SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

JACQUES DENY

Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 9 (1964-1965), exp. nº 1, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1964-1965__9__A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
9e année, 1964/65, n° 1
20 octobre et 5 novembre 1964

THÉORIE DE LA CAPACITÉ DANS LES ESPACES FONCTIONNELS

par Jacques DENY

1. Généralités sur les espaces fonctionnels. Potentiels purs.

DÉFINITION 1. - Soient X un espace localement compact, et ξ une mesure de Radon positive sur X. Un espace fonctionnel relatif à X et ξ est un espace de Hilbert complet dont les éléments sont des classes de fonctions numériques localement ξ-intégrables, vérifiant l'axiome suivant :

(a) Pour tout compact K de X il existe un nombre $A(K)$ tel que, pour tout élément u de H, on ait :

$$\int_K |u|\, d\xi \leq A(K)\, \|u\| .$$

On désigne par $\|.\|$ la norme dans H, et par $(.\ ,\ .)$ le produit scalaire. Deux fonctions presque partout égales (localement) pour ξ représentent le même élément de H. On désignera le plus souvent par la même lettre un élément de H et l'un quelconque de ses représentants. On considèrera seulement le cas des espaces fonctionnels réels. Un élément de H est dit positif (resp. positif dans un ouvert ω) s'il admet un représentant positif (resp. positif dans ω). L'ensemble des éléments positifs de H est un cône fermé noté H^+.

Les éléments U^f. - Soit B l'ensemble des classes de fonctions mesurables essentiellement bornées à support compact. A tout élément f de B on peut associer un élément U^f de H, et un seul, tel que l'on ait :

$$(u\ ,\ U^f) = \int u\, f\, d\xi \qquad \text{pour tout } u \in H .$$

Cela résulte immédiatement de ce que, d'après (a), la forme linéaire $u \to \int u\, f\, d\xi$ est bornée, donc continue.

L'ensemble de ces éléments U^f est partout dense dans H ; en effet cet ensemble est linéaire, et si u est orthogonal à tous les U^f, on a $\int u\, f\, d\xi = 0$ pour toute $f \in B$, donc un représentant quelconque de u est nul presque partout, donc u est l'élément nul de H.

L'élément U^f est appelé le potentiel engendré par f. Le nombre

$$\|U^f\|^2 = \int U^f\, f\, d\xi$$

est l'énergie de f. La racine carrée de l'énergie est une semi-norme hilbertienne sur B.

L'application linéaire $f \to U^f$ de B dans H est appelée le <u>noyau</u> associé à l'espace fonctionnel H ; elle n'est pas nécessairement injective.

<u>Potentiels purs</u>. - On note P l'adhérence du cône constitué par les éléments U^f avec $f \in B^+$ (ensemble des éléments positifs de B). Les éléments de P sont appelés <u>potentiels purs</u>. Plus généralement, si ω est un ouvert de X, on note P_ω l'adhérence de l'ensemble des éléments U^f avec $f \in B^+(\omega)$ (ensemble des éléments de B^+ à support dans ω). Evidemment P_ω est un sous-cône fermé de P, et on a $P = P_X$. Pour que P_ω soit réduit à l'élément nul, il faut et il suffit que tout élément de H s'annule (presque partout) sur ω. C'est en particulier le cas si ω est de mesure nulle.

Voici une caractérisation importante des potentiels purs, et plus généralement des éléments de P_ω :

THÉORÈME 1. - <u>Soit</u> ω <u>un ouvert de</u> X. <u>Pour qu'un élément</u> u <u>de</u> H <u>appartienne à</u> P_ω, <u>il faut et il suffit qu'il satisfasse à l'une ou l'autre des relations suivantes, qui sont équivalentes</u> :

(1) $\|u + v\| \geqslant \|u\|$ <u>pour toute</u> $v \in H$, $v \geqslant 0$ <u>dans</u> ω.

(2) $(u , v) \geqslant 0$ <u>pour toute</u> $v \in H$, $v \geqslant 0$ <u>dans</u> ω.

<u>Démonstration</u>. - L'équivalence des relations (1) et (2) est évidente.

Tout élément de P_ω vérifie (2) : en effet, cette relation est évidente pour un élément U^f avec $f \in B^+(\omega)$, car $(U^f , v) = \int f\, v\, d\xi \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout élément de P_ω (continuité du produit scalaire).

Soit inversement u un élément de H ; sa projection u' sur le cône convexe et fermé P_ω est, d'après un théorème élémentaire bien connu dans les espaces de Hilbert, caractérisée par les relations :

(3) $\|u'\|^2 = (u , u')$;

(4) $(u' , u) \geqslant (u , v)$ pour toute $v \in P_\omega$.

La relation (4) ayant lieu en particulier pour les éléments $v = U^f$ avec $f \in B^+(\omega)$ il en résulte $u'(x) \geqslant u(x)$ presque partout dans ω. Supposons maintenant que u vérifie la condition (2) ; on a alors :

$$\|u' - u\|^2 = (u' , u' - u) - (u , u' - u) \leqslant 0 ,$$

d'après (3) et le fait que $u' - u$ est positif dans ω. On a donc $u' = u$, donc u est bien un élément de P_ω.

2. Capacité et encombrement.

Dans ce paragraphe, on ne fait aucune hypothèse nouvelle sur H . Si ω est un ouvert de X , on note $\mathcal{U}_\omega$ l'ensemble des éléments de H qui sont $\geqslant 1$ sur ω . C'est un convexe fermé de H (d'après l'axiome (a)), éventuellement vide.

DÉFINITION 2. - On appelle encombrement [1] de ω , et on note enc(ω) , le nombre

$$\mathrm{enc}(\omega) = +\infty \text{ si } \mathcal{U}_\omega = \emptyset \,;$$
$$\mathrm{enc}(\omega) = \inf_{u\in\mathcal{U}_\omega} \|u\|^2 \text{ si } \mathcal{U}_\omega \neq \emptyset \,.$$

Dans ce dernier cas, on appelle potentiel d'encombrement de ω l'unique élément de $\mathcal{U}_\omega$ dont la norme est minimum.

L'existence et l'unicité de ce potentiel d'encombrement résultent de ce que $\mathcal{U}_\omega$ est convexe et fermé. L'encombrement de ω est le carré de la norme du potentiel d'encombrement.

Pour que l'encombrement de ω soit nul, il faut et il suffit que la mesure de ω soit nulle. En effet $\mathrm{enc}(\omega) = 0$ entraîne que le potentiel d'encombrement u de ω est nul, et comme $u(x) \geqslant 1$ presque partout sur ω , cela entraîne $\xi(\omega) = 0$. Si inversement $\xi(\omega) = 0$, l'élément nul appartient à $\mathcal{U}_\omega$, d'où $\mathrm{enc}(\omega) = 0$.

Le potentiel d'encombrement u de ω est un élément de P_ω : en effet, pour tout élément v de H positif sur ω , on a $\|u + v\| \geqslant \|u\|$ (par définition), d'où le résultat, d'après le théorème 1.

Notons maintenant P^1_ω l'adhérence de l'ensemble des éléments U^f avec $f \in B^+(\omega)$ et $\int f\, d\xi = 1$. C'est un ensemble convexe et fermé de H , vide seulement si ω est de mesure nulle.

DÉFINITION 3. - On appelle capacité de ω , et on note cap(ω) , le nombre :

$$\mathrm{cap}(\omega) = 0 \text{ si } P^1_\omega = \emptyset \,;$$
$$\mathrm{cap}(\omega) = 1/\inf_{v\in P^1_\omega} \|v\|^2 \leqslant +\infty \text{ si } P^1_\omega \neq \emptyset \,.$$

Voici une adaptation au cadre des espaces fonctionnels d'un résultat récent de B. FUGLEDE [7] :

THÉORÈME 2. - L'encombrement d'un ouvert quelconque ω est égal à sa capacité. Si ce nombre est fini, le potentiel d'encombrement u de ω est égal à son potentiel capacitaire, c'est-à-dire $u = 0$ si $\xi(\omega) = 0$; sinon

---

(1) Terminologie introduite par G. CHOQUET [5] dans un contexte un peu différent.

$$u = v/\|v\|^2$$

où v est l'élément de norme minimum de P^1_ω .

Démonstration. - On peut supposer $\xi(\omega) > 0$. Alors P^1_ω n'est pas vide et admet un unique élément de norme minimum, soit v . Cet élément est caractérisé par :

$$(v , U^f - v) \geqslant 0 \quad \text{pour toute} \quad f \in B^+(\omega) \quad \text{avec} \quad \int f\, d\xi = 1 .$$

Il en résulte qu'on a $v(x) \geqslant \|v\|^2$ presque partout sur ω .

Si $\mathrm{enc}(\omega) = +\infty$, il n'y a pas d'élément $\geqslant 1$ sur ω , donc $\|v\| = 0$, d'où $v = 0$ et $\mathrm{cap}(\omega) = +\infty$.

Si $\mathrm{enc}(\omega) < +\infty$, appelons u le potentiel d'encombrement de ω . On a, pour toute $f \in B^+(\omega)$ avec $\int f\, d\xi = 1$:

$$(U^f , u) = \int u\, f\, d\xi \geqslant 1$$

d'où, comme v est limite de tels U^f :

(5) $$(v , u) \geqslant 1 .$$

Cela exige $v \neq 0$, d'où $\mathrm{cap}(\omega) < +\infty$. Posons alors $w = v/\|v\|^2$. On a $w \geqslant 1$ sur ω , d'où $w \in \mathcal{U}_\omega$. Mais d'autre part, (5) et l'inégalité de Schwarz entraînent

$$1 \leqslant (v , u) \leqslant \|v\| \, \|u\| ,$$

d'où

$$\|w\|^2 = \left\|\frac{v}{\|v\|^2}\right\|^2 = \frac{1}{\|v\|^2} \leqslant \|u\|^2$$

et par conséquent $w = u$ (unicité de l'élément de $\mathcal{U}_\omega$ dont la norme est minimum).

Le potentiel capacitaire w est donc égal au potentiel d'encombrement u . De plus on a :

$$\mathrm{enc}(\omega) = \|u\|^2 = \|w\|^2 = \frac{1}{\|v\|^2} = \mathrm{cap}(\omega) ,$$

ce qui achève la démonstration.

Dans la suite, on utilisera seulement les expressions "capacité" et "potentiel capacitaire" au lieu de "encombrement" et "potentiel d'encombrement".

Familles ordonnées d'ouverts. - Soient ω et ω' deux ouverts de X , tels que ω soit contenu dans ω' ; on a l'inclusion évidente $\mathcal{U}_{\omega'} \subset \mathcal{U}_\omega$, d'où on déduit $\mathrm{cap}(\omega) \leqslant \mathrm{cap}(\omega')$; la capacité est une fonction croissante d'ouverts.

L'inclusion précédente, et un théorème élémentaire concernant les projections d'un élément d'un espace de Hilbert sur les ensembles d'une famille ordonnée filtrante de convexes fermés non vides permet d'énoncer :

Soit $\{\omega_i\}_{i\in I}$ une famille ordonnée filtrante d'ouverts de X, de capacité finie. Si la limite de la famille ordonnée filtrante des nombres réels $\operatorname{cap}(\omega_i)$ est finie, la famille des potentiels capacitaires des ω_i converge fortement dans H.

Dans le cas d'une famille croissante, la limite de $\operatorname{cap}(\omega_i)$ n'est autre que la capacité de

$$\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i \ ;$$

si cette limite est finie, le potentiel capacitaire de ω_i converge vers celui de ω ; cela résulte de la relation

$$\mathcal{U}_\omega = \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_{\omega_i} \ .$$

On en déduit en particulier que la capacité d'un ouvert quelconque ω est la borne supérieure des capacités des ouverts relativement compacts contenus dans ω.

<u>Capacité extérieure et potentiel capacitaire extérieur</u>. - Soit E une partie quelconque de X. On appelle capacité extérieure de E, et on note $\operatorname{cap}_e(E)$, la borne inférieure des capacités des ouverts contenant E.

Posons

$$\mathcal{U}_E = \overline{\bigcup_{\omega\supset E} \mathcal{U}_\omega} \ .$$

Si ce convexe fermé de H n'est pas vide, son élément de norme minimum u_E est appelé potentiel capacitaire extérieur de E. C'est la limite forte des projections u_ω de l'origine sur les $\mathcal{U}_\omega$ non vides, de sorte qu'on a $\|u_E\|^2 = \operatorname{cap}_e(E)$.

Si $\operatorname{cap}_e(E)$ est finie et si $\{\omega_n\}$ est une suite décroissante d'ouverts contenant E et telle que $\operatorname{cap}(\omega_n)$ tende vers $\operatorname{cap}_e(E)$, u_{ω_n} converge fortement vers u_E, de sorte qu'on a $u_E(x) \geqslant 1$ presque partout sur E. Il en résulte qu'un ensemble de capacité extérieure nulle est (localement) de mesure nulle.

Si E et E' sont deux parties de X telles que $E \subset E'$, on a évidemment $\mathcal{U}_{E'} \subset \mathcal{U}_E$, d'où $\operatorname{cap}_e(E) \leqslant \operatorname{cap}_e(E')$. La capacité extérieure est donc une fonction croissante d'ensembles. Cette fonction n'est pas en général sous-additive (elle l'est lorsque le noyau associé à H est positif ; voir § 3).

La capacité d'un ouvert quelconque ω est la borne supérieure des capacités (extérieure) des compacts contenus dans ω. En effet il suffit de le montrer pour ω relativement compact (la capacité d'un ouvert quelconque étant la borne supérieure des capacités des ouverts relativement compacts qu'il contient). Soit donc $\{K_n\}$ une suite croissante de compacts contenus dans ω et tels que $\xi(K_n)$ tende vers $\xi(\omega)$. Si $\operatorname{cap}_e(K_n)$ est bornée (seul cas non trivial), la suite des potentiels capacitaires extérieurs u_{K_n} est convergente (d'après la décroissance des convexes $\mathcal{U}_{K_n}$) vers un élément u de H tel que $u(x) \geqslant 1$ presque partout sur ω, puisque $u_{K_n}(x) \geqslant 1$ presque partout sur K_n et que $\xi(\omega - K_n)$ tend vers 0, Comme on a $\|u\|^2 \leqslant \operatorname{cap}(\omega)$, u n'est autre que le potentiel capacitaire de ω, d'où le résultat.

Appelons capacité d'un compact sa capacité extérieure. On peut définir la capacité intérieure d'un ouvert ω : d'après la remarque précédente, elle coïncide avec la capacité de ω. La capacité extérieure est donc une fonction croissante d'ensembles, qui est <u>continue à droite</u> pour les compacts. Ce serait une "vraie capacité" (2) si la capacité extérieure d'une limite croissante d'ensembles E_n était égale à la limite de $\operatorname{cap}_e(E_n)$. Or, dans le cadre très général où nous nous sommes placés, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi : cela tient au fait que la topologie de X n'a joué jusqu'à présent presque aucun rôle, et que le choix des ouverts pour la définition de la capacité était parfaitement arbitraire. On introduira plus loin (§ 4) une condition de régularité qui entraînera cette propriété des suites croissantes, ce qui permettra d'énoncer un théorème de capacitabilité.

3. Espaces fonctionnels à noyau positif.

DÉFINITION 4. - <u>L'espace fonctionnel</u> H <u>est dit à noyau positif si l'application linéaire</u> $f \to U^f$ <u>de</u> B <u>dans</u> H <u>est croissante</u>.

Il revient au même de dire que <u>tous les potentiels purs sont positifs</u>. Voici une caractérisation importante, due à ARONSZAJN et SMITH [2] :

THÉORÈME 3. - <u>Pour que l'espace fonctionnel</u> H <u>soit à noyau positif, il faut et il suffit qu'à tout élément</u> u <u>de</u> H <u>on puisse associer un autre élément</u> $\tilde{u}$ <u>de</u> H <u>tel qu'on ait</u> :

$$\tilde{u}(x) \geqslant |u(x)| \quad \text{presque partout ;}$$

$$\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\| .$$

Rappelons brièvement la démonstration. Supposons H à noyau positif. Soit $u \in H$,

---

(2) Traduction de l'expression "true capacity", employée par M. BRELOT [3] ; on dit aussi : "capacité générale".

et soient u' et u'' les projections de u et $-u$ sur P (le cône des potentiels purs). Posons $\tilde{u} = u' + u''$. On sait (voir démonstration du théorème 1) qu'on a $u'(x) \geqslant u(x)$ et $u''(x) \geqslant -u(x)$ presque partout. Comme u' et u'' sont positifs par hypothèse, on a $\tilde{u}(x) > |u(x)|$ presque partout. D'autre part, on a $\|\tilde{u}\| \leqslant \|u\|$ (propriété des projections sur un cône convexe d'un espace de Hilbert, qui se réduit à une remarque de géométrie élémentaire dans l'espace R^3). La condition est donc nécessaire.

Supposons inversement que la condition soit vérifiée. Soit u un potentiel pur et soit $\tilde{u}$ associé à u comme dans l'énoncé. On a :

$$\|\tilde{u} - u\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 - \|u\|^2 - 2(u\ ,\ \tilde{u} - u)\ ;$$

or, d'après les deux relations de l'énoncé et la caractérisation des potentiels purs (théorème 1), le second membre est $\leqslant 0$; on a donc $u = \tilde{u} \geqslant 0$; la condition est donc suffisante.

THÉORÈME 4. – <u>Si l'espace fonctionnel</u> H <u>est à noyau positif</u>, <u>la capacité extérieure est une fonction complètement sous-additive d'ensembles</u>.

Considérons d'abord deux ouverts ω_1 et ω_2, qu'on peut supposer de capacité finie, et appelons ω leur réunion. Soient u_1 et u_2 les potentiels capacitaires de ω_1 et ω_2. L'élément

$$v = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}\widetilde{(u_1 - u_2)}$$

est, d'après le théorème 3, $\geqslant 1$ sur ω, et on a donc

$$\operatorname{cap}(\omega) \leqslant \|v\|^2 \leqslant 2\left\|\frac{u_1 + u_2}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{\widetilde{(u_1 - u_2)}}{2}\right\|^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u_1 + u_2\|^2 + \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|^2$$

$$= \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 = \operatorname{cap}(\omega_1) + \operatorname{cap}(\omega_2)\ .$$

La sous-additivité de la capacité, démontrée dans le cas de deux ouverts, s'étend immédiatement au cas d'une suite finie. Considérons maintenant une suite infinie d'ouverts ω_i. Posons

$$\omega'_n = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_i\ ;$$

si tous les ω_i sont de capacité finie (seul cas non trivial), il en est de même des ω'_n, et on sait (voir § 3, familles filtrantes d'ouverts) que la capacité de ω'_n tend vers celle de

$$\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega'_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i \; .$$

On a donc :

$$\operatorname{cap}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{cap}(\omega_i) \; .$$

De cette relation, on déduit immédiatement la sous-additivité complète de la capacité extérieure.

DÉFINITION 5. - Une fonction numérique f définie sur X est dite quasi-continue si elle vérifie la propriété suivante : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert de capacité $< \varepsilon$ tel que la restriction de f au complémentaire de cet ouvert soit continue.

Le résultat suivant nous sera utile dans la théorie de la complétion fonctionnelle :

THÉORÈME 5.(3). - Si l'espace fonctionnel H est à noyau positif, toute fonction numérique quasi-continue f qui est $\leqslant 0$ presque partout sur X est $\leqslant 0$ quasi-partout (i. e. sauf sur un ensemble de capacité extérieure nulle) sur X .

En effet, d'après le théorème 4, il suffit de montrer que les ensembles

$$E_\alpha = \{x \mid f(x) > \alpha > 0\}$$

sont tous de capacité extérieure nulle. Supposons donc que, pour un certain $\alpha > 0$, on ait $\operatorname{cap}_e(E_\alpha) > 0$. Soit ω un ouvert de capacité $< \operatorname{cap}_e(E_\alpha)$ et tel que la restriction de f à $\complement\omega$ soit continue. L'ensemble $\Omega = E_\alpha \cup \omega$ est un ouvert, et sa capacité est strictement plus grande que $\operatorname{cap}(\omega)$.

Soit $g \in B^+(\Omega)$ telle que $\int g\, d\xi = 1$ et $\|U^g\|^2 \leqslant 1/\operatorname{cap}(\Omega) + \varepsilon$, où ε est un nombre positif donné (l'existence d'une telle g est assurée par le théorème 2). Si u est le potentiel capacitaire de ω , on a :

$$\int_\omega g\, d\xi \leqslant \int gu\, d\xi \leqslant \|u\|\;\|U^g\| \leqslant \sqrt{\operatorname{cap}(\omega)}\,\sqrt{\frac{1}{\operatorname{cap}(\Omega)} + \varepsilon} \;,$$

et cette dernière quantité est < 1 pour ε assez petit. Cela entraîne :

$$\int_{E_\alpha - \omega} g\, d\xi = \int_\Omega g\, d\xi - \int_\omega g\, d\xi > 0 \;,$$

---

(3) Enoncé sans démonstration (un peu légèrement) dans [6] (2e partie, proposition 3.2) lorsque les notions de "quasi-partout" et de "quasi-continuité" sont relatives à la capacité newtomienne classique. Une démonstration, valable pour les capacités associées à des noyaux plus généraux que le noyau newtonien, a été donnée par H. WALLIN [8] (lemme 6).

ce qui est contraire à l'hypothèse que E_α est (localement) de mesure nulle.

Remarque. - L'énoncé précédent est encore valable si on y remplace X par un ouvert de X .

4. Espaces fonctionnels réguliers.

On dira qu'un élément u de l'espace fonctionnel H est continu (resp. quasi-continu) s'il admet un représentant continu (resp. quasi-continu). Si la mesure est partout dense dans X , un élément de H admet au plus un représentant continu, mais peut admettre une infinité de représentants quasi-continus.

Si u est un élément continu de H , on a l'inégalité

$$\text{cap}\{x \mid u(x) > \alpha > 0\} \leq \frac{\|u\|^2}{\alpha^2} \tag{6}$$

(on a désigné par la même lettre l'élément u et un représentant continu) ; cela résulte de l'identité de la capacité et de l'encombrement (théorème 2), car l'élément u/α est > 1 dans l'ouvert $\{x \mid u(x) > \alpha\}$.

Si l'espace fonctionnel H est à noyau positif, l'ensemble des représentants quasi-continus d'un élément de H , est, d'après le théorème 5, identique à l'ensemble des fonctions numériques qui sont quasi-partout égales à l'un quelconque de ces représentants.

DÉFINITION 6. - L'espace fonctionnel H est dit régulier si l'ensemble des éléments continus de H est partout dense dans H .

Exemple. - Soit ν une mesure positive et de type positif sur $X = R^n$ (plus généralement un groupe abélien localement compact). Soit H_0 l'espace vectoriel des (classes de) fonctions localement sommables u de la forme $\nu \star f$, avec $f \in B$. On vérifie aisément que l'application

$$u \to \|u\|^2 = \text{Tr}\ \nu \star f \star \check{f} = \iint f(x - t)\ f(x)\ d\nu(t)\ dx$$

est une forme quadratique définie positive sur H_0 . D'autre part, soit K un compact de X ; si $u = \nu \star f$, on a

$$[\int_K |u|\ dx]^2 \leq \text{Tr}\ \nu \star f \star \check{f}\ \text{Tr}\ \nu \star \chi_K \star \check{\chi}_K ,$$

où χ_K est la fonction caractéristique de K , de sorte que, si on pose

$$A(K) = (\text{Tr}\ \nu \star \chi_K \star \check{\chi}_K)^{\frac{1}{2}} ,$$

il vient

$$\int_K |u| \, dx \leq A(K) \, \|u\| \, .$$

Il en résulte que le complété de H_0 pour la norme $\|.\|$ est isomorphe à un espace fonctionnel H (relatif à la mesure de Haar) qui est à noyau positif. Cet espace est <u>régulier</u>, car tout élément de H est limite forte de ses "régularisés", qui sont des éléments continus. On l'appelle <u>espace des potentiels d'énergie finie par rapport au noyau de convolution</u> ν .

THÉORÈME 6. - <u>Dans un espace fonctionnel régulier à noyau positif, tout élément admet un représentant quasi-continu</u>.

Soit en effet u un élément de l'espace fonctionnel régulier à noyau positif H. Il existe une suite d'éléments continus u_n de H convergeant vers u , et tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^k \|u_{k+1} - u_k\|^2 < \infty \, .$$

Posons

$$e_k = \{x \mid |u_{k+1}(x) - u_k(x)| > 2^{-k}\} \, .$$

D'après (6) et la sous-additivité de la capacité, on a :

$$\operatorname{cap}(e_k) \leq 2.4^k \, \|u_{k+1} - u_k\|^2$$

de sorte que la capacité de l'ouvert $\omega_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} e_k$ tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$.

Or, dans $\complement\omega_j$, la série $u_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1}(x) - u_k(x))$ est normalement convergente, donc la série converge en tout point du complémentaire de l'intersection des ω_j , c'est-à-dire quasi-partout, et sa somme définit une fonction quasi-continue u^* .

Il reste à prouver que u^* est un représentant de u . Or si $f \in B$, $f(x) = 0$ sur ω_j , on a, en vertu de la convergence de u_n vers u dans L^1_{loc} et de la convergence uniforme de u_n vers u^* dans $\complement\omega_j$:

$$\int u \, f \, d\xi = \lim_{n \to \infty} \int u_n \, f \, d\xi = \int u^* \, f \, d\xi \, .$$

Il en résulte qu'on a $u(x) = u^*(x)$ presque partout dans $\complement\omega_j$, d'où finalement $u(x) = u^*(x)$ presque partout, car l'intersection des ω_j étant de capacité extérieure nulle, elle est localement de mesure nulle (voir § 2).

Le résultat suivant montre que l'introduction de ces représentants quasi-continus réalise une "complétion fonctionnelle" (voir [1]) de l'espace des éléments continus de H :

THÉORÈME 7. - Soit H un espace fonctionnel régulier à noyau positif. Soit $\{v_n\}$ une suite convergente d'éléments de H, de limite v. Si v_n^* (resp. v^*) est un représentant quasi-continu de v_n (resp. v), il existe une suite partielle $v_{n_k}^*$ telle que $v_{n_k}^*(x)$ converge quasi-partout vers $v^*(x)$.

Voici le principe de la démonstration : on commence par établir que, si u^* est un représentant quasi-continu de l'élément u de H, on a :

$$\text{cap}_e\{x \mid u^*(x) \geqslant \alpha > 0\} \leqslant \|u\|^2/\alpha^2 .$$

Cela se déduit facilement de (6) appliquée à une suite d'éléments continus de H convergeant assez vite vers u pour que la convergence de $u_n(x)$ vers $u^*(x)$ soit uniforme sur le complémentaire d'un ouvert de capacité arbitrairement petite.

On achève alors, comme dans la démonstration du théorème 6, en observant que, si la série $\sum 4^k \|v_{k+1} - v_k\|^2$ est convergente, la suite $v_k^*(x)$ est uniformément convergente sur le complémentaire d'un ensemble de capacité extérieure arbitrairement petite. Toute fonction f telle que $f(x) = \lim v_k^*(x)$ quasi-partout est un représentant quasi-continu de v, donc est quasi-partout égale à v^*, d'après le théorème 5.

LEMME. - On suppose que H est un espace fonctionnel régulier à noyau positif. Si l'ensemble $E \subset X$ est de capacité extérieure finie, les éléments de $\mathcal{U}_E$ sont les éléments de H dont les représentants quasi-continus sont $\geqslant 1$ quasi-partout sur E.

En effet, soit u un élément de $\mathcal{U}_E$, et soit u^* un représentant quasi-continu de u. Par définition de $\mathcal{U}_E$ (voir § 2) il existe une suite d'éléments $u_n \in \mathcal{U}_{\omega_n}$, où ω_n est un ouvert contenant E, convergeant vers u dans H. Or, d'après **la remarque** suivant le théorème 5, tout représentant quasi-continu u_n^* de u_n est $\geqslant 1$ quasi-partout sur ω_n, donc quasi-partout sur E. Donc $u^*(x)$ est $\geqslant 1$ quasi-partout sur E, d'après le théorème 7.

Soit inversement u un élément de H, dont un représentant quasi-continu u^* est $\geqslant 1$ quasi-partout sur E. Modifiant éventuellement u^* sur un ensemble de capacité extérieure nulle, on peut supposer $u^*(x) \geqslant 1$ partout sur E. Comme on a $u = \lim(1 + \frac{1}{n})u$ et que $\mathcal{U}_E$ est fermé, on peut même supposer $u^*(x) > 1$ partout sur E.

Soit alors $\varepsilon > 0$, et soit ω_ε un ouvert de capacité $< \varepsilon$, tel que la restriction de u^* au complémentaire de ω_ε soit continue. L'ensemble

$$\Omega_\varepsilon = \{x \mid u^*(x) > 1\} \cup \omega_\varepsilon$$

est un ouvert de X qui contient E. Si w_ε est le potentiel capacitaire de ω_ε, on a $u(x) + w_\varepsilon(x) \geqslant 1$ presque partout sur Ω_ε, donc $v_\varepsilon = u + w_\varepsilon$ est un élément de $\mathcal{U}_{\Omega_\varepsilon}$, donc de $\mathcal{U}_E$. Comme w_ε tend vers 0 avec ε, il en résulte bien que u appartient à $\mathcal{U}_E$.

THÉORÈME 8. - On suppose que H est un espace fonctionnel régulier à noyau positif. Si l'ensemble E de X est la limite d'une suite croissante d'ensembles E_n, on a $\text{cap}_e(E) = \lim \text{cap}_e(E_n)$.

En effet on peut supposer que tous les E_n sont de capacité extérieure finie (seul cas non trivial). Soit u_n le potentiel capacitaire extérieur de E_n, c'est-à-dire la projection de l'origine de H sur $\mathcal{U}_{E_n}$, et soit u_n^* un représentant quasi-continu de u_n.

Si l'intersection $\mathcal{U} = \bigcap \mathcal{U}_{E_n}$ n'est pas vide, u_n converge fortement vers la projection u de l'origine sur $\mathcal{U}$. Soit u^* un représentant quasi-continu de u. Comme $u_n^*(x) \geqslant 1$ quasi-partout sur E_n (lemme précédent), il résulte du théorème 7 que $u^*(x) \geqslant 1$ quasi-partout sur E. Donc u est un élément de $\mathcal{U}_E$, d'où :

$$\text{cap}_e(E) \leqslant \|u\|^2 = \lim \|u_n\|^2 = \lim \text{cap}_e(E_n) .$$

L'inégalité opposée étant évidente, on a bien $\text{cap}_e(E) = \lim \text{cap}_e(E_n)$.

Si $\mathcal{U}$ est vide, $\text{cap}_e(E_n) = \|u_n\|^2$ tend vers $+\infty$; alors $\text{cap}_e(E) = +\infty$, et l'énoncé est encore valable.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses sur H, tout ensemble K-analytique de X est capacitable.

En effet, les conditions de l'énoncé du théorème de capacitabilité de Choquet sont toutes remplies (voir [3] et [4]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K. T.). - Functional spaces and functional completion, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1956, p. 125-185.

[2] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K. T.). - A characterization of positive reproducing kernels, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 611-622.

[3] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute, 1960 (Tata Institute for fundamentale Research, Lectures in Mathematics, 19).

[4] CHOQUET (Gustave). - Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1955, p. 131-295.

[5] CHOQUET (Gustave). - Etude des encombrements et capacités associés à un noyau, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 13, 10 p.

[6] DENY (J.) et LIONS (J.-L.). - Les espaces du type Beppo-Levi, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 5, 1955, p. 305-370.

[7] FUGLEDE (B.). - Une application du théorème du minimax à la théorie du potentiel, Colloque international de Théorie du potentiel [1964. Orsay], Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

[8] WALLIN (H.). - Continuous functions and potential theory, Archiv för Matematik, t. 5, 1963, p. 55-84.