semi-groupe associé à un noyau de Hunt, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61, n° 7, 9 p.

[6] LION (Georges). - Théorème de représentation d'un noyau par l'intégrale d'un semi-groupe, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1961/62, n° 3, 9 p.

[7] LION (Georges). - Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 3621-3623.

[8] MEYER (Paul-André). - Sur les démonstrations nouvelles du théorème de Choquet, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1961/62, n° 7, 9 p.

[9] RAY (Daniel). - Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 43-72.