Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel

ANTOINE DELZANT

Fonctions harmoniques sur un groupe semi-simple I. frontières des espaces homogènes

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 10, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A8_0>

FONCTIONS HARMONIQUES SUR UN GROUPE SEMI-SIMPLE
I. FRONTIÈRES DES ESPACES HOMOGÈNES

par Antoine DELZANT

1. Introduction.

Soit G le groupe des automorphismes du disque unité $D \subset R^2$ ($|z| < 1$) ; il est formé des matrices

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} ; \qquad a\overline{a} - b\overline{b} = 1 ; \qquad |b/a| < 1 ; \qquad (a , b \in \underset{\sim}{C})$$

et opère transitivement sur D par $g.z = \dfrac{az - b}{\overline{a} - \overline{b}z}$. Si on appelle D^0 la frontière de D, le groupe G opère aussi transitivement sur D^0. Le groupe G possède deux sous-groupes remarquables :

$$K : \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} ; \qquad S : \begin{pmatrix} ch\varphi + iy & sh\varphi - iy \\ sh\varphi + iy & ch\varphi - iy \end{pmatrix} .$$

Le sous-groupe K est un sous-groupe compact maximal stabilisateur de l'origine, le sous-groupe S est un sous-groupe connexe maximal qui stabilise le point $z = +1$. De plus G est le produit semi-direct de ces deux sous-groupes, et on a :

$$G/K \approx D ; \qquad G/S \approx D^0 .$$

Soit f une fonction harmonique bornée sur D. On sait qu'elle vérifie une formule de Poisson :

$$f(re^{i\theta}) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \hat{f}(e^{i\varphi}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} d\varphi \tag{I.1.1}$$

pour une certaine fonction $\hat{f}$ unique définie sur D^0. Le but de ces exposés est d'interpréter la formule (I.1.1) en termes du groupe G et de généraliser à tous les groupes semi-simples connexes.

Soit $\hat{f}$ une fonction (bornée ou continue) définie sur K ; on la prolonge à G tout entier en posant

$$\hat{f}(ks) = \hat{f}(k) \qquad (k \in K ; \quad s \in S) .$$

Alors la fonction

$$f(g) = \int_K \hat{f}(gk)\, dk \tag{I.1.2}$$

vérifie la condition $f(gk) = f(g)$; c'est donc une fonction définie sur $D = G/K$. En posant $g(0) = re^{i\theta}$, la formule (I.1.2) redonne la formule (I.1.1). Donc f est une fonction harmonique bornée sur D. De plus f vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$(I.1.3) \qquad f(g) = \int_K f(gkg')\, dk \qquad (g , g' \in G ; \quad k \in K) \quad .$$

Le but de ces exposés est de généraliser cette situation : Soit G un groupe semi-simple connexe, soient μ une mesure non négative absolument continue par rapport à la mesure de Haar de G et de masse totale 1, et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions bornées sur G satisfaisant l'équation

$$(I.1.4) \qquad f(g) = \int_G f(gg')\, d\mu(g') \qquad (g , g' \in G)$$

(ces fonctions vérifient une certaine équation de convolution). On montrera qu'il existe un espace compact M où G opère, une mesure ν sur M telle que, pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe une fonction $\hat{f}$ et une seule sur M telle que

$$f(g) = \int_M \hat{f}(p)\, dg\nu(p) = \int_M \hat{f}(gp)\, d\nu(p) \qquad ,$$

et de plus que l'application $f \to \hat{f}$ est bijective. (Dans le cas particulier traité plus haut, on a pris $\mu = m_K\, \varepsilon_{g'}$ (m_K mesure de Haar sur K, $\varepsilon_{g'}$ masse ponctuelle au point g') alors $M = D^0$, et ν est la mesure euclidienne du cercle.)

Dans ce premier exposé on construit des espaces homogènes compacts de G qui permettent de construire les espaces M. Dans le deuxième exposé on étudiera les équations (I.1.3) et (I.1.4).

2. Rappels sur les groupes de Lie.

On effectue dans ce paragraphe quelques rappels nécessaires, pour comprendre la suite. On ne propose aucune démonstration, et on se borne à renvoyer à des ouvrages spécialisés.

Soit G un groupe de Lie connexe [2]. Il admet un et un seul sous-groupe résoluble connexe invariant maximal R, appelé son radical, et le groupe G/R est semi-simple ([4], exposé 7). Si un groupe de Lie G est semi-simple alors toute représentation de G est complètement réductible ([4], exposé 7). De plus le centre d'un groupe semi-simple est toujours discret. Sauf précision du contraire nous ne considérerons que des groupes semi-simples connexes dont le centre sera fini.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Tout homomorphisme de G induit une représentation de $\mathfrak{g}$, en particulier l'automorphisme intérieur $g \to g' g g'^{-1}$ induit un automorphisme de $\mathfrak{g}$ noté Ad_g, de G. L'ensemble $Ad(G)$, est lui-même un groupe de Lie, et l'application $g \to Adg$ est appelée la représentation adjointe. On en déduit une représentation de $\mathfrak{g}$ par $adX(Y) = [X , Y]$. Si G n'a pas de centre, alors G est isomorphe au groupe de ces automorphismes intérieurs, donc $G = Ad(G)$, et la représentation adjointe est fidèle ([4], exposé 6).

Soient G un groupe de Lie semi-simple, admettant un centre fini et K un sous-groupe compact maximal, alors il existe un sous-groupe résoluble connexe S tel que G soit le produit semi-direct de K et de S ([4], exposé 11) de telle sorte que tout $g \in G$ se mette, de façon unique, sous la forme $g = ks$ $(k \in K ; \quad s \in S)$. C'est la décomposition d'Iwasawa. L'algèbre de Lie de G se décompose en somme directe de deux sous-espaces orthogonaux pour la forme de Killing : Si $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{s}$) est l'algèbre de Lie de K (resp. S), on a : $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ ([4], exposé 11).

Si K est un compact maximal d'un groupe de Lie semi-simple avec un centre fini, l'espace G/K se trouve muni d'une structure d'espace riemannien symétrique. Réciproquement tout espace riemannien symétrique est de la forme G/K.

<u>Espaces homogènes</u>. - Soient M un espace topologique, et G un groupe topologique. On dit que le groupe G opère à gauche sur M s'il existe une application continue de $G \times M$ dans M notée $(g , x) \to gx$ telle que

$$g_1(g_2 x) = (g_1 g_2) x \qquad (g , g_1 , g_2 \in G ; \quad x \in M) \quad .$$

On dit que G opère transitivement si, pour tout x et $y \in M$, il existe $g \in G$ tel que $gx = y$. Soient $x \in M$ et $H_x = \{g \in G ; \quad gx = x\}$. C'est un sous-groupe de G appelé le stabilisateur de x. Considérons l'espace quotient G/H_x : on a une application de G/H_x dans M par $gH_x \to gx$. Si G opère transitivement sur M, cette application est un homéomorphisme. Réciproquement tout sous-groupe fermé de G définit un espace homogène de G où G opère transitivement.

Soient M' et M'' deux espaces homogènes de G et φ une application de M' dans M''. On dit que φ est une application d'espace homogène si

$$\varphi(gx) = g\varphi(x) \qquad (g \in G ; \quad x \in M') \quad .$$

Si L' et L'' sont deux sous-groupes fermés de G, et si $L' \subset L''$, il y a une application naturelle d'espace homogène de G/L' sur G/L'' ; réciproquement toute application surjective d'espace homogène est de ce type.

Si G opère sur un espace M, il opère sur les fonctions (resp. sur les mesures) définies sur M :

$$f^g(x) = f(gx) \ ; \qquad g\mu(f) = \int f(gx)\, d\mu(x) \quad .$$

Si G est un groupe de Lie semi-simple (resp. compact), il est muni d'une mesure bi-invariante m_G : la mesure de Haar ([5]), et on note $L^p(G)$ les classes de fonctions de puissance p-ième intégrable pour la mesure de Haar.

Si M est un espace topologique on notera $\mathfrak{M}(M)$ (resp. $\mathfrak{M}_1(M)$, resp. $\mathcal{P}(M)$) l'ensemble des mesures sur M (resp. des mesures positives ; resp. des mesures positives de masses $+1$). En particulier si K est un groupe compact on supposera que $m_K \in \mathcal{P}(K)$.

Soit M un espace localement compact où G opère, et soient $\mu \in \mathcal{P}(G)$ et $\pi \in \mathcal{P}(M)$; on définit un nouvel élément $\mu \star \pi$ de $\mathcal{P}(M)$ par

$$\mu \star \pi(f) = \int f(gx)\, d\mu(g)\, d\pi(x) \quad .$$

Si $\mu_1 , \mu_2 \in \mathcal{P}(G)$ et $\pi(M)$, on a

$$\mu_1 \star (\mu_2 \star \pi) = (\mu_1 \star \mu_2) \star \pi \quad .$$

Enfin on a une injection de M dans $\mathcal{P}(M)$ en identifiant chaque point x de M à la masse ponctuelle ε_x située en ce point. Si μ (resp. π) est une mesure sur G (resp. M) et $g \in G$ (resp. $x \in M$) on note $\mu.x$ au lieu de $\mu \star \varepsilon_x$ (resp. $g.\pi$ au lieu de $\varepsilon_g \star \pi$). La convergence des mesures, à laquelle on se réferrera, est la convergence faible.

3. Frontières sur un groupe de Lie.

On dira qu'une mesure π est "bien foutue" sur une variété M si, pour toute carte locale suffisamment petite appliquée par les fonctions coordonnées $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ dans le cube $I^n = (|x_i| \leq 1 \ ; \ i = 1 \dots n)$, il existe une fonction φ , intégrable au sens de Lebesgue, positive sur I^n telle que, pour toute fonction f sur M , dont le support est contenu dans la carte locale considérée on a :

$$\pi(f) = \int f(x_1 , \dots , x_n)\, \varphi(x_1 , \dots , x_n)\, dx_1 \dots dx_n \quad .$$

Si M est un groupe de Lie, une mesure "bien foutue" est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Haar. Si M est un espace homogène de groupe de Lie, et μ une mesure "bien foutue" sur M , alors pour toute mesure $\pi \in \mathcal{P}(G)$, la mesure $\pi \star \mu$ est "bien foutue" sur M (il existe une section borélienne). Enfin deux mesures "bien foutues" sont absolument continues l'une par rapport à l'autre.

THÉORÈME 3.1. - Soient G un groupe de Lie et M un espace homogène compact de G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. Pour toute mesure $\pi \in \mathcal{P}(M)$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G tels que la suite $g_n \pi$ converge vers une mesure ponctuelle sur M.

ii. Pour toute mesure $\pi \in \mathcal{P}(M)$, il existe une suite de mesures $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur G $(\mu_n \in \mathcal{P}(G))$ telle que la suite $\mu_n \star \pi$ converge vers une mesure ponctuelle.

iii. Il existe une mesure π_0, "bien foutue" sur M $(\pi_0 \in \mathcal{P}(M))$ et une suite μ_n $(\mu_n \in \mathcal{P}(G))$ telle que $\mu_n \star \pi_0$ converge vers une mesure ponctuelle.

Démonstration. - (i) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement. (ii) $\Longrightarrow$ (i) est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 3.2. - Soient π une mesure sur M $(\pi \in \mathcal{P}(M))$, et μ_n une suite de mesures sur G $(\mu_n \in \mathcal{P}(G))$ telle que $\mu_n \star \pi$ converge vers une mesure ponctuelle. Alors il existe une suite g_n d'éléments de G telle que $g_n \pi$ converge vers une mesure ponctuelle.

Démonstration. - Supposons que $\mu_n \star \pi \to p \in M$, et soit $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une base de voisinages de p. Pour n assez grand, on a :

$$\mu_n \star \pi(V_m) = \int_G g\pi(V_m)\, d\mu_n(g) > 1 - 1/m \quad .$$

Il en résulte qu'il existe g_m tel que $g_m \pi(V_m) > 1 - 1/m$, et que $g_m \pi \to p$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) trivialement.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $\pi \in \mathcal{P}(M)$. D'après les remarques qui précèdent, si μ est une mesure "bien foutue" sur G, la mesure $\mu \star \pi$ est une mesure "bien foutue" sur M, donc absolument continue par rapport à π_0. Comme $\mu_n \star \pi_0 \to p$, on a $\mu_n \star \mu \star \pi \to p$.

DÉFINITION 3.3. - Soient G un groupe de Lie et M un espace homogène compact de G vérifiant les conditions équivalentes du théorème précédent. L'espace M est appelé une frontière de G. On dit qu'un sous-groupe fermé H de G est un sous-groupe frontière de G si l'espace G/H est une frontière de G.

Un groupe de Lie G est sans frontière si le seul sous-groupe frontière est G lui-même.

Exemples. - G est un groupe abélien. Tout sous-groupe étant invariant, G/H est un groupe muni d'une mesure de Haar $m_{G/H}$. Si $g \in G$, on a $gm_{G/H} = m_{G/H}$; donc H ne peut être un sous-groupe frontière que si $G = H$.

G compact. Si $g_n \pi \to p$ alors on peut supposer qu'il existe une sous-suite de la suite g_n qui converge vers g. Donc $g\pi = p$; seules les mesures ponctuelles peuvent être envoyées sur les mesures ponctuelles.

DÉFINITION 3.4. - On dit qu'un groupe topologique G a une propriété de point fixe, si, dès que G opère sur un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe par des transformations affines, il existe un point fixe.

Exemples:

- G abélien ([1] Appendice)
- G résoluble
- G compact.

THÉORÈME 3.5. - Si G a une propriété de point fixe il est sans frontière.

Démonstration. - En effet soient $M = G/H$ un espace homogène compact de G, et $Q = \mathcal{P}(M)$.

C'est un convexe compact pour la topologie faible. Donc il existe $m \in Q$ tel que $gm = m$ $(g \in G)$. Comme G opère transitivement sur M, la mesure m ne peut être une mesure ponctuelle à moins que M ne soit un point.

On a donc défini une large classe de groupe de Lie sans frontière ; on va donner un résultat permettant de construire des groupes ayant une propriété de point fixe.

PROPOSITION 3.6. - Soient G un groupe et G_1 un sous-groupe fermé ayant la propriété de point fixe. Si G laisse invariante une mesure sur G/G_1 alors g a la propriété de point fixe.

Démonstration. - Soit Q un convexe compact où G opère. Il existe $x \in Q$ tel que $gx = x$ pour tout g dans G_1. Le point x définit une application f de G/G_1 dans Q par $f(gG_1) = gx$. Soit π une mesure sur G/G_1 invariante par G. Comme Q est compact, on peut définir l'intégrale :

$$y = \int f(gG_1)\, d\pi(gG_1)$$

(on définit cette intégrale comme limite d'intégrales pour des mesures ponctuelles). L'élément y est évidemment stable par G.

COROLLAIRE. - Si G est un groupe de Lie admettant un sous-groupe invariant fermé résoluble S, le quotient étant compact, il a la propriété de point fixe et est donc sans frontière.

C'est évident avec la proposition précédente ; on peut le voir aussi en remarquant que si Q est un compact convexe sur lequel G opère ; l'ensemble Q' des mesures stables par S est un compact convexe non vide stable par G/S qui est compact et y admet donc un point fixe.

On verra plus loin la réciproque de ce corollaire (I.5.3).

4. Frontières des groupes semi-simples.

Toutes les frontières seront déterminées à partir de l'une d'entre elles appelée frontière maximale. C'est celle-ci qu'on va déterminer dans ce paragraphe. Soit G un groupe semi-simple connexe admettant un centre fini. Soient K un compact maximal de G, $G = K.S$ la décomposition d'Iwasawa de G. On pose $M = G/S$. Soit σ l'application canonique de G sur M, et soit m une mesure "bien foutue" sur M (par exemple $m = m_K\, p$; $p \in M$). On note Q l'ensemble convexe compact des mesures sur M limites de mesures de la forme $\mu \star m$ $(\mu \in \mathcal{P}(G))$.

THÉORÈME 4.1. - Il existe un sous-groupe fermé K_0 de K et un point p_0 de M tels que la mesure $\pi_0 = m_{K_0}.p_0$ soit un élément de Q stable par S.

Pour démontrer ce théorème on a besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 4.2. - Soient K un groupe compact et μ une mesure $(\mu \in \mathcal{P}(K))$ dont le support n'est pas contenu dans un sous-groupe fermé de K différent de K. Si $\mu' \in \mathcal{P}(K)$ vérifie l'équation $\mu \star \mu' = \mu'$, alors $\mu' = m_K$.

LEMME 4.3. - Avec les notations de 4.1, soient π une mesure sur G/S invariante par S, et μ_1 et μ_2 des mesures sur G. Si $\sigma\mu_1 = \sigma\mu_2$, alors $\mu_1 \star \pi = \mu_2 \star \pi$.

Démonstration de 4.2. - Supposons d'abord que μ' soit absolument continue par rapport à m_K et que sa densité soit une fonction continue f : alors f vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\int_K f(k'^{-1} k)\, d\mu(k') = f(k) \quad .$$

Soient A le sous-ensemble de K sur lequel f atteint son maximum, et B le semi-groupe des éléments qui stabilisent A. B est fermé, donc est un sous-groupe. On déduit de l'équation fonctionnelle de f que $\mu(B) = 1$. Donc $B = K$, donc $A = K$: la fonction f est constante et $\mu' = m_K$.

Soit μ'' une mesure absolument continue par rapport à m_K, et admettant une densité continue, alors $\mu' \star \mu''$ a la même propriété, et on a

$$\mu \star \mu' \star \mu'' = \mu' \star \mu'' \quad .$$

D'après ce qui précède $\mu' \star \mu'' = m_K$. Ceci étant vrai pour toutes les mesures μ'', et comme il existe une suite de mesures μ'' qui converge vers la mesure ponctuelle à l'origine, on a $\mu' = m_K$.

Démonstration de 4.3. - Soit $\mu \in \mathfrak{M}_1(G)$. Par définition :

$$\mu \star \pi(f) = \iint f(gx)\ d\mu(g)\ d\pi(x) = \int F(g)\ d\mu(g)$$

(on a posé : $F(g) = \int f(gx)\ d\pi(x) = g\pi(f)$).

La fonction F vérifie $F(gs) = F(g)$ $(s \in S\ ;\ g \in G)$, elle définit donc une fonction sur G/S : soit $\widetilde{F} = F \circ \sigma$; et on a :

$$\mu \star \pi(f) = \mu(F) = \sigma(\mu)(\widetilde{F}) \quad .$$

Ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème. - Le groupe G opère sur l'ensemble Q par $g(\mu \star m) = g\mu \star m$. Comme S est résoluble, il existe une mesure π dans Q stable par S. D'autre part l'application :

$$\sigma :\ K \to G/S \quad ,$$

est un homéomorphisme. Donc il existe une seule mesure $\widetilde{\pi}$ sur K telle que $\sigma(\widetilde{\pi}) = \pi$. On regarde $\widetilde{\pi}$ comme une mesure sur G. Soit $s \in S$; alors on a $\sigma(s\widetilde{\pi}) = s\sigma(\widetilde{\pi}) = s.\pi = \sigma(\widetilde{\pi})$. D'après le lemme 4.3, on a $s\widetilde{\pi} \star \pi = \widetilde{\pi} \star \pi$. Donc $\pi_1 = \widetilde{\pi} \star \pi$ est invariante par S. Posons $\pi_n = \widetilde{\pi} \star \pi_{n-1}$. On obtient ainsi une suite de mesures invariantes par S. Posons $\widetilde{\pi}_n = (\widetilde{\pi})^n$ (produit de convolution n fois par elle-même) ; on a $\sigma(\widetilde{\pi}_n) = \pi_n$.

Soit K_0 le plus petit sous-groupe fermé contenant le support de $\widetilde{\pi}$. Les mesures

$$v_n = 1/n \sum_{k=1}^{k=n} \widetilde{\pi}^k$$

ont leur support dans K_0, et il existe une sous-suite qui converge vers une mesure v satisfaisant à l'équation $\widetilde{\pi} \star v = v$. Donc $v = m_{K_0}$ (lemme 4.2). En sorte que $v_n \to m_{K_0}$. De tout cela on déduit que la mesure $\pi_0 = \sigma(m_{K_0})$ est invariante par S. Enfin on remarque que $\pi_0 = \sigma(m_{K_0}) = m_{K_0} . \sigma(e)$, où e est l'élément neutre de G. Comme de plus les mesures π_n sont des éléments de Q, la mesure $\sigma(v_n) \in Q$, donc π_0 appartient à Q. Ce qui achève la démonstration.

On va utiliser cette situation pour construire une frontière de G .

THÉORÈME 4.5. - Soit G un groupe de Lie semi-simple admettant un centre fini ; soit $H(G)$ le sous-groupe de G laissant fixe la mesure π_0 du théorème précédent. Alors :

1° $H(G) = K_0 . S$

2° $H(G)$ a la propriété de point fixe et est un groupe sans frontières.

3° $H(G)$ est un sous-groupe frontière de G .

4° Tout compact maximal est transitif sur $B(G) = G/H(G)$.

5° Il existe une et une seule mesure de probabilité sur $B(G)$ invariante par K .

Démonstration. - On a évidemment $K_0 . S \subset H(G)$. Réciproquement, on a $H(G) = H(G) \cap K.S$. Si $k \in H(G) \cap K$, alors $k\pi_0 = \pi_0$, donc $km_{K_0} . p_0 = m_{K_0} . p_0$, ou encore $k\sigma(m_{K_0}) = \sigma(m_{K_0})$. Comme l'application σ est bijective, on a $km_{K_0} = m_{K_0}$. En comparant les supports de ces deux mesures, on en déduit que $k \in K_0$.

D'autre part on peut identifier l'espace homogène $H(G)/S$ au sous-espace $K_0 . p_0$ de G/S . La mesure π_0 a son support dans K_0 et est invariante par $H(G)$, donc $H(G)$ a la propriété de point fixe (proposition 3.6), donc n'admet pas de frontière (théorème 3.5). On a une application naturelle :

$$\tau : \quad G/S \to B(G)$$

qui commute aux opérations de G . La mesure π_0 est un élément de Q , donc il existe une suite de mesures μ_n sur G telles que $\mu_n \star m \to \pi_0$. Ceci entraîne :

$$\mu_n * \tau(m) = \tau(\mu_n \star m) \to \tau(\pi_0) \quad .$$

D'autre part l'image de $K_0 \, p_0$ par τ est réduite à un point q . Donc $\tau(\pi_0) = q$, masse ponctuelle au point q . Comme $\tau(m)$ est une mesure "bien foutue" sur $B(G)$, il s'ensuit que $B(G)$ est une frontière.

En dernier lieu, observons que K opère transitivement sur G/S , donc sur $B(G)$; par ailleurs tous les sous-groupes compacts maximaux sont conjugués. Le dernier point est alors trivial. Ceci achève la démonstration.

Après avoir démontré l'existence d'une telle frontière, on va étudier l'unicité. Mais auparavant on va démontrer un lemme.

LEMME 4.6. - Soit $A \subset G$ un sous-groupe fermé ayant la propriété de point fixe et contenant S, et soit $B = G/H$ une frontière de G. Alors il existe une application continue surjective $\tau : G/A \to B$ qui commute aux opérations de G.

Démonstration. - Soit $\pi \in \mathcal{P}(B)$ une mesure sur B fixe par A. Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G telle que la suite $g_n \pi$ converge vers une mesure ponctuelle p sur B. D'autre part $G.\pi = K.\pi$, donc est un ensemble compact, et on a $\lim g_n \pi = k\pi$ $(k \in K)$, donc $\pi = kp$ $(k \in K)$, et π est une mesure ponctuelle x_0, donc $A \subset H_{x_0}$ le stabilisateur de x_0.

THÉORÈME 4.7. - Soit B un espace homogène de G. Alors B est une frontière de G si et seulement s'il existe une application d'espace homogène de $B(G)$ sur B.

Démonstration. - On a vu que $H(G) = K_0.S$ a la propriété de point fixe, donc le lemme 4.6 permet de conclure dans un sens, et la réciproque est triviale.

On dira qu'une frontière $\overline{B}$ est maximale, si pour toute frontière B il existe une application d'espace homogène de $\overline{B}$ sur B. Si $\overline{B} = G/H$, le sous-groupe H est appelé sous-groupe frontière minimal.

COROLLAIRE 1. - Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, dont le centre est fini. Les frontières maximales sont isomorphes.

COROLLAIRE 2. - Sous les mêmes hypothèses, les sous-groupes frontières minimaux sont conjugués.

COROLLAIRE 3. - Soit G un groupe de Lie connexe, alors les sous-groupes frontières minimaux sont conjugués.

Démonstration. - Soit $\overline{B}$ une frontière maximale ; $\overline{B} = G/H$. Alors il existe g (resp. g') tel que $H(G) \subset gHg^{-1}$ (resp. $H \subset g' H(G)\, g'^{-1}$). On en déduit que $g^{-1} H(G)\, g \subset H \subset g' H(G)\, g'^{-1}$. Donc gg' est dans le normalisateur de $H(G)$ qui est un sous-groupe fermé. Donc $H = g' H(G)\, g'^{-1}$.

Soient G un groupe de Lie et R son radical. G/R est semi-simple et son centre Z est discret. Soit R' l'image réciproque de Z dans G. C'est un groupe résoluble, peut-être non connexe, et invariant dans G. Alors tout sous-groupe frontière de G contient R'. En effet soit H un sous-groupe frontière. G/H est une frontière. Comme R' est résoluble, il stabilise une mesure π sur G/H $(\pi \in \mathcal{P}(G/H))$, et on a pour tout g dans G : $R' g\pi = g\pi$. Donc R'

stabilise $g\pi$. Mais il existe une suite de mesures $g_n \pi$ qui convergent vers une mesure ponctuelle : Donc R' admet un point fixe dans G/H. Il existe donc $g \in G$ tel que $R' \subset gHg^{-1}$; comme R' est invariant on voit que $R' \subset H$. Donc on peut supposer G semi-simple, et la démonstration a déjà été faite.

5. Caractérisation des groupes de Lie sans frontière.

Considérons le groupe $G = GL(n, \mathbb{R})$. Il opère sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{P}^{n-1}$ l'espace projectif associé. Si $g \in M(n, \mathbb{R})$ algèbre des matrices $(n \times n)$ et $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, et $\overline{x}$ l'image de x dans $\mathbb{P}^{n-1}$, on pose $g(\overline{x}) = \overline{gx}$, si gx est différent de 0. Donc si g est non nul, g opère sur les points de $\mathbb{P}^{n-1}$ qui n'appartiennent pas à une sous-variété de $\mathbb{P}^{n-1}$. Soit g_n une suite de matrices inversibles qui convergent dans $M(n, \mathbb{R})$ vers une matrice g. Pour tout $x \in R^n$, $g_n x \to gx$; dans $\mathbb{P}^{n-1}$ si $\overline{gx}$ est défini, alors $g_n \overline{x} \to \overline{gx}$.

LEMME 5.1. - Soient G un groupe de Lie connexe ayant la propriété de point fixe, et ρ une représentation linéaire irréductible de dimension finie de G, par des matrices de déterminant $+1$. Alors $\rho(G)$ est un groupe de matrices compact.

Démonstration. - On peut toujours supposer que ρ est fidèle donc que G est un sous-groupe de $SL(n, R)$ qui a la propriété de point fixe. Supposons que G ne soit pas compact. Il existe une suite g_n d'éléments de G telle que $\lim\|g_n\| = +\infty$ $(\|g\| = \sup g_{ij})$. Les matrices $g_n/\|g_n\|$ sont bornées en norme. Donc il existe une sous-suite telle que $\lim g_n/\|g_n\| \to h$. Comme $\text{dét}(g_n) = +1$ et que $\|g_n\| \to \infty$, on a $\text{dét}\, h = 0$, d'autre part $h \neq 0$, car $\|h\| = 1$.

En outre G opère sur $\mathbb{P}^{n-1}$, et comme G a la propriété de point fixe, il existe une mesure ν, sur $\mathbb{P}^{n-1}$ stable par G. Montrons que ν est concentrée sur la réunion de deux sous-variétés. Soit V_1 la sous-variété de P^{n-1} où h n'opère pas, et ν_1 la restriction de ν à V_1. Posons $\nu = \nu_1 + \nu_2$. En se restreignant à une sous-suite, on peut supposer que $g_n \nu_1$ et $g_n \nu_2$ convergent. La limite de $g_n \nu_1$ est concentrée sur une sous-variété V_3, et $\lim g_n \nu_2 = h\nu_2$. Comme h envoie l'espace $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace linéaire, h envoie $\mathbb{P}^{n-1} - V_1$ sur une sous-variété V_2 ; donc $\lim g_n \nu$ a son support contenu dans $V_3 \cup V_2$; mais $g_n \nu = \nu$, donc ν a la même propriété. Considérons les réunions de sous-variétés linéaires propres dont la mesure pour ν est $+1$. De tels sous-ensembles sont ordonnés par inclusion : soit $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_\ell$ un élément minimal. Alors $gW_1 \cup gW_2 \cup \dots \cup gW_\ell$ $(g \in G)$ est également minimal. L'intersection

$\bigcup_{i,j} W_i \cap gW_j$ contient également le support de ν ; donc on peut extraire une réunion de sous-variétés plus petite et de mesure $+1$, à moins que g ne réalise une permutation des sous-variétés W_i. Comme G est connexe, il laisse fixe chaque W_i. Mais ρ est irréductible : on a une contradiction.

THÉORÈME 5.2. - Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe dont la frontière $B(G)$ est triviale : alors G est compact.

Démonstration. - On sait qu'un groupe semi-simple est compact si sa représentation adjointe est compacte, et que, d'autre part, toute représentation d'un groupe semi-simple est complètement réductible. Il suffit de montrer que si $B(G)$ est triviale, alors toute représentation irréductible est compacte. Comme on regarde la représentation adjointe, on peut supposer que G n'a pas de centre. Alors $G = H(G)$ a la propriété de point fixe. Toute représentation d'un groupe semi-simple connexe est unimodulaire, car $\rho(G)$ est nécessairement semi-simple, et les déterminants sont égaux à $+1$. Le lemme 5.1 s'applique à toutes les représentations irréductibles de dimension finie, ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME 5.3. - Soit G un groupe de Lie connexe. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

i. G n'admet pas de frontière.

ii. G admet un sous-groupe invariant résoluble connexe, le quotient étant compact.

iii. G a la propriété de point fixe.

Démonstration. - (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit R le radical de G ; G/R est semi-simple sans frontière donc compact.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) (corollaire de la proposition 3.6).

(iii) $\Longrightarrow$ (i) (théorème 3.5).

COROLLAIRE. - Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie connexe G, qui vérifie les propriétés du théorème précédent, alors H admet la propriété de point fixe.

Démonstration. - En effet soit $H \subset G$. G est l'extension d'un groupe compact K par un groupe résoluble, donc H aussi. Le corollaire du théorème 3.6 permet de conclure.

6. Les sous-groupes frontières minimaux. -

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, on se propose d'étudier plus à fond les sous-groupes frontières minimaux de G.

THÉORÈME 6.1. - Les sous-groupes frontières minimaux de G sont des groupes admettant un sous-groupe invariant résoluble connexe tel que le quotient soit compact. Ils sont maximaux pour cette propriété parmi ceux qui contiennent un sous-groupe d'Iwasawa.

Démonstration. - Soit $G = K.S$ une décomposition d'Iwasawa de G ; alors $H(G) = K_0.S$ avec les mêmes notations que dans le paragraphe 4. Soit K'_0 la composante connexe de K_0. Soit $\pi'_0 = \sigma(m_{K'_0})$. Cette mesure est proportionnelle à π_0 sur $\sigma(K'_0)$. Comme S est connexe et stabilise π_0, le groupe $K'_0.S$ stabilise une mesure sur $K'_0\, S/S$. Donc d'après la proposition 3.6, $K'_0.S$ admet la propriété de point fixe, et on peut appliquer le théorème 5.3. Mais $[K_0\, S : K'_0\, S] < +\infty$. Donc $K_0\, S$ est également l'extension d'un compact par un résoluble. La dernière assertion est une conséquence du lemme 4.6.

THÉORÈME 6.2. - Soit $G = K.S$ la décomposition d'Iwasawa d'un groupe semi-simple admettant un centre fini. Soit $N(S)$ le normalisateur de S. Alors $N(S) = H(G)$.

Démonstration (1). - Le groupe $H(G)$ admet un sous-groupe invariant résoluble connexe T le quotient K' étant compact. Soit $\varpi : H(G) \to K'$. Alors $\varpi(S)$ est un groupe connexe résoluble et compact, donc abélien ; or tout caractère de $\varpi(S)$ (au sens de PONTRJAGIN) se prolonge à S tout entier. Mais S n'a aucun caractère : donc $\varpi(S) = e$, et $S \subset T$. Dans ces conditions $T = K_T.S$ (produit semi-direct). Soit ρ une représentation irréductible de dimension finie et fidèle de G dans un espace vectoriel complexe V. Alors il existe une base de V telle que les matrices de $\rho(S)$ soient triangulaires et celles de $\rho(K_T)$ soient diagonales :

$$\rho(k)=\begin{pmatrix} \omega_1 & & & & 0 \\ & \omega_2 & & & \\ & & \omega_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \omega_n \end{pmatrix} ; \qquad \rho(s) = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & & & \\ & t_2 & \cdots & & \\ & & t_3 & \cdots & \\ 0 & & & & \cdots \\ & & & & t_n \end{pmatrix} .$$

(1) Démonstration due à R. GODEMENT.

De cette forme particulière des matrices on déduit que, si $t = ks = s'k'$ ($t \in T$; $s, s' \in S$; $k, k' \in K$) alors $k = k'$ et S est un sous-groupe invariant de T. Soit K_S le groupe T/S. C'est un groupe abélien compact. Tout caractère de T est un caractère de K_S et réciproquement, donc S est l'intersection des noyaux des caractères de T. Soit S' un sous-groupe résoluble fermé de T n'admettant pas de caractère ; il est nécessairement contenu dans S. En particulier si $h \in H(G)$, hSh^{-1} est un tel groupe, $hSh^{-1} \subset S$ qui est donc invariant dans $H(G)$.

Remarque. - Il serait plus agréable de pouvoir démontrer ce résultat a priori, ce qui simplifierait l'exposé.

THÉORÈME 6.3. - Soit G un groupe de Lie connexe, alors les sous-groupes frontières minimaux sont maximaux pour la propriété de point fixe.

Démonstration. - Les sous-groupes frontières minimaux ont la propriété de point fixe. En effet, si G est semi-simple, c'est le théorème 4.5. Sinon, divisant par le radical R de G, on applique le théorème 6.1 à G/R. Les sous-groupes frontières de G correspondent à ceux de G/R (corollaire 2 du théorème 4.7). Il s'ensuit que si G est connexe ses sous-groupes frontières minimaux ont un sous-groupe invariant résoluble, le quotient étant compact. Soit $L \supset H(G)$ possédant la propriété de point fixe. Il existe une mesure $\pi \in \mathcal{P}(G/H(G))$ invariante par L. L'ensemble $G\pi$ est compact. Comme $G/H(G)$ est une frontière, il existe une mesure ponctuelle dans $G\pi$, donc π est une mesure ponctuelle, et L est contenu dans le stabilisateur d'un point :

$$g^{-1} Lg \subset H(G) \subset L , \quad \text{donc} \quad H(G) = L \qquad .$$

7. Exemples.

On va regarder ce que donne cet ensemble de résultats pour certains groupes classiques ([2], chapitre 1).

1° $G = SL(n, \mathbb{R})$. Soit T le sous-groupe des matrices triangulaires (supérieures) de G. Alors G/T s'identifie à la variété des drapeaux $D(n)$ de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire à l'ensemble des suites de sous-espaces vectoriels emboités $d = (V_1, V_2, \dots, V_{n-1})$ tels que $\dim(V_j) = j$. Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, V_i^0 le sous-espace engendré par $e_1, e_2, \dots, e_i$, et d_0 le drapeau ainsi constitué. Il est clair que G opère sur l'ensemble des drapeaux et que T est le stabilisateur de d_0. $D(n)$ est donc une variété compacte. D'autre part si on note T^+ l'ensemble des matrices diagonales à coefficients diagonaux tous positifs, alors on a :

$$G = SO(n) \circ T^+ \; ; \qquad N(T^+) = T \; ; \qquad B(G) = D(n) \qquad .$$

Soit $G_{j, n-j}$ la variété grassmanienne des sous-espaces de dimension j de $\underset{\sim}{R}^n$. C'est un quotient de G par un sous-groupe contenant T ; c'est donc une frontière de G. En particulier $\underset{\sim}{P}^{n-1}$ l'espace projectif, qui est isomorphe à $G_{1, n-1}$ est une frontière de G.

2° $G = SL(n, \underset{\sim}{C})$. On a le même résultat. En particulier $D(2) = G_{1,1} = P^1$ est la frontière maximale de $SL(2, \underset{\sim}{C})$ qui s'identifie au groupe de Lorentz.

3° Le groupe des automorphismes d'un domaine de Cartan.

Soit $\Omega \subset M(n, \underset{\sim}{C})$ tel que

$$\Omega = \{z \in M(n, \underset{\sim}{C}) \; ; \; 1/2i(z - z^*) > 0\}$$

($z^* = {}^t\bar{z}$, positif veut dire hermitien positif).

Soit G le sous-groupe de $SL(2n, \underset{\sim}{C})$ tel que si

$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \quad (a, b, c, d, \in M(n, \underset{\sim}{C})) \qquad gz = (az + b)(cz + d)^{-1} \quad (z \in \Omega)$

(Séminaire Cartan, t. 10, 1957/58, exposé 3). Si J est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ où 1_n est la matrice unité de rang n on a :

$$G = \{g \in SL(2n, C) \; , \; g^* Jg = J\}$$

autrement dit on a :

$$a^* c = c^* a \; ; \quad d^* b = b^* d \; ; \quad a^* d - c^* b = 1_n \qquad .$$

Soit K le stabilisateur de 1_n. On a :

$$K = \begin{pmatrix} 1/2(u + v) & 1/2i(u - v) \\ & \\ 1/2i(v - u) & 1/2(u + v) \end{pmatrix} \qquad u, v \in U(n) \qquad .$$

Le sous-groupe résoluble complémentaire est donné par :

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ & \\ 0 & a^{*-1} \end{pmatrix} \qquad ab^* = ba^*$$

et a est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous positifs. Soit H le normalisateur de S dans G (H a la même forme que S sans restrictions sur les coefficients diagonaux) alors $B(G) = G/H$ et $\dim B(G) = 2n^2 - n$.

La frontière maximale qu'on vient de définir ne coïncide pas avec la frontière de Bergmann-Silov. En effet si on identifie $\mathcal{D}$ à l'ensemble des matrices z telles que $z^* z < 1_n$ (par la transformation de Cayley $(z - 1_n)(z + 1_n)^{-1}$) la frontière de Bergmann-Silov correspond à $z^* z = 1_n$, c'est-à-dire à $U(n)$, qui est un espace de dimension n^2 . On verra cependant que la frontière de Bergmann-Silov est une frontière mais qui n'est pas maximale.

8. Quelques résultats préliminaires à la compactification.

On veut maintenant montrer qu'on peut trouver une application injective de G/K dans $\mathcal{P}(B)$ en sorte que l'adhérence de G/K dans $\mathcal{P}(B)$ soit une compactification de G/K . Pour ceci on va montrer que le seul sous-groupe de G qui stabilise l'unique mesure sur $B(G)$ stable par K est K lui-même.

LEMME 8.1. - Soit L un sous-groupe fermé de G qui stabilise la mesure m sur $B(G)$. Si $K \subset L$, alors L a la propriété de point fixe.

Démonstration. - On a $B(G) = G/H(G)$. Le groupe L opère sur $L/L \cap H(G)$, qu'on peut considérer comme un sous-ensemble de $B(G)$. Comme K opère transitivement sur $B(G)$ et que $K \subset L$, on a $L/L \cap H(G) = B(G)$. Comme $H(G)$ est l'extension d'un groupe compact par un groupe résoluble, le groupe $L \cap H(G)$ a la même propriété. La proposition 3.6 permet de conclure.

COROLLAIRE. - Sous les mêmes hypothèses, et si L est connexe, alors L est l'extension d'un groupe compact par un groupe résoluble.

On dira qu'un sous-ensemble de matrices de $M(n , \mathbb{C})$ est self-adjoint, si pour tout x dans A , la matrice ${}^t\bar{x}$ est dans A . On note g l'algèbre de Lie $M(n , \mathbb{C})$.

LEMME 8.2. - Soit A une sous-algèbre de Lie résoluble de g , qui soit self-adjointe. Alors A est abélienne.

Démonstration. - Faisant opérer A dans C^n , il existe un sous-espace vectoriel V_1 de dimension + 1 stable par A . Soit $V_1^\perp$ l'orthogonal de V_1 pour la forme hermitienne standard ; il est fixe par A . Procédant alors par récurrence on trouve une suite de sous-espaces de dimension 1 : $V_1 , V_2 , \ldots , V_n$ deux à deux orthogonaux, stables par A ce qui démontre le lemme.

LEMME 8.3. - Soit A une sous-algèbre abélienne de g et soit $x \in g$ tel que

$$[x , A] \subset A . \text{ Alors } [x , A] = 0 .$$

Démonstration. - Il existe une base de $\underset{\sim}{C}^n$ tel que les éléments de A soient tous des matrices diagonales ($\alpha e_i = \lambda_i(\alpha)\, e_i$ pour $\alpha \in A$). Posons

$$xe_i = \sum a_{ij}\, e_j \quad .$$

Il vient $\lambda_i([x , \alpha]) = 0$ pour tout i, donc $[x , \alpha] = 0$.

LEMME 8.4. - Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre compacte maximale. Si $x \in \mathfrak{g}$ et si x commute à $\mathfrak{k}$ alors $x \in \mathfrak{k}$ ($[x , \mathfrak{k}] = 0$).

Démonstration. - Considérons la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ ([4], exposé 11). Il existe un automorphisme θ de $\mathfrak{g}$ tel que $\theta(k) = k$ ($k \in \mathfrak{k}$) et $\theta(p) = -p$ ($p \in \mathfrak{p}$). Donc $[\mathfrak{p} , \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ et $[\mathfrak{p} , \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$. Posons $x = k + p$ ($k \in \mathfrak{k}$; $p \in \mathfrak{p}$) ; alors $p = 1/2(x - \theta(x))$. On a $\theta[x , \mathfrak{k}] = [\theta(x) , \mathfrak{k}] = 0$. Donc $\theta(x)$ commute avec $\mathfrak{k}$. Soit $k' \in \mathfrak{k}$ et $p' \in \mathfrak{p}$; on a :

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}([p , p'])\, \mathrm{ad}k) = - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}p' . \mathrm{ad}[p , k]) = 0 \quad .$$

Donc $[p , p']$ est orthogonal à $\mathfrak{k}$, donc $[p , p'] \in \mathfrak{p}$, donc $[p , p'] = 0$. Donc $[\mathfrak{p} , \mathfrak{p}] = 0$, donc $\mathfrak{p} = 0$ car $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

LEMME 8.5. - Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre compacte maximale et soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre résoluble telle que $[\mathfrak{k} , \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t}$, alors $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$.

Démonstration. - Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, elle est isomorphe à son adjointe. On sait que les matrices de $\mathfrak{k}$ peuvent être choisies anti-symétriques, et celles de $\mathfrak{p}$ symétriques. Soit ${}^t x$ le transposé de x. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et ${}^t\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Si $x \in \mathfrak{k}$ alors $x - {}^t x \in \mathfrak{k}$. L'algèbre $\mathfrak{t}$ étant résoluble, l'algèbre ${}^t\mathfrak{t}$ l'est également. Considérons $[\mathfrak{t} , {}^t\mathfrak{t}]$. Si t_1 et $t_2 \in \mathfrak{t}$, alors $[t_1 - {}^t t_1 , t_2] \in \mathfrak{t}$; comme $[t_1 , t_2] \in \mathfrak{t}$, on a $[{}^t t_1 , t_2] \in \mathfrak{t}$. Donc $[\mathfrak{t} , {}^t\mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t}$. Donc $[\mathfrak{t} , {}^t\mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t} \cap {}^t\mathfrak{t}$. En particulier $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} + {}^t\mathfrak{t}$ est une algèbre ; elle est résoluble. (Pour le voir il suffit de calculer ses algèbres dérivées $D^n \mathfrak{s} = [D^{n-1} \mathfrak{s} , D^{n-1} \mathfrak{s}]$. On a :

$$D^n \mathfrak{s} \subset D^n \mathfrak{t} + D^n\, {}^t\mathfrak{t} + \mathfrak{t} \cap {}^t\mathfrak{t} \quad .$$

Il existe n tel que $D^n \mathfrak{s} \subset \mathfrak{t} + {}^t\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}$.) Puisque $[\mathfrak{k} , \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t}$ on a $[\mathfrak{k} , \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$. Par le lemme 8.2, l'algèbre $\mathfrak{s}$ est commutative, et donc $[\mathfrak{k} , \mathfrak{s}] = 0$. Donc $[\mathfrak{k} , \mathfrak{t}] = 0$. Donc $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$.

LEMME 8.6. - Soient G un groupe semi-simple admettant un centre fini, et K un compact maximal de G. Si N est un sous-groupe de G contenant K, tel que N/K soit discret, alors $N = K$.

Démonstration. - Soit $\psi : G \to G/K$. L'ensemble $\psi(N)$ est discret et stable par K. Supposons que $\psi(N)$ ne soit pas réduit à un seul élément, et soit $p \in \psi(N)$ $(p \neq \psi(e))$. Comme $\psi(N)$ est discret $K \subset nKn^{-1}$. Le groupe K laisse donc fixe la géodésique qui joint p à $p_0 = \psi(e)$, donc stabilise un vecteur tangent à G/K en p_0, donc un vecteur de $\mathfrak{p}$. Donc il existe un vecteur $x \in \mathfrak{p}$ tel que $\mathrm{ad}(\mathfrak{k})\, x = 0$. Par le lemme 8.4, $x \in \mathfrak{k}$, donc $x = 0$, donc $N = K$.

9. Compactification d'un espace homogène.

THÉORÈME 9.1. - Sous les hypothèses générales de cet exposé, si $g \in G$ stabilise la mesure $\mathbf{m}$ sur $B(G)$ alors $g \in K$.

Démonstration. - Soient L le stabilisateur de m et L_0 sa composante connexe. $K \subset L_0$. Donc L_0 est l'extension d'un groupe compact par un groupe résoluble R. Comme R est invariant dans L_0, on a $kRk^{-1} = R$ pour tout k dans K. Soit R_0 la composante connexe de R. C'est un groupe résoluble normalisé par K. Soit $\mathfrak{r}$ l'algèbre de Lie de R_0, on a

$$\mathrm{Ad}(K)\, \mathfrak{r} \subset \mathfrak{r} \,; \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r} \quad .$$

Donc $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{k}$, donc $R_0 \subset K$. Comme RK est un groupe et que $R_0 \subset K$, on voit que RK/K est discret, donc $R \subset K$. Donc L_0 est compact, donc contenu dans K. Mais L/K est discret donc $L = K$.

COROLLAIRE. - L'application $\varphi : G/K \to \bar{\mathcal{P}}(G/H(G))$ définie par $\varphi(gK) = gm$ est continue et injective.

DÉFINITION 9.2. - Soit G un groupe semi-simple connexe, avec un centre fini, soit $D = G/K$, et $B(G)$ sa frontière. Le plongement de D comme sous-ensemble de $\mathcal{P}(B(G))$ s'appelle le <u>plongement canonique</u> de D. La fermeture de D dans $\bar{\mathcal{P}}(B(G))$ est appelée la <u>compactification canonique</u> de D.

Soit $\overline{D}$ la compactification canonique de D. Remarquons que les mesures ponctuelles sur $B(G)$ sont des éléments de $\overline{D}$ (comme limites de mesures $g_n\, m$). On a donc une injection $B(G) \to \overline{D}$ qui commute aux opérations de G. L'image de $B(G)$ dans $\overline{D}$ est appelée la <u>frontière distinguée</u> de D. Remarquons que les groupes de stabilité des points de D opèrent transitivement sur la frontière distinguée de D.

THÉORÈME 9.3. - Un sous-groupe compact maximal de G est maximal relativement à la propriété de point fixe.

Démonstration. - Si $L \supset K$ a la propriété de point fixe, alors L stabilise une mesure sur $B(G)$. Puisque $L \supset K$ cette mesure coïncide avec m, donc $L = K$.

En conclusion, le groupe de stabilité de tout point de G/K est maximal pour la propriété de point fixe, il en va de même pour tout point de la frontière distinguée de D ;

Cette propriété est-elle vérifiée pour tout point de $\overline{D}$?

De plus les deux classes de sous-groupes que nous avons examinées ont une propriété de conjugaison :

Existe-t-il un théorème de conjugaison impliquant les deux résultats précédents ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Elements de Mathématique, 15).

[2] CHEVALLEY (Claude). - Theory of Lie groups. - Princeton, Princeton University Press, 1946.

[3] FÜRSTENBERG (H.). - A Poisson formula for semi-simple Lie groups (à paraître).

[4] Séminaire Sophus Lie, 1954/55 : Théorie des algèbres de Lie, Topologie des groupes de Lie. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

[5] WEIL (André). - L'intégration dans les groupes topologiques. - Paris, Hermann, 1940 (Act. scient. et ind., 869 ; Publ. Inst. math. Univ. Clermont-Ferrand, 4).