Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

PHILIPPE COURREGE

Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 7, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A6_0>

INTÉGRALES STOCHASTIQUES ET MARTINGALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

par Philippe COURRÈGE

On étudie dans le présent exposé, l'extension au cas d'une martingale généralisée de carré intégrable des méthodes de définition et de certaines propriétés des intégrales stochastiques introduites par ITO et DOOB dans le cas du mouvement brownien ou des cas dérivés (cf. [2] pages 426 et 436, et [3] page 175).

Les notations et conventions sont celles du précédent exposé à ce séminaire sur la décomposition des martingales de carré intégrable (cf. [1], § 0).

0. Position du problème.

Soient $X = (X_t)_{t \in R}$ une martingale généralisée de carré intégrable, et $A = (A_t)_{t \in R}$ le processus croissant naturel normalisé en 0 associé à X (cf. [1], 4.3, théorème 3). Supposons d'abord que X soit standard et ait ses trajectoires à variation bornée (le cas discret (cf. [1], n° 1.2) donne un exemple de telle martingale). Si $\Phi = (\Phi_t)_{t \in R}$ est un processus mesurable borné et nul hors de $]a , b] \times \Omega$ (où $-\infty < a < b < +\infty$), on peut définir l'intégrale stochastique $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ comme la variable aléatoire dont la valeur, en $\omega \in \Omega$, est égale à l'intégrale de la trajectoire $t \to \Phi_t(\omega)$ par rapport à la mesure sur R associée, par le procédé de Stieltjes, à la fonction à variation bornée $t \to X_t(\omega)$.

L'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ ainsi définie est linéaire, et, si Φ est un processus bien adapté, à trajectoires en escalier de la forme

$$\text{(E)} \qquad \Phi_t = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{t_k} 1^R_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$$

où $-\infty < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et où, pour tout k, φ_{t_k} est une variable aléatoire F_{t_k}-mesurable et bornée, on a

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{t_k} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$$

$$(2) \qquad E\{ |\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t|^2 \} = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} \quad (^1) .$$

(1) Pour la démonstration de cette relation, voir le n° 1.3.

Supposons maintenant, que X soit une martingale de carré intégrable quelconque ; X n'a pas, en général, ses trajectoires p. s. à variation bornée, par exemple, le mouvement brownien a p. s. ses trajectoires à variation non bornée (cf. [3], p. 174) ; mais on peut alors utiliser la relation (1) pour définir l'intégrale stochastique d'un processus bien adapté, à trajectoires en escalier de la forme (E) ci-dessus, ensuite vérifier que la relation (2) est encore satisfaite (cf. n° 1.3), et enfin utiliser cette relation pour prolonger, par continuité en moyenne quadratique, l'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$. C'est ce que nous allons faire dans la suite (cf. n° 1.3, 1.4). Nous montrerons ainsi que l'on peut, au moins dans le cas où X est quasi continue à gauche, définir l'intégrable stochastique, des processus Φ fortement bien adaptés et mesurables tels que

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < + \infty$$

de telle sorte que (2) soit encore satisfaite (cf. n° 2.4 et 2.5). Nous étudierons ensuite, toujours dans le cas où X est quasi continue à gauche, un procédé de prolongement utilisant la convergence en probabilité (cf. § 3).

Nous étudierons seulement le cas d'une martingale définie sur la droite réelle R ; les autres cas s'y ramènent sans difficultés (cf. appendice).

1. Intégrale stochastique des fonctions étagées stochastiques.

1.1. - Dans ce paragraphe, nous allons définir et étudier l'intégrale stochastique pour certains processus bien adaptés dont les trajectoires sont des fonctions en escalier. Nous prendrons ces trajectoires continues à gauche ; ce choix est motivé, d'abord par l'analogie avec la théorie de l'intégration au sens de Stieltjes par rapport à une fonction α croissante et continue à droite (si $u < v$, $1^R_{]u,v]}$ est continue à gauche et $\int 1^R_{]u,v]} \, d\alpha = \alpha(v) - \alpha(u)$) ; ensuite, comme on le verra ci-dessous (cf. n° 2.6) par le fait que la relation (2) (cf. n° 0.1) n'est pas nécessairement vérifiée si Φ est un processus dont les trajectoires sont des fonctions en escalier non continues à gauche.

1.2. Les fonctions étagées stochastiques.

DÉFINITION 1. - On appelle subdivision stochastique de l'intervalle fermé $[a , b]$ de $\overline{R} = [- \infty , + \infty]$, toute suite finie et croissante $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ de temps d'arrêt sur $[a , b]$ telle que $T_0 = a$ et $T_n = b$.

Toute subdivision ordinaire, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a , b]$ est aussi une subdivision stochastique.

DÉFINITION 2. - On appelle fonction étagée stochastique (sur R) tout processus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in R}$ de la forme :

$$(E.S) \qquad \forall \ t \in R , \qquad \Phi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \, 1^{\Omega}_{\{T_k<t\leq T_{k+1}\}} \quad (^2)$$

où $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est une subdivision stochastique d'un intervalle compact $[a , b]$ de R , et où, pour tout k , φ_k est une variable aléatoire F_{T_k}-mesurable et bornée.

On appelle fonction étagée (sur R), toute fonction étagée stochastique pour laquelle les temps d'arrêt T_k $(0 \leq k \leq n)$ sont constants.

Autrement dit, une fonction étagée est un processus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in R}$ de la forme :

$$(E) \qquad \forall \ t \in R \qquad \Phi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{t_k} \, 1^{R}_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$$

où $-\infty < t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$, et où, pour tout k , φ_{t_k} est F_{t_k}-mesurable et bornée.

PROPOSITION 1. - L'ensemble $\mathcal{E}_s$ (resp. $\mathcal{E}$) des fonctions étagées stochastiques (resp. des fonctions étagées) est un sous-espace vectoriel de l'espace des processus fortement bien adaptés, mesurables et bornés dont les trajectoires sont continues à gauche et pourvues de limite à droite.

Soit $\Phi = (\Phi_t)_{t\in R}$ une fonction étagée stochastique : Φ est fortement bien adapté ; en effet, soit T un temps d'arrêt borné sur R ; on a :

$$\Phi_T = \sum_k \varphi_k \, 1_{\{T_k<T\leq T_{k+1}\}} \qquad ;$$

donc, pour tout t ,

$$\Phi_T \, 1_{\{T\leq t\}} = \sum_k \varphi_k \, 1_{\{T_k<T\leq T_{k+1}\wedge t\}} \qquad .$$

D'où le résultat $(^3)$, puisque :

$$\varphi_k \, 1_{\{T_k<T\leq T_{k+1}\wedge t\}} = \varphi_k \, 1_{\{T_k\leq t\}} \, 1_{\{T_k<T\}} \, 1_{\{T\leq T_{k+1}\wedge t\}}$$

est F_t-mesurable.

Φ est mesurable, car $\{t , \omega \mid T_k(\omega) < t \leq T_{k+1}(\omega)\} \in \mathcal{B}_R \times F$.

$(^2)$ Autrement dit (cf. [1], § 0), $\Phi_t(\omega) = \varphi_K(\omega)$ si $T_k(\omega) < t \leq T_{k+1}(\omega)$; et $\Phi_t(\omega) = 0$ si $t < T_0(\omega)$ ou $T_n(\omega) < t$.

$(^3)$ Le fait que Φ est fortement bien adapté résulte, plus généralement de ce que $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$ (cf. n° 2.3 ci-dessous).

Il reste à montrer que la somme de deux fonctions étagées stochastiques est encore une fonction étagée stochastique, ce qui résulte de l'un ou l'autre des deux lemmes suivants :

LEMME 1. - Pour qu'un processus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in R}$ soit une fonction étagée stochastique, il faut et il suffit que Φ soit bien adapté et borné, et qu'il existe un entier n et un intervalle compact $[a , b]$ de R tels que toutes les trajectoires de Φ sont des fonctions en escalier continues à gauche à support dans $[a , b]$ et ayant au plus n discontinuités.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, considérons la suite croissante $(T_k)_{1\leq k\leq n}$ des discontinuités de Φ. De façon plus précise, cette suite peut être définie par récurrence comme suit :

$$T_0 = a$$

$$T_{k+1}(\omega) = \inf\{t \mid t \geq T_k(\omega) \quad \text{et} \quad |\Phi_t(\omega) - \Phi^+_{T_k}(\omega)| > 0\}$$

si cet ensemble est non vide, et

$$T_{k+1}(\omega) = b$$

s'il est vide.

Les relations :

$$\{T_{k+1} < t\} = \{T_k < t\} \cap \{\bigcup_{\substack{r\in Q\\ r<t}} \{T_k \leq r\} \cap \{\Phi_r \neq \Phi^+_{T_k}\}\} \quad ,$$

et

$$\{\Phi_r \neq \Phi^+_{T_k}\} = \left[\bigcup_{u\in Q} \{\Phi_r < u\} \cap \{\Phi^+_{T_k} > u\}\right] \cup \left[\bigcup_{v\in Q} \{\Phi_r > v\} \cap \{\Phi^+_{T_k} < v\}\right]$$

permettent alors de démontrer par récurrence sur k que $(T_k)_{1\leq k\leq n}$ est une subdivision stochastique de $[a , b]$ (compte tenu du fait que le processus $(\Phi^+_t)_{t\in R}$, standard et bien adapté, est fortement bien adapté, cf. 2.3 ci-dessous).
On peut alors écrire :

$$\forall \ t \quad \Phi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^+_{T_k} \ 1^{\Omega}_{\{T_k<t\leq T_{k+1}\}}$$

ce qui achève la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. - Si Φ et Φ' sont des fonctions étagées stochastiques, il existe une subdivision stochastique $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que $\forall \ t \in R$,

$$\Phi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi^+_{T_k} \ 1^{\Omega}_{\{T_k<t\leq T_{k+1}\}}$$

et

$$\Phi'_t = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi'^{+}_{T_k} \, 1^{\Omega}_{\{T_k<t\leq T_{k+1}\}} \quad .$$

Soit $[a , b]$ un intervalle compact tel que $\Phi_t = 0$ et $\Phi'_t = 0$ pour $t \notin [a , b]$. La suite $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ défini par récurrence en posant :

$$T_0(\omega) = a \quad ,$$

et

$$T_{k+1}(\omega) = \inf\{t \mid t \geq T_k(\omega) \text{ et } " \Phi_t(\omega) \neq \Phi^{+}_{T_k}(\omega) \text{ ou } \Phi'_t(\omega) \neq \Phi'^{+}_{T_k}(\omega) "\}$$

si cet ensemble est non vide,

$$T_{k+1}(\omega) = b \quad \text{s'il est vide} \quad ,$$

répond à la question ; on le montre comme ci-dessus dans la démonstration du lemme 1.

1.3. Intégrale stochastique des fonctions étagées stochastiques.

THÉORÈME 1. - Soient $X = (X_t)_{t\in R}$ une martingale généralisée standard de carré intégrable définie sur R, et $A = (A_t)_{t\in R}$ le processus croissant naturel normalisé en 0 associé (cf. [1], § 4).

Si, pour toute fonction étagée stochastique

$$\Phi = (\Phi_t)_{t\in R} \text{, où , } \forall \; t \in R \text{, } \Phi_t = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k \, 1^{\Omega}_{\{T_k<t\leq T_{k+1}\}} \quad ;$$

on pose :

(IS) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k (X_{T_{k+1}} - X_{T_k}) \quad ,$$

on définit une application linéaire de l'espace $\mathcal{E}_s$ des fonctions étagées stochastiques dans $\mathcal{L}^2(\Omega , F , P)$ ayant les propriétés suivantes :

(IS$_1$) $$E\{ |\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t|^2 \} = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} \quad .$$

(IS$_2$) $$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t\} = 0 \quad .$$

(IS$_3$) si S et T sont des temps d'arrêt bornés sur R, tels que $S \leq T$, et si Z est une variable aléatoire F_S-mesurable et bornée, on a :

$$Z.\int_S^T \Phi_t \, dX_t = \int_S^T Z.\Phi_t \, dX_t \quad \text{p. s.}$$

(où $\int_S^T \Phi_t \, dX_t$ désigne l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} 1^{\Omega}_{\{S<t\leq T\}} \Phi_t \, dX_t$).

La variable aléatoire $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$, ou sa classe dans $L^2(\Omega , F , P)$, est appelée intégrale stochastique du processus Φ ; l'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ est appelée intégrale stochastique (associée à la martingale X).

<u>Démonstration</u>. - D'abord $\sum_k \varphi_k 1^{\Omega}_{\{T_k<t\leq T_{k+1}\}} = 0$ entraîne $\sum_k \varphi_k(X_{T_{k+1}} - X_{T_k}) = 0$; l'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ est donc bien définie par la relation (IS) ; et elle est linéaire d'après le lemme 2 (n° 1.2).

La relation (IS_2) résulte de la propriété forte de la martingale X (cf. [1], appendice). La relation (IS_3) réclame une simple vérification. Il reste à montrer (IS_1). On a :

$$E\{|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t|^2\} = \sum_{k,\ell} E\{\varphi_k \varphi_\ell (X_{T_{k+1}} - X_{T_k})(X_{T_{\ell+1}} - X_{T_\ell})\} \qquad ;$$

mais, si $\ell < k$, $\varphi_k \varphi_\ell (X_{T_{\ell+1}} - X_{T_\ell})$ est F_{T_k}-mesurable et de carré intégrable ; donc, d'après la propriété forte de la martingale X,

$$E\{\varphi_k \varphi_\ell (X_{T_{k+1}} - X_{T_k})(X_{T_{\ell+1}} - X_{T_\ell})\} = 0 \qquad .$$

Ainsi

$$E\{|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t|^2\} = \sum_k E\{\varphi_k^2 (X_{T_{k+1}} - X_{T_k})^2\}$$

$$= \sum_k E\{\varphi_k^2 (A_{T_{k+1}} - A_{T_k})\}$$

d'après la propriété (D_1) forte (cf. [1], proposition 1, n° 1.6). D'où le résultat, puisque :

$$\varphi_k^2 (A_{T_{k+1}} - A_{T_k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t \qquad \text{(cf. [1], n° 0.7)}$$

d'après la propriété de l'intégration au sens de Stieltjes par rapport à la fonction croissante continue à droite $t \to A_t(\omega)$ rappelée au n° 1.1.

1.4. <u>Mesure ν_A sur $(R \times \Omega, \mathcal{B}_R \times F)$, associée au processus croissant intégrable A, et prolongement isométrique de l'intégrale stochastique</u>. - En posant $\int \Phi \, d\nu_A = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dA_t\}$, pour tout processus Φ, mesurable et ≥ 0, on définit une mesure $\nu_A \geq 0$ sur l'espace mesurable $(R \times \Omega, \mathcal{B}_R \times F)$, et, pour tout processus $\Phi \in \mathcal{L}^1(R \times \Omega, \mathcal{B}_R \times F, \nu_A)$,

$$\int \Phi \, d\nu_A = E\{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dA_t\} \qquad .$$

On peut alors exprimer comme suit la relation (IS_2) :

l'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ est une isométrie du sous-espace $\mathcal{E}_S$ de $\mathcal{L}^2(R \times \Omega, \mathcal{B}_R \times F, \nu_A) = \mathcal{L}^2(\nu_A)$ dans $L^2(\Omega, F, P)$. Cette isométrie se prolonge à l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}_S$ de $\mathcal{E}_S$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$; et le prolongement, que nous noterons encore $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$, vérifie encore les relations (IS_1), (IS_2) et (IS_3).

Au paragraphe 2, nous allons étudier, selon les propriétés de régularité de la martingale X, l'étendue de l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}_S$ de $\mathcal{E}_S$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$.

2. Prolongement isométrique de l'intégrale stochastique.

2.1. Tribu $\mathfrak{G}$ sur $R \times \Omega$ engendrée par les processus bien adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche.

PROPOSITION 2. - La tribu $\mathfrak{G}$ sur $R \times \Omega$, engendrée par les processus bien adaptés dont les trajectoires sont continues à gauche, est aussi engendrée par les ensembles de la forme $]u , v] \times B$, où $B \in F_u$.

La proposition résulte de ce que $1^R_{]u,v]}$ est continue à gauche, de ce que toute fonction étagée est $\mathfrak{G}$-mesurable et du lemme 3 ci-dessous :

LEMME 3. - Tout processus bien adapté, dont les trajectoires sont continues à gauche, est limite simple d'une suite de fonctions étagées.

En effet, soit $\Phi = (\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un tel processus que l'on peut aussi supposer borné; et, pour chaque n, soit $-n = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{k_n}^n = n$ une subdivision de $[-n , n]$ de pas $\leq \frac{1}{n}$. Si on pose

$$\Phi_t^n = \sum_{k=0}^{k_n - 1} \Phi_{t_k^n} 1_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}(t) \quad ,$$

la suite (Φ^n) répond à la question.

2.2. Prolongement isométrique de l'intégrale stochastique. Cas d'une martingale quelconque.

THÉORÈME 2. - Soient X une martingale généralisée standard de carré intégrable et A le processus croissant naturel associé à X (cf. [1], § 4).

(1) L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées stochastiques est dense dans l'espace $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{G} , \nu_A)$.

(2) L'intégrale stochastique introduite par le théorème 1 se prolonge (de façon unique) en une application linéaire $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ de $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{G} , \nu_A)$ dans $L^2(\Omega , F , P)$ vérifiant les relations (IS_1), (IS_2) et (IS_3) (cf. n° 1.3).

(2) résulte de (1).

Pour montrer (1), il suffit de montrer que, pour tout $M \in \mathcal{G}$ tel que $M \subset]a , b] \times \Omega$ (où $-\infty < a < b < +\infty$), 1_M est limite, dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ d'une suite de fonction étagées.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des sous-ensembles de $R \times \Omega$ de la forme $\bigcup_{i=0}^{n-1}]t_i , t_{i+1}] \times A_i$, où $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ et où $\forall\ i$, $A_i \in F_{t_i}$; $\mathcal{F}$ est une algèbre sur $]a , b] \times \Omega$ car elle est stable par union finie et aussi par passage complémentaire, puisque :

$$(]a , b] \times \Omega)\setminus(]u , v] \times B) = (]a , u] \times \Omega) \cup (]u , v] \times \complement B) \cup (]u , b] \times \Omega) \quad .$$

Par ailleurs, si $A \in F_u$, et $a < u < v \leq b$, $]u , v] \times A \in \mathcal{F}$; donc la tribu sur $]a , b] \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{F}$ est égale à la trace de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{P}(]a , b] \times \Omega)$. C'est alors un résultat classique qu'il existe une suite (M_n) d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que, $\forall\ n$, $M_n \subset M$ et $P(M\setminus M_n) \leq \frac{1}{n}$, c'est-à-dire

$$\int |1_M^{R\times\Omega} - 1_{M_n}^{R\times\Omega}|^2 \, d\nu_A \leq \frac{1}{n} \quad ;$$

d'où le résultat puisque $1_{M_n}^{R\times\Omega} \in \mathcal{E}$ pour tout n. Le théorème 2 est établi.

COROLLAIRE. - <u>L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées est dense (pour la topologie de $\mathcal{L}^2(\nu_A)$) dans l'espace $\mathcal{E}_S$ des fonctions étagées stochastiques.</u>

<u>Remarque</u>. - On verra ci-dessous (cf. n° 2.6), que, en général (plus précisément, quand la martingale X n'est pas quasi continue à gauche), l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ ne contient pas tous les processus de $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ bien adaptés et standards. On ne peut donc pas espérer améliorer beaucoup, dans le cas général, le résultat du théorème 2. Par contre, si la martingale X est quasi continue à gauche (cf. [1], n° 2.1) l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ contient <u>tous</u> les processus de $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ fortement bien adaptés. Résultat central de cet exposé que nous allons maintenant établir.

2.3. <u>La tribu $\mathfrak{M}$ sur $R \times \Omega$ engendrée par les processus mesurables et fortement bien adaptés</u>. - L'ensemble des $M \in \mathcal{B}_R \times F$, tels que $\{\omega \mid (T(\omega) , \omega) \in M\} \in F_T$ pour tout temps d'arrêt borné T sur R, est une tribu sur $R \times \Omega$ contenue dans $\mathcal{B}_R \times F$.

Pour qu'un processus Φ soit mesurable et fortement bien adapté, il faut et il suffit que Φ soit $\mathfrak{M}$-mesurable.

Il en résulte que $\mathfrak{M}$ est la tribu sur $R \times \Omega$ engendrée par les processus mesurables et fortement bien adaptés.

Tout processus bien adapté dont les trajectoires sont continues à droite est $\mathfrak{M}$-mesurable. En effet un tel processus Φ est fortement bien adapté ; il est aussi mesurable comme limite simple de processus mesurables de la forme

$$\Psi_t = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{t_{k+1}} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(t) \quad \text{où} \quad t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad .$$

Enfin $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{M}$.

2.4. Prolongement isométrique de l'intégrale stochastique. Cas d'une martingale quasi continue à gauche.

THÉORÈME 3. - Soient X une martingale généralisée standard de carré intégrable quasi continue à gauche et A le processus croissant naturel associé à X (cf. [1], § 4). L'intégrale stochastique introduite par le théorème 1 (n° 1.3) peut être prolongée (de façon unique) en une application linéaire $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ de l'espace $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{M} , \nu_A)$ des processus Φ mesurables et fortement bien adaptés tels que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty$ dans l'espace $L^2(\Omega , F , P)$ de telle sorte que les relations (IS_1), (IS_2) et (IS_3) (n° 1.3) soient encore vérifiées.

Cette application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$, qui prolonge celle introduite par le théorème 2 (n° 2.2), sera encore appelée intégrale stochastique.

Compte tenu du théorème 1 (n° 1.3) et du théorème 2 de [1], n° 2.2, le théorème 3 résulte de la propriété de densité suivante :

PROPOSITION 3. - Soit $A = (A_t)_{t \in R}$ un processus croissant intégrable ayant ses trajectoires continues. Pour tout processus fortement bien adapté et mesurable Φ tel que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre positif M et une subdivision stochastique $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que, si $\Psi = (\Psi_t)_{t \in R}$ est la fonction étagée stochastique définie par

$$\Psi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{T_k}^M \, 1^{\Omega}_{\{T_k < t \leq T_{k+1}\}} \qquad \forall \ t \in R \quad ,$$

(où $\Phi^M = \inf(\sup(\Phi , -M) , M)$ est la tronquée de Φ à hauteur M), on ait :

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t - \Psi_t|^2 \, dA_t\} \leq \varepsilon \quad .$$

COROLLAIRE 1. - L'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées est dense dans $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{M} , \nu_A)$.

COROLLAIRE 2. - Soient X une martingale généralisée standard de carré intégrable quasi continue à gauche, A le processus croissant naturel associé à X , et Φ un processus de $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{M} , \nu_A)$.

<u>Si, pour tout</u> $t \in R$, Φ_t <u>s'annule sur le sous-ensemble</u> S <u>de</u> Ω , <u>il en est de même de</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$.

En effet, d'après la proposition 3, $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ est limite p. s. d'une suite de variables aléatoires de la forme $\sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{T_k}^M (X_{T_{k+1}} - X_{T_k})$, qui s'annulent sur l'ensemble S .

2.5. - Pour démontrer la proposition 3, nous allons nous ramener par un "changement de variable stochastique" au cas, déjà connu (cf. [2], page 440), où $A_t(\omega) = t$ pour tout (t , ω) . Ce cas est contenu dans le lemme suivant :

LEMME 4. - Soit $(G_u)_{u\in R}$ une famille croissante (mais ne satisfaisant pas nécessairement aux axiomes T_2 et T_3 (cf. [1], n° 0.1)) de sous-tribus de F , et soit $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_u)_{u\in R}$ un processus borné et bien adapté (à la famille $(G_u)_{u\in R}$ de sous-tribus) tel que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Phi}_u|^2 \, du\} < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $u_0 < u_1 < \dots < u_n$ telle que, si $\xi = (\xi_u)_{u\in R}$ est la fonction étagée définie par

$$\xi_u = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Phi}_{u_k} 1_{]u_k, u_{k+1}]}(u) \quad ,$$

on ait

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Phi}_u - \xi_u|^2 \, du\} \leq \varepsilon \quad .$$

Pour une démonstration de ce lemme, voir [2] page 440, et [3] page 176.

Par ailleurs le changement de variable stochastique utilisera le lemme d'analyse classique suivant :

LEMME 5. - Soient $a , b \in R$, $a < b$, et α une application croissante et continue de $[a , b]$ dans R . Pour tout $u \in R$, posons :

$$\beta(u) = \inf\{t \mid t \in [a , b] \text{ et } \alpha(t) > u\} \text{ si } \alpha(b) > u \quad ,$$

et

$$\beta(u) = b \text{ si } \alpha(b) \leq u \quad .$$

L'application β de R dans $[a , b]$ ainsi définie a les propriétés suivantes [4] :

(i) β est croissante et continue à droite.

---

[4] Si α est biunivoque, β est, sur $[\alpha(a) , \alpha(b)]$ la fonction inverse de α .

(ii) $\alpha(a) \leq u \leq \alpha(b) \implies \alpha(\beta(u)) = u$.

(iii) $a < t \leq b \implies$ " $\beta(u) < t \iff u < \alpha(t)$ ".

(iv) Pour toute application φ de R dans R borélienne et bornée sur $]a, b]$, on a :

$$\int_{]a,b]} \varphi \, d\alpha = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi(\beta(u)) \, du \quad .$$

(i), (ii), (iii) se laissent vérifier par des raisonnements élémentaires (pour (iv), cf. par exemple RIESZ et NAGY : leçons d'analyse fonctionnelle, p. 124).

Nous allons maintenant établir la proposition 3. Soit Φ un processus fortement bien adapté et mesurable tel que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty$. On peut supposer que Φ est borné et nul hors de $]a, b[\times \Omega$ (où $-\infty < a < b < +\infty$).

Pour chaque $\omega \in \Omega$, et $u \in R$, posons :

$$\theta_u(\omega) = \inf\{t \mid t \geq a \text{ et } A_t(\omega) > u\} \text{ si } A_b(\omega) > u$$

$$\theta_u(\omega) = b \text{ si } A_b(\omega) \leq u$$

$u \to \theta_u(\omega)$ est la fonction β du lemme 5 correspondant à la fonction croissante et continue $t \to A_t(\omega)$. Pour chaque $u \in R$, θ_u est un temps d'arrêt sur $[a, b]$; en effet, d'après (iii) on a : $\{\theta_u < t\} = \{u < A_t\}$ pour $a < t \leq b$. Soit $G_u = F_{\theta_u}$; d'après (i), $(G_u)_{u \in R}$ est une famille croissante de sous-tribus de F.

Soit $\hat{\Phi}$ le processus $(\Phi_{\theta_u})_{u \in R}$. Montrons d'abord que $\hat{\Phi}$ satisfait aux hypothèses du lemme 4. D'une part, puisque θ_u est F_{θ_u}-mesurable pour tout u, le processus $(\theta_u)_{u \in R}$, qui a ses trajectoires continues à droite d'après (i), est mesurable (cf. n° 2.3). Il en résulte que le processus $(\Phi_{\theta_u})_{u \in R} = \hat{\Phi}$ est aussi mesurable, puisque l'application $u, \omega \to \Phi_{\theta_u}(\omega)$ est composée des applications mesurables $u, \omega \to \theta_u(\omega)$, ω et $t, \omega \to \Phi_t(\omega)$. D'autre part, puisque Φ est fortement bien adapté, le processus $\hat{\Phi}$ est bien adapté à la famille $(G_u)_{u \in R}$ de sous-tribus. Enfin, d'après la définition de θ_u,

$$u > A_b(\omega) \implies \theta_u(\omega) = b \text{ et } u < A_a(\omega) \implies \theta_u(\omega) = a \quad ;$$

donc, si $M = \sup_{t,\omega} |\Phi_t(\omega)|$, et puisque $\Phi_t(\omega) = 0$ pour $t \notin]a, b[$, on a :

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_{\theta_u}|^2 \, du\} = E\{\int_{A_a}^{A_b} |\Phi_{\theta_u}|^2 \, du\} \leq M^2 \, E\{A_b - A_a\} < +\infty \quad .$$

Il résulte alors du lemme 4 appliqué au processus $\hat{\Phi}$, que, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe une subdivision $u_0 < u_1 < \ldots < u_n$ telle que, si

$$\xi_u = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{\theta_{u_k}} 1_{]u_k, u_{k+1}]}(u) \qquad \forall \ u \in R \quad ,$$

on a

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_{\theta_u} - \xi_u|^2 \, du\} \leq \varepsilon \quad .$$

Soit alors $\Psi = (\Psi_t)_{t\in R}$ le processus défini par :

$$\Psi_t = 1_{]a\,,\,b]}(t) \, \xi_{A_t} , \qquad \forall \ t \in R$$

montrons que Ψ répond à la question :

D'une part, d'après (iii), pour $a < t \leq b$ et $k = 0 , \ldots , n-1$,

$$\{u_k < A_t \leq u_{k+1}\} = \{\theta_{u_k} < t \leq \theta_{u_{k+1}}\}$$

donc, compte tenu de ce que $\theta_{u_k}(\omega) \in [a\,,\,b]$ pour tout k et tout ω,

$$\forall \ t \in R , \qquad \Psi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi_{\theta_{u_k}} 1^{\Omega}_{\{\theta_{u_k} < t \leq \theta_{u_{k+1}}\}} \quad .$$

D'autre part, d'après (ii) :

$$A_a(\omega) < u < A_b(\omega) \implies A_{\theta_u}(\omega) = u \ \text{ et } \ \theta_u(\omega) \in]a\,,\,b] \quad ;$$

donc,

$$A_a(\omega) < u < A_b(\omega) \implies \Psi_{\theta_u}(\omega) = \xi_u(\omega) \quad ;$$

d'où, d'après (iv) :

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t - \Psi_t|^2 \, dA_t\} = E\{\int_{A_a}^{A_b} |\Phi_{\theta_u} - \Psi_{\theta_u}|^2 \, du\}$$

$$= E\{\int_{A_a}^{A_b} |\Phi_{\theta_u} - \xi_u|^2 \, du\} \leq E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_{\theta_u} - \xi_u|^2 \, du\}$$

$$\leq \varepsilon$$

C. Q. F. D.

Remarque. - Dans le cas particulier où la mesure sur R associée à la fonction croissante $t \to A_t(\omega)$ admet p. s. une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, DOOB montre (cf. [2], pages 446-447) que l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées est dense dans l'espace des processus Φ mesurables et bien adaptés tels que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty$. La restriction d'être "fortement" bien adaptés est donc inutile dans ce cas. La question est ouverte de savoir s'il en est encore de même pour un processus croissant intégrable à trajectoires continues quelconques.

2.6. Limitations du prolongement isométrique dans le cas où la martingale X n'est pas quasi continue à gauche. - Il résulte de la proposition 3 (n° 2.4) que, lorsque la martingale X est quasi continue à gauche, la fermeture $\overline{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ de l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étagées, contient l'ensemble des processus Φ bien adaptés et à trajectoires continues à droite tels que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty$. Nous allons montrer, par le contre exemple suivant, que ce résultat n'est plus vrai, en général, lorsque la martingale X n'est pas quasi continue à gauche.

Soient $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2\}$ où $\omega_1 \neq \omega_2$;

$$F = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset , \{\omega_1\} , \{\omega_2\} , \Omega\}$$

$F_t = \{\emptyset , \Omega\}$ si $t < t_0$ et $F_t = F$ si $t \geq t_0$ (où $t_0 \in R$ est fixé) ,

et

$$P(\{\omega_1\}) = \alpha \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad .$$

Dans l'espace de probabilité (Ω , F , P) , la convergence p. s. et la convergence en moyenne quadratique, équivalent à la convergence simple.

Soient ensuite

$$\varphi = 1^{\Omega}_{\{\omega_1\}} - P(\{\omega_1\}) = 1^{\Omega}_{\{\omega_1\}} - \alpha \quad ,$$

et

$$X_t = E\{\varphi | F_t\} = \varphi \, 1^{R}_{[t_0, +\infty)}(t) \quad .$$

On vérifie alors les propriétés suivantes :

a. $X = (X_t)_{t \in R}$ est une martingale de carré intégrable et le processus croissant naturel associé est donné par :

$$A_t(\omega_1) = A_t(\omega_2) = E\{\varphi^2\} \, 1_{[t_0, +\infty)}(t) \qquad (t \in R) \quad .$$

b. Pour tout processus Ψ appartenant à l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathcal{B}_R \times F , \nu_A)$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_t \, dX_t = \varphi . \Psi_{t_0}$$

(il suffit de le vérifier pour $\Psi \in \mathcal{E}$, puis de considérer une suite de processus $\Psi^n \in \mathcal{E}$ tendant dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ vers $\Psi \in \overline{\mathcal{E}}$).

c. Soit Φ le processus défini par :

$$\Phi_t = 1^{\Omega}_{\{\omega_1\}} \, 1_{[t_0, t_0+1[}(t) \qquad (t \in R) \quad ;$$

Φ est bien adapté, a ses trajectoires (p. s.) continues à droite, et on a :

(1) $$E\{\varphi\Phi_{t_0}\} = \alpha(1-\alpha) \neq 0$$

(2) $$E\{|\varphi\Phi_{t_0}|^2\} - E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} = \alpha(1-\alpha)^2 - \alpha^2(1-\alpha) \neq 0 \text{ si } \alpha \neq \frac{1}{2} \quad .$$

d. Il résulte de (b) et de (c) (relation (2)) que, si $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $\Phi \notin \overline{\mathcal{E}}$.

Remarque. – Soient $(X_t)_{t\in R}$ une martingale de carré intégrable, et A le processus croissant naturel associé.

a. Si le processus $\Phi = (1^R_{[u,v[}(t))_{t\in R}$ (où $u < v$) appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$, on a nécessairement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1^R_{[u,v[}(t) \, dX_t = X_v^- - X_u^- \quad \text{p. s.}$$

en effet, soit $\Phi^n = (1^R_{]u-(1/n),v-(1/n)]}(t))_{t\in R}$; d'une part la suite (Φ^n) tend vers Φ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$; d'autre part

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^n_t \, dX_t = X_{v-1/n} - X_{u-1/n} \quad \text{p. s.}$$

d'où le résultat, quand $n \to \infty$, compte tenu de l'uniforme intégrabilité de l'ensemble des X_t^2 $(t \leqslant k)$.

b. Dans le cas où le processus croissant A a toutes ses trajectoires identiques à une même fonction croissante θ, DOOB montre (cf. [2] pages 439-440) que l'ensemble des fonctions étagées à trajectoires continues à droite et dense dans l'espace des processus Φ bien adaptés et mesurables, tels que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, d\theta(t)\} < +\infty$. Compte tenu de (a) et de (IS_3), il semble alors naturel, ainsi que le fait DOOB, de définir l'intégrale stochastique en partant des fonctions étagées à trajectoires continues à droite, et en posant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t = \sum_k \varphi_k (X^-_{t_{k+1}} - X^-_{t_k})$$

pour un processus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in R}$ de la forme

$$\Phi_t = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k \, 1^R_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$$

où $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et où φ_k est F_{t_k} mesurable et borné.

Une telle définition ne conduit pas, en général, à une intégrale stochastique satisfaisant aux relations (IS_1) et (IS_2), ainsi que le montre l'exemple précédent (cf. (c)) puisque $\varphi\Phi_{t_0} = \Phi_{t_0}(X^-_{t_0+1} - X^-_{t_0})$.

2.7. Propriété de martingale du prolongement isométrique de l'intégrale stochastique. - Soient a, $b \in R$, $a \leq b$ et $\Phi = (\Phi_u)_{u \in R}$ un processus tel que le processus $(1_{]a,b]}(u)\ \Phi_u)_{u\in R}$ appartienne à l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ (cf. n° 1.4) ; nous désignerons par $\int_a^b \Phi_u\, dX_u$ l'intégrale stochastique $\int_{-\infty}^{+\infty} 1_{]a,b]}(u)\ \Phi_u\, dX_u$.

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 4. - Soient X une martingale généralisée standard de carré intégrable et A le processus croissant naturel associé à X.

Si $a < b$ et si $\Phi = (\Phi_u)_{u\in R}$ est un processus tel que le processus $(1_{]a,b]}(u)\ \Phi_u)_{u\in R}$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$ (cf. n° 1.4), alors toute version du processus $(\int_a^t \Phi_u\, dX_u)_{t\in[a,b]}$ est une martingale de carré intégrable.

Il suffit de montrer que, pour $a \leq s < t \leq b$,

$$E\{\int_a^t \Phi_u\, dX_u \mid F_s\} = \int_a^s \Phi_u\, dX_u \quad . \tag{1}$$

Soit (Φ^n) une suite de fonctions étagées convergeant vers le processus $(1_{]a,b]}(u)\ \Phi_u)_{u\in R}$ dans $\mathcal{L}^2(\nu_A)$. Pour chaque $v \in [a, b]$, la suite $(\int_a^v \Phi_u^n\, dX_u)_{n\in N}$ converge vers $\int_a^v \Phi_u\, dX_u$ dans L^2, donc dans L^1. Il suffit donc, d'après la propriété de continuité de l'espérance conditionnelle, de montrer la relation (1) pour Φ étagée ; ce qui est une aimple vérification.

PROPOSITION 5. - Avec les notations de la proposition 4, si la martingale X a ses trajectoires continues, alors, il existe une version de la martingale $(\int_a^t \Phi_u\, dX_u)_{t\in[a,b]}$ qui a aussi ses trajectoires continues.

Il suffit de remarquer que la propriété est vraie lorsque Φ est une fonction étagée, puis d'appliquer (en reprenant la suite (Φ^n) introduite dans la démonstration précédente) le lemme 6 ci-dessous à la suite des martingales

$$X^n = (\int_a^t \Phi_u^n\, dX_u)_{t\in[a,b]} \quad .$$

LEMME 6. - Soit (X^n) une suite de martingales standard de carré intégrable définies sur l'intervalle $[a, b]$ telle que la suite (X_b^n) soit de Cauchy dans $L^2(\Omega, F, P)$. Alors il existe un ensemble $A \in F$, P-négligeable, une sous-suite (X^{n_k}) de X^n, et une martingale standard de carré intégrable Y telle que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$,

$$\lim_{k\to\infty} X_t^{n_k}(\omega) = Y_t(\omega) \quad \text{uniformément lorsque } t \text{ décrit } [a, b] \quad ;$$

en outre, pour chaque $t \in [a , b]$,

$$\lim_{n\to\infty} X_t^n = Y_t \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega , F , P) \quad .$$

On pourra aussi consulter à ce sujet [2] page 445, et [3] page 182.

3. Prolongement de l'intégrale stochastique utilisant la convergence en probabilités.

Dans ce paragraphe nous allons étendre au cas d'une martingale généralisée de carré intégrable quasi continue à gauche le procédé de prolongement de l'intégrale stochastique utilisant la convergence en probabilité introduit par K. ITO dans le cas du mouvement brownien (cf. [3] page 178).

3.1. - Nous désignerons par $M(\Omega , F , P)$ l'espace des classes de fonctions numériques mesurables P-équivalentes ; si, pour tout $h \in M(\Omega , F , P)$, on pose $N(h) = E\{\frac{|h|}{1 + |h|}\}$, $N(h - h')$ est un écart borné et invariant par translation sur $M(\Omega , F , P)$, qui définit la topologie de la convergence en probabilité (topologie compatible avec la structure vectorielle qui fait de $M(\Omega , F , P)$ un espace de Fréchet).

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 6. - *Soient X une martingale généralisée standard de carré intégrable quasi continue à gauche, et A le processus croissant naturel associé à X. Pour tout processus Φ mesurable et fortement bien adapté tel que $E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < + \infty$, on a :*

$$\text{(P)} \qquad N\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u\right) \leq 4\left(N\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u}\right)\right)^{1/3} \quad .$$

D'après la proposition 3 (n° 2.4), il suffit de montrer la relation (P) quand Φ est une fonction étagée stochastique. Soit donc Φ une fonction étagée stochastique, et $a \in R$ un nombre tel que $t \geq a \implies \Phi_t = 0$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$, posons :

$$T_\varepsilon(\omega) = \inf\{u \mid u \leq a \text{ et } \int_{-\infty}^{u} |\Phi_s(\omega)|^2 \, dA_s(\omega) > \varepsilon^2\}$$

si cet ensemble est non vide, et

$$T_\varepsilon(\omega) = a \quad \text{s'il est vide} \quad .$$

Le processus $(\int_{-\infty}^{u} |\Phi_s|^2 \, dA_s)_{u\in R}$ étant bien adapté et standard, on a

$$\{T_\varepsilon < u\} = \bigcup_{\substack{r\in Q\\ r<u}} \{\int_{-\infty}^{r} |\Phi_s|^2 \, dA_s > \varepsilon^2\} \in F_u \text{ , pour tout } u \leqslant a \quad .$$

Donc T_ε est un temps d'arrêt sur R majoré par a. Le processus $(\Phi_u \, 1_{\{u\leq T_\varepsilon\}})_{u\in R}$ est donc encore une fonction étagée stochastique, et on a, d'après (IS_1) :

$$E\{|\int_{-\infty}^{a} \Phi_u \, 1_{\{u\leq T_\varepsilon\}} dX_u|^2\} = E\{\int_{-\infty}^{a} |\Phi_u|^2 \, 1_{\{u\leq T_\varepsilon\}} dA_u\}$$

$$= E\{\int_{-\infty}^{T_\varepsilon} |\Phi_u|^2 \, dA_u\} \leqslant \varepsilon^2$$

d'après la définition de T_ε, et la continuité des trajectoires de A. Posons

$$S_\varepsilon = \int_{-\infty}^{a} \Phi_u \, 1_{\{u\leq T_\varepsilon\}} \, dX_u \quad ;$$

d'après ce qui précède, on a $E\{S_\varepsilon^2\} \leqslant \varepsilon^2$.

Soit alors η un nombre > 0 ; on a :

$$\{|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u| > \eta\}$$

$$\subset (\{|\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_u \, dX_u| > \eta\} \cap \{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u \leqslant \varepsilon^2\}) \cup \{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u > \varepsilon^2\} \quad .$$

Mais, d'après le corollaire 2 de la proposition 3 (n° 2.4),

$$\omega \in \{\int_{-\infty}^{a} |\Phi_u|^2 \, dA_u \leqslant \varepsilon^2\} \implies S_\varepsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u(\omega) \quad \text{p. s.} \quad ;$$

d'où

$$P\{|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u| > \eta\} \leqslant P\{|S_\varepsilon| > \eta\} + P\{\int_{-\infty}^{a} |\Phi_u|^2 \, dA_u > \varepsilon^2\} \quad ,$$

ou encore, d'après l'inégalité de Čebyšev :

$$P\{|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u| > \eta\} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} N(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u})$$

(puisque la fonction $\alpha \to \frac{\alpha}{1+\alpha}$ $(\alpha \geqslant 0)$ est croissante).

D'où, finalement, puisque $N(\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_u \, dX_u) \leqslant \eta + P\{|\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_u \, dX_u| > \eta\}$,

$$N(\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_u \, dX_u) \leqslant \eta + \frac{\varepsilon^2}{\eta^2} + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} N(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u}) \quad ;$$

on en déduit l'inégalité (P) ; en effet, prenons $\eta = \varepsilon^{1/2}$; si

$$N(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u}) = 0 \quad ,$$

il suffit de faire tendre ε vers 0 ; et si

$$N(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u}) > 0 \quad ,$$

il suffit de prendre

$$\varepsilon = \left[N(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, dA_u})\right]^{2/3} \quad ,$$

et de remarquer que

$$N\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, d\Lambda_u}\right) \leq 1 \quad .$$

La proposition 6 est établie.

3.2. — Soit alors $\mathcal{M}_\Lambda$ l'ensemble des processus Φ mesurables fortement bien adaptés tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, d\Lambda_u < + \infty \text{ p. s.} \quad ,$$

et pour tout $\Phi \in \mathcal{M}_\Lambda$, soit

$$\rho(\Phi) = N\left(\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_u|^2 \, d\Lambda_u}\right) \quad .$$

$\rho(\Phi - \Phi')$ est un écart borné et invariant par translation qui définit sur $\mathcal{M}_\Lambda$ une topologie $\mathcal{T}_\Lambda$ compatible avec la structure vectorielle, et $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{M} , \nu_\Lambda)$ est un sous-espace dense de $\mathcal{M}_\Lambda$ pour cette topologie $\mathcal{T}_\Lambda$; en outre, sur $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{M} , \nu_\Lambda)$, la topologie $\mathcal{T}_\Lambda$ est moins fine que la topologie initiale, donc $\mathcal{E}$ est aussi un sous-espace dense de $\mathcal{M}_\Lambda$ pour la topologie $\mathcal{T}_\Lambda$. La relation (P) (proposition 6) s'écrit alors :

$$N\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u\right) \leq 4(\rho(\Phi))^{1/3} \quad ,$$

et entraîne que l'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u$ est continue de $\mathcal{L}^2(R \times \Omega , \mathfrak{M} , \nu_\Lambda)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_\Lambda$ dans $M(\Omega , F , P)$ muni de la topologie de la convergence en probabilité. L'application $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u \, dX_u$ se prolonge donc en une application linéaire de $\mathcal{M}_\Lambda$ dans $M(\Omega , F , P)$ vérifiant encore la relation (P).

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

THÉORÈME 4. — Soient X une martingale généralisée standard de carré intégrable quasi continue à gauche, et Λ le processus croissant naturel associé à X (cf. [1], § 4). L'intégrale stochastique introduite par le théorème 1 (n° 1.3) peut être prolongée (de façon unique) en une application linéaire $\Phi \to \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t$ de l'espace $\mathcal{M}_\Lambda$ des processus Φ mesurables et fortement bien adaptés tels que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, d\Lambda_t < + \infty \text{ p. s.} \quad ,$$

dans l'espace $M(\Omega , F , P)$ des classes de variables aléatoires équivalentes, de telle sorte que la relation suivante soit vérifiée :

$$\text{(P)} \qquad E\left\{\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t\right|}{1 + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_t \, dX_t\right|}\right\} \leq 4\left(E\left\{\frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, d\Lambda_t}}{1 + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, d\Lambda_t}}\right\}\right)^{1/3} \quad .$$

En outre, ce prolongement coïncide avec celui introduit par le théorème 3 sur l'ensemble des processus $\Phi \in \mathcal{M}_A$ tels que

$$E\{\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty \quad .$$

APPENDICE

Appendice : Cas d'une martingale définie sur $R_+ = [0, +\infty[$.

On prolonge d'abord la famille $(F_t)_{t\in R_+}$, en posant $F_t = F_0$ pour $t < 0$. Ensuite, à tout processus $\Phi = (\Phi_t)_{t\in R_+}$, on associe le processus $\hat{\Phi}$ défini par $\hat{\Phi}_t = \Phi_t$ si $t \geqslant 0$, et $\hat{\Phi}_t = \Phi_0$ si $t < 0$. Si $X = (X_t)_{t\in R_+}$ est une martingale de carré intégrable, et si $A = (A_t)_{t\in R_+}$ est le processus croissant naturel associé à X, $\hat{A}$ est le processus croissant naturel associé à la martingale de carré sommable $\hat{X}$.

Si on pose alors

$$\int_0^{+\infty} \Phi_t \, dX_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_t \, d\hat{X}_t \quad ,$$

chaque fois que cette dernière intégrale est définie, on définit une intégrale stochastique qui ne porte pas de masse au point 0 (c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} 1_{\{0\}}(t) \, dX_t = 0$), et qui est donc entièrement déterminée par la valeur qu'elle prend sur les processus étagés Ψ de la forme

$$\forall \ t \qquad \Psi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \cdot 1^R_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, et où φ_k est F_{t_k}-mesurable et borné. Dans le cas où X est quasi continu à gauche, on obtient, à partir de la proposition 3, le résultat suivant :

L'espace $\mathcal{E}_0$ des fonctions étagées $\Psi = (\Psi_t)_{t\in R_+}$ de la forme précédente est dense dans l'espace des processus fortement bien adaptés et mesurables tels que

$$E\{\int_0^{+\infty} |\Phi_t|^2 \, dA_t\} < +\infty \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] COURRÈGE (Philippe). - Décomposition des martingales de carré intégrable, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 7, 1962/63, n° 6, 14 p.

[2] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and Sons, 1953 (Wiley Publications in Statistics).

[3] ITO (Kiyoshi). - Lectures on stochastic processes. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1961 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 24).