Paul-André Meyer

Progrès récents dans la théorie des cônes convexes à base compacte

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 8 (1963-1964), exp. n° 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1963-1964__8__A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
8e année, 1963/64, n° 1

24 Octobre 1963

PROGRÈS RÉCENTS DANS LA THÉORIE DES CÔNES CONVEXES À BASE COMPACTE

par Paul-André MEYER

Les résultats de cet exposé trouvent leur origine dans un mémoire de LOOMIS ([3]), paru en Juillet 1962, qui envisage le problème des représentations intégrales dans les cônes convexes à base compacte d'une manière nouvelle, suggérée par la théorie des représentations des groupes. Ce mémoire a fait l'objet d'un travail (non publié) de J.M.G. FELL et de moi-même, qui contenait certains des résultats présentés ci-dessous. FELL y montrait, par exemple, que la relation $\lambda \ll \mu$ entre deux mesures (la relation d'ordre forte de Loomis) était équivalente dans le cas métrisable à l'existence d'une dilatation T telle que $T\lambda = \mu$. En revanche, nous avons vainement cherché à prouver que les ordres $\prec$ et $\ll$ étaient identiques ; ce point fondamental a été établi par CARTIER, grâce à une adaptation de la méthode qui nous conduisait au théorème de Fell cité plus haut. Nous avons appris par la suite que le théorème de Cartier avait déjà été démontré pour les espaces vectoriels de dimension finie, et qu'il était bien connu des statisticiens (dans ce cas particulier) sous le nom de théorème de Blackwell-Stein-Sherman.

Je commencerai ici par les résultats qui peuvent s'énoncer sans utiliser les définitions de Loomis ; je donnerai ensuite ces définitions, et la forme complète du théorème de Cartier ; j'en déduirai enfin les théorèmes relatifs aux mesures maximales.

Les résultats de cet exposé feront plus tard l'objet d'une publication en commun par les trois auteurs.

1. Notations.

E est un espace vectoriel topologique localement convexe, K une partie convexe compacte de E, contenue dans un hyperplan affine fermé qui ne passe pas par l'origine ; K est la base d'un cône convexe fermé C.

Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonction réelles continues définies sur K ; toute fonction $f \in \mathcal{C}$ se prolonge de manière unique en une fonction positivement homogène définie sur C, que nous désignerons encore par f. Nous désignons respectivement par $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^+$, $\mathfrak{M}_1^+$ l'espace des mesures de Radon sur K (muni de la topologie vague), l'ensemble des mesures positives sur K, l'ensemble des mesures de probabilité sur K.

Etant donné un point $x \in C$, nous notons ε_x la forme linéaire $f \rightsquigarrow f(x)$ sur $\mathcal{C}$.

Soit μ un élément de $\mathfrak{M}^+$; la <u>résultante</u> $r(\mu)$ de μ est le seul point $x \in C$ tel que l'on ait $f(x) = \langle \mu , f \rangle$ pour toute fonction linéaire continue f.

Nous désignons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions qui appartiennent à $\mathcal{C}$ et sont <u>concaves</u>. L'ordre de Choquet (noté $\prec$) est défini sur $\mathfrak{M}^+$ par la relation :

$$\lambda \prec \mu \iff \langle \lambda , f \rangle \geq \langle \mu , f \rangle \quad \forall \; f \in \mathcal{S} \qquad .$$

Deux mesures qui vérifient cette relation ont la même masse et la même résultante.

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}$; la fonction $\hat{f}$ est définie par

$$\hat{f}(x) = \inf_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ s \geq f}} s(x) \qquad (x \in C) \qquad .$$

Cette fonction est concave semi-continue supérieurement ; l'ensemble des $s \in \mathcal{S}$ qui majorent f étant filtrant décroissant, la relation $\lambda \prec \mu$ entraîne $\lambda(\hat{f}) \geq \mu(\hat{f})$. On a évidemment $f \leq \hat{f}$.

Le théorème suivant est bien connu (voir [2]).

THÉORÈME 1. - <u>On a pour tout</u> $x \in C$ <u>et toute fonction</u> $f \in \mathcal{C}$

$$\hat{f}(x) = \sup_{\substack{\eta \in \mathfrak{M}^+ \\ r(\eta) = x}} \langle \eta , f \rangle \qquad .$$

<u>Démonstration</u>. - La relation $r(\eta) = x$ équivaut à $\varepsilon_x \prec \eta$, et donc entraîne $f(x) \geq \langle \eta , f \rangle$. Pour établir l'inégalité inverse, remarquons que l'application $f \rightsquigarrow \hat{f}(x)$ de $\mathcal{C}$ dans $\underline{\mathbb{R}}$ est sous-linéaire ; elle est donc égale à l'enveloppe supérieure des formes linéaires sur $\mathcal{C}$ qui la minorent (théorème de Hahn-Banach). Soit η une telle forme linéaire ; la relation $f \leq 0$ entraîne $\hat{f} \leq 0$, et donc $\langle \eta , f \rangle \leq 0$; η est donc positive. Supposons que f soit affine ; on a alors $\hat{f} = f$, et $\widehat{(-f)} = -f$; cela entraîne les relations :

$$\langle \eta , f \rangle \leq f(x) , \qquad \langle \eta , -f \rangle \leq -f(x) \qquad .$$

On a par conséquent $\langle \eta , f \rangle = f(x)$; la résultante $r(\eta)$ est donc égale à x et on a :

$$f(x) \leqslant \sup_{\substack{\eta \in \mathcal{M}^+ \\ r(\eta)=x}} \langle \eta , f \rangle \quad .$$

Le théorème est établi.

2. Le théorème principal.

Considérons l'espace vectoriel topologique produit $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ étant muni de la topologie vague), et l'ensemble compact suivant, contenu dans $\mathcal{M}_1^+ \times \mathcal{M}_1^+$:

$$U = \{(\varepsilon_x , \eta) : x \in K , \eta \in \mathcal{M}_1^+ , r(\eta) = x\} \quad ;$$

U est évidemment contenu dans le cône convexe fermé :

$$V = \{(\lambda , \mu) : \lambda \in \mathcal{M}^+ , \mu \in \mathcal{M}^+ , \lambda \prec \mu\} \quad .$$

Le lemme suivant est alors la clef de la démonstration de Cartier :

LEMME. - V <u>est le cône convexe fermé engendré par</u> U .

<u>Démonstration</u>. - Il nous suffit, en vertu du théorème de Hahn-Banach, d'établir l'assertion suivante :

Soit (λ , μ) un élément de V , et soit h une forme linéaire continue sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, telle que le demi-espace $\{h \geq 0\}$ contienne U ; on a alors $h(\lambda , \mu) \geqslant 0$.

Toute forme linéaire continue sur $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ étant de la forme

$$(\alpha , \beta) \rightsquigarrow \langle \alpha , u \rangle - \langle \beta , v \rangle \qquad (u \in \mathcal{C} , \quad v \in \mathcal{C})$$

nous sommes ramenés à montrer que la relation :

$$u(x) - \langle \eta , v \rangle \geqslant 0 \qquad \forall \quad (\varepsilon_x , \eta) \in U$$

entraîne

$$\langle \lambda , u \rangle - \langle \mu , v \rangle \geqslant 0 \quad .$$

Or la première relation est équivalente, d'après le théorème 1, à la suivante :

$$u(x) \geqslant \sup_{\substack{\eta \in \mathcal{M}^+ \\ r(\eta)=x}} \langle \eta , v \rangle = \hat{v}(x) \qquad \forall \quad x \subset K$$

Nous avons alors :

$$\langle \lambda , u \rangle \geqslant \langle \lambda , \hat{v} \rangle \geqslant \langle \mu , \hat{v} \rangle \geqslant \langle \mu , v \rangle$$

d'après les relations $u \geqslant \hat{v}$, $\lambda \prec \mu$, $\hat{v} \geqslant v$. Le lemme est établi.

Voici maintenant la forme du théorème de Cartier qui est vraie sans aucune hypothèse de métrisabilité :

THÉORÈME 2. - Soient λ et μ deux éléments de $\mathfrak{M}$ tels que $\lambda \prec \mu$; il existe une mesure positive θ sur U dont la résultante (dans $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$) est égale à (λ , μ) .

Démonstration. - Soit U_c l'enveloppe convexe fermée de U ; U étant contenu dans l'ensemble convexe compact $\mathfrak{M}_1^+ \times \mathfrak{M}_1^+$, qui ne contient pas l'origine, U_c est un ensemble convexe compact qui ne contient pas 0 . Le cône convexe fermé V engendré par U est donc égal à $\bigcup_{t \in \mathbf{R}_+} t . U_c$. Il suffit alors de remarquer que U_c est égal à l'ensemble des barycentres des mesures positives de masse 1 sur U .

3. Le cas métrisable.

Supposons maintenant que K soit métrisable ; il en est alors de même de l'ensemble convexe compact $\mathfrak{M}_1^+$. Appelons dilatation sur K toute application borélienne $T : x \rightsquigarrow T_x$ de K dans $\mathfrak{M}_1^+$ telle que l'on ait $r(T_x) = x$ pour tout $x \in K$. Pour toute mesure $\lambda \in \mathfrak{M}$, nous désignerons par $T\lambda$ la mesure définie par :

$$\langle T\lambda , f \rangle = \int_K \langle T_x , f \rangle \, d\lambda(x) \qquad (f \in \mathcal{C}) \quad .$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (cas métrisable). - Soient λ et μ deux éléments de $\mathfrak{M}^+$; la relation $\lambda \prec \mu$ est équivalente à l'existence d'une dilatation T sur K telle que $T\lambda = \mu$.

Démonstration. - Soient T une dilatation, μ une mesure positive, f une fonction concave continue ; la relation $r(T_x) = x$ entraîne $\langle T_x , f \rangle \leq f(x)$; nous avons donc :

$$\langle T\lambda , f \rangle = \int_K \langle T_x , f \rangle \, d\lambda(x) \leq \int_K f(x) \, d\lambda(x)$$

ou encore $\lambda \prec T\lambda$. Réciproquement, soient λ et μ deux mesures ≥ 0 telles que $\lambda \prec \mu$; nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que la masse totale de λ et de μ est égale à 1 . Il existe alors une mesure de probabilité θ sur l'ensemble compact U dont la résultante (dans $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$) est égale à (λ , μ) . Considérons le sous-ensemble suivant de $K \times \mathfrak{M}_1^+$:

$$U' = \{(x , \eta) : r(\eta) = x\} \qquad ;$$

transportons la mesure θ en une mesure θ' sur U', au moyen de l'application $(\varepsilon_x, \eta) \rightsquigarrow (x, \eta)$; θ' est une mesure de probabilité sur U', qui possède les deux propriétés suivantes :

(1) l'image de θ' par la projection de $K \times \mathfrak{M}$ sur K est égale à λ ;

(2) la résultante (dans $\mathfrak{M}$) de l'image de θ' par la projection de $K \times \mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$ est égale à μ.

Utilisons alors le théorème de désintégration des mesures sur un compact métrisable : il existe une application borélienne $x \rightsquigarrow \theta'_x$ de K dans l'ensemble des mesures de probabilité sur U', telle que l'on ait $\theta' = \int_K \theta'_x \, d\lambda(x)$, et que θ'_x soit portée par l'ensemble des $(x, \eta) \in U'$. Soit T_x la résultante (dans $\mathfrak{M}$) de l'image de θ'_x par la projection de $K \times \mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$; T_x est une mesure de probabilité sur K de résultante x, l'application $x \rightsquigarrow T_x$ est borélienne, et l'on a d'après la propriété (2) ci-dessus :

$$\mu = \int_K T_x \, d\lambda(x) \quad .$$

L'application $x \rightsquigarrow T_x$ est la dilatation cherchée.

Cet énoncé donne la solution d'un problème posé par CHOQUET ([1], p. 339).

4. Définitions de l'article de Loomis.

a. Soit x un élément de C ; nous appellerons subdivision de x toute famille finie $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de C, telle que l'on ait $\sum_{i \in I} x_i = x$. Une subdivision $(x_i)_{i \in I}$ est dite plus fine qu'une subdivision $(y_j)_{j \in J}$ s'il existe une partition de I en des ensembles I_j $(j \in J)$ tels que l'on ait :

$$y_j = \sum_{i \in I_j} x_i \qquad \text{pour tout } j \in J \quad .$$

Nous écrirons alors $(y_j)_{j \in J} \vdash (x_i)_{i \in I}$; le relation $\vdash$ est un préordre sur l'ensemble des subdivisions de x.

Soit S un ensemble de subdivisions de x, filtrant à droite pour la relation $\vdash$; nous dirons alors simplement que S est un ensemble filtrant. (Dans la terminologie de LOOMIS : S is a s-boolean set over x.)

b. Soit $s = (x_i)_{i \in I}$ une subdivision de $x \in C$; la forme linéaire positive sur C :

$$f \rightsquigarrow \sum_{i \in I} f(x_i)$$

est déterminée par une mesure positive sur K, que nous désignerons par la notation ε_s (et qu'il est facile d'expliciter!). On a évidemment $r(\varepsilon_s) = x$.

c. On définit, comme (a), les subdivisions d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}$; soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une telle subdivision de μ : la famille $(r(\mu_i))_{i\in I}$ est alors évidemment une subdivision de $r(\mu)$. Nous désignerons par $S(\mu)$ l'ensemble des subdivisions de $r(\mu)$ qui proviennent ainsi de subdivisions de μ ; cet ensemble est évidemment filtrant, car l'ensemble de toutes les subdivisions de μ est filtrant.

Soit S un ensemble de subdivisions de $x \in C$; la mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+$ est dite <u>compatible</u> avec S si l'on a $S \subset S(\mu)$; on a nécessairement alors $r(\mu) = x$.

d. On définit une relation $\ll$ sur $\mathfrak{M}^+$ par l'équivalence :

$$\lambda \ll \mu \iff S(\lambda) \subset S(\mu) \qquad \text{(relation d'ordre forte de Loomis)} \quad .$$

Cette définition mérite d'être énoncée de manière plus explicite : on a $\lambda \ll \mu$ si et seulement si, pour toute subdivision $(\lambda_i)_{i\in I}$ de λ, il existe une subdivision $(\mu_i)_{i\in I}$ de μ telle que l'on ait $r(\mu_i) = r(\lambda_i)$ pour tout $i \in I$.

e. Soient s et s' deux subdivisions de x ; les relations $s \vdash s'$ et $\varepsilon_s \ll \varepsilon_{s'}$ sont équivalentes.

5. <u>Equivalence des deux relations</u> $\prec$ <u>et</u> $\ll$.

Voici maintenant la forme complète du théorème de Cartier. Les implications (c) $\Longrightarrow$ (a), (b) $\iff$ (c) étaient établies dans le travail FELL-MEYER.

THÉORÈME 4. - <u>Soient</u> λ <u>et</u> μ <u>deux mesures positives sur</u> K. <u>Les propriétés suivantes sont alors équivalentes</u> :

a. $\lambda \prec \mu$.

b. <u>Il existe une mesure</u> θ <u>sur</u> U <u>dont la résultante est le couple</u> (λ, μ) (voir le théorème 2).

c. $\lambda \ll \mu$.

<u>Démonstration</u>. - Nous avons déjà vu que (a) entraîne (b). Supposons que (b) soit vérifiée, et soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une subdivision de λ ; il existe (théorème de Radon-Nikodym) des fonctions boréliennes positives f_i $(i \in I)$ telles que l'on ait

$$\sum_{i\in I} f_i = 1 \ , \qquad \lambda_i = f_i \cdot \lambda \quad .$$

Définissons des fonctions boréliennes g_i sur U en posant :

$$g_i(\varepsilon_x , \eta) = f_i(x)$$

et posons :

$$\theta_i = g_i.\theta$$

$$r(\theta_i) = (\lambda_i , \mu_i) \qquad \text{(résultante dans } \mathcal{M} \times \mathcal{M}) \quad .$$

Les mesures θ_i sont portées par U ; on a donc $r(\theta_i) \in V$, donc $r(\lambda_i) = r(\mu_i)$ pour tout i (et même $\lambda_i \prec \mu_i$ pour tout i). La relation $\theta = \sum_{i\in I} \theta_i$ montre que les μ_i constituent une subdivision de μ ; l'assertion (c) est donc établie.

Montrons enfin que (c) entraîne (a). Soient λ et μ deux mesures telles que $\lambda \ll \mu$. f une fonction qui appartient à $\mathcal{S}$, ε un nombre > 0 . Recouvrons K au moyen d'un nombre fini d'ensembles convexes compacts $A_1 , A_2 , \dots , A_n$, tels que l'oscillation de f sur chaque ensemble A_i soit inférieure à ε . Posons ensuite :

$$B_i = A_i \setminus (\bigcup_{j<i} A_j) \qquad (i = 1 \dots n)$$

et désignons par λ_i la mesure $\lambda.\chi_{B_i}$; nous avons $\lambda = \sum_{i\in I} \lambda_i$. Choisissons des mesures μ_i telles que l'on ait

$$r(\mu_i) = r(\lambda_i) \ , \qquad \sum_{i\in I} \mu_i = \mu \quad .$$

La fonction f étant concave et positivement homogène, nous avons :

$$\langle \mu , f \rangle = \sum_{i\in I} \langle \mu_i , f \rangle \leqslant \sum_{i\in I} f(r(\mu_i)) = \sum_{i\in I} f(r(\lambda_i)) \quad .$$

La mesure λ_i étant portée par A_i , cette quantité est majorée par

$$\sum_{i\in I} [\langle \lambda_i , f \rangle + \varepsilon.\|\lambda_i\|] = \langle \lambda , f \rangle + \varepsilon.\|\lambda\| \quad .$$

Le nombre ε étant arbitraire, on a $\langle \mu , f \rangle \leq \langle \lambda , f \rangle$, et la propriété (a) est établie.

On sait que la relation $\prec$ est une véritable relation d'ordre sur $\mathcal{M}^+$ (voir l'article [2]), compatible avec la topologie vague sur $\mathcal{M}^+$. Etant donné l'intérêt de l'ordre $\ll$ dans la théorie des représentations des groupes (théorie dans laquelle l'ordre $\prec$, au contraire, n'intervient pas de manière naturelle), nous expliciterons le résultat suivant :

COROLLAIRE. - <u>La relation</u> $\ll$ <u>est une véritable relation d'ordre sur</u> $\mathfrak{M}^+$, <u>compatible avec la topologie vague</u>.

Ce résultat était établi par une méthode différente dans le travail FELL-MEYER, de même que le théorème suivant (dont la démonstration a été améliorée par CARTIER).

THÉORÈME 5.

a. <u>Soit</u> S <u>un ensemble filtrant de subdivisions de</u> x , <u>et soit</u> $\mathfrak{F}$ <u>le filtre des sections de l'ensemble préordonné filtrant</u> S . <u>L'application</u> $s \rightsquigarrow \varepsilon_s$ <u>de</u> S <u>dans</u> $\mathfrak{M}^+$ <u>admet une limite vague suivant</u> $\mathfrak{F}$, <u>que nous noterons</u> ε_S . <u>Cette mesure est compatible avec</u> S , <u>et l'on a</u> $\varepsilon_S \ll \mu$ <u>pour toute mesure</u> μ <u>compatible avec</u> S .

b. <u>On a</u> $\varepsilon_{S(\mu)} = \mu$ <u>pour toute mesure</u> $\mu \in \mathfrak{M}^+$.

<u>Démonstration</u>. - Toutes les mesures ε_s ayant la même masse, l'application $s \rightsquigarrow \varepsilon_s$ prend ses valeurs dans une partie compacte de $\mathfrak{M}^+$; il nous suffit donc de montrer que cette fonction admet <u>au plus une</u> valeur d'adhérence suivant $\mathfrak{F}$. Soit λ une telle valeur ; l'ordre $\ll$ étant compatible avec la topologie vague, on a $\varepsilon_s \ll \lambda$ pour tout $s \in S$, de sorte que λ est compatible avec S . Soit μ une seconde mesure compatible avec S ; la relation $\varepsilon_s \ll \mu$ passe à la limite, et entraîne la relation $\lambda \ll \mu$. Autrement dit, λ est la borne supérieure de S pour l'ordre $\ll$, et à ce titre est unique.

Supposons ensuite que l'on ait $S = S(\mu)$ pour une mesure μ , et montrons que l'on a alors $\varepsilon_S = \mu$. La mesure μ étant compatible avec S , on a $\varepsilon_S \ll \mu$. Soit f une fonction qui appartient à $\mathfrak{S}$; utilisons à nouveau les ensembles B_i qui nous ont servi à établir le théorème 4, posons $\mu_i = \mu . \chi_{B_i}$; comme alors, nous avons, en désignant par s la subdivision $(r(\mu_i))_{i=1\ldots n}$, qui appartient à $S(\mu)$:

$$\langle \varepsilon_s , f \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(r(\mu_i)) \leq \langle \mu , f \rangle + \varepsilon$$

et à plus forte raison, d'après la relation $\varepsilon_s \ll \varepsilon_S$:

$$\langle \varepsilon_S , f \rangle \leq \langle \mu , f \rangle + \varepsilon$$

ε étant arbitraire, nous avons $\langle \varepsilon_S , f \rangle \leq \langle \mu , f \rangle$, donc $\mu \ll \varepsilon_S$, et le théorème est établi.

6. Mesures maximales.

On appelle <u>mesure maximale</u> toute mesure $\mu \in \mathfrak{M}^+$ qui est maximale pour l'ordre $\prec$. Ces mesures sont étudiées dans l'article [2], où l'on examine dans quelle mesure elles sont portées par l'ensemble des points extrémaux de K, et où l'on montre que les mesures maximales sont caractérisées par la propriété :

$$\langle \mu , \hat{f} - f \rangle = 0 \quad \text{pour toute fonction } f \in \mathfrak{C} \quad .$$

L'un des objets principaux de l'article de LOOMIS était l'étude des mesures maximales pour l'ordre $\ll$. Le travail FELL-MEYER ramenait cette étude à l'article [2], en montrant que les mesures maximales étaient les mêmes pour les ordres $\prec$ et $\ll$. Ce résultat est maintenant évident, puisque l'on sait que les deux ordres eux-mêmes sont identiques.

LOOMIS a établi le théorème suivant, qui entraîne le théorème d'unicité de Choquet - on remarquera en effet que, lorsque le cône C est réticulé, l'ensemble de <u>toutes</u> les subdivisions de x est filtrant, d'après le "lemme de décomposition". Il existe donc un ensemble filtrant <u>maximum</u>, et le théorème 6 entraîne l'unicité de la mesure maximale μ dont la résultante est x.

THÉORÈME 6.

a. <u>Tout ensemble filtrant de subdivisions de</u> x <u>est contenu dans un ensemble filtrant maximal (pour l'inclusion)</u>.

b. <u>Pour qu'un ensemble filtrant</u> S <u>soit maximal, il faut et il suffit qu'il existe une mesure maximale</u> μ <u>telle que</u> $S = S(\mu)$; <u>cette mesure est alors unique</u>.

<u>Démonstration</u>. - L'ensemble des ensembles filtrants de subdivisions de x, ordonné par inclusion, est évidemment inductif ; (a) est donc une conséquence immédiate du théorème de Zorn. Soit S un ensemble filtrant maximal, et soit μ une mesure compatible avec S (il en existe, d'après le théorème 5 (a)) ; on a $S \subset S(\mu)$, donc $S = S(\mu)$, et enfin $\mu = \varepsilon_S$ (théorème 5 (b)). La mesure ε_S est donc <u>maximale</u>, et la seule mesure compatible avec S.

Réciproquement, soit μ une mesure maximale ; si $S(\mu)$ n'était pas maximal, $S(\mu)$ serait strictement contenu dans un ensemble filtrant maximal, qui serait de la forme $S(\lambda)$ d'après ce qui précède. Les relations $S(\mu) \subset S(\lambda)$, $S(\mu) \neq S(\lambda)$ entraîneraient les relations $\mu \ll \lambda$, $\mu \neq \lambda$, ce qui contredirait le caractère maximal de μ. L'ensemble $S(\mu)$ est donc maximal, et le théorème est établi.

Voici enfin un complément utile au théorème 3 :

THÉORÈME 7. - Supposons que K soit métrisable. Soient λ une mesure positive, μ une mesure positive maximale telle que $\lambda \ll \mu$, T une dilatation sur K telle que l'on ait $T\lambda = \mu$. L'ensemble des $x \in K$ tels que la mesure T_x ne soit pas maximale est alors λ-négligeable.

Démonstration. - Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans $\mathcal{C}$; on a pour tout n :

$$\langle \mu , \hat{f}_n - f_n \rangle = \int_K \langle T_x , \hat{f}_n - f_n \rangle \, d\lambda(x) = 0 \quad .$$

Les fonctions $\hat{f}_n - f_n$ étant positives, on a λ-presque partout

$$\langle T_x , \hat{f}_n - f_n \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } n \quad .$$

L'application $f \rightsquigarrow \hat{f}$ étant continue pour la convergence uniforme sur K, (voir [2]), cette relation entraîne $\langle T_x , \hat{f} - f \rangle = 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$; la mesure T_x est donc maximale pour λ-presque tout x.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 10, 1960, p. 333-344.

[2] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). - Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 13, 1962, p. 139-154.

[3] LOOMIS (L. H.). - Unique direct integral decompositions on convex sets, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 509-526.