SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

PAUL-ANDRÉ MEYER

Interprétation probabiliste de la notion d'énergie

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 5, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A4_0>

22 novembre 1962

INTERPRÉTATION PROBABILISTE DE LA NOTION D'ÉNERGIE

par Paul-André MEYER

La notion d'énergie, telle qu'elle est utilisée en théorie classique du potentiel, a longtemps résisté aux tentatives d'interprétation probabiliste. Notre objet dans cet exposé est de donner une telle interprétation ; on pourra remarquer qu'elle ne fait intervenir aucun noyau, et en particulier aucun noyau symétrique. Il faut bien dire cependant que la théorie que nous présentons ici est loin d'avoir la richesse de la théorie classique.

Cet exposé repose en grande partie sur l'exposé n° 11 du Séminaire de Théorie du Potentiel (*), consacré à la décomposition des surmartingales. Nous le désignerons dans la suite sous le nom d' "exposé 11" ; afin de ne pas grossir démesurément celui-ci, nous y renverrons le lecteur pour les définitions fondamentales.

Nous utiliserons les notations suivantes : $(\Omega , \mathfrak{F} , P)$ sera un espace probabilisé ; la loi P sera supposée complète ; les processus envisagés seront (sauf mention expresse du contraire) supposés adaptés à une même famille, croissante et continue à droite, de tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t\in R_+}$, dont chacune contient tous les ensembles P-négligeables.

I. Résultats relatifs aux processus croissants intégrables.

a. Considérons un processus croissant intégrable (A_t) ; nous avons défini dans l'exposé 11, pour toute martingale standard bornée (Y_t) , une variable aléatoire que nous avons notée :

$$\sum_s (A_s - A_{s-})(Y_s - Y_{s-}) \quad .$$

Nous allons reprendre cette définition, afin de pouvoir la généraliser.

(*) MEYER (Paul-André). - Décomposition des surmartingales, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel, t. 6, 1961/62, n° 11, 19 p.

Désignons par (Y_t) une martingale standard uniformément intégrable. On établit en théorie des martingales que la variable aléatoire $\sup_t |Y_t|$ est p. s. finie. Pour chaque $\omega \in \Omega$, la somme :

$$\text{(I.1)} \qquad \sum (A_s(\omega) - A_{s-}(\omega))|Y_s(\omega) - Y_{s-}(\omega)|$$

(qui ne comporte qu'une infinité dénombrable de termes non nuls), est majorée par $2 \sup_t |Y_t(\omega)| . A_\infty(\omega)$. L'expression :

$$\text{(I.2)} \qquad \sum (A_s(\omega) - A_{s-}(\omega))(Y_s(\omega) - Y_{s-}(\omega))$$

a donc un sens. Pour montrer qu'elle représente une variable aléatoire, il suffit de remarquer qu'elle est égale à la limite, lorsque ε tend vers 0, de l'expression :

$$\sum (A_{T_i}(\omega) - A_{T_i-}(\omega))(Y_{T_i}(\omega) - Y_{T_i-}(\omega))$$

où $T_1(\omega)$, $T_2(\omega)$ ... désignent les instants de la première, la seconde ... discontinuité de la trajectoire $s \to A_s(\omega)$, dont l'amplitude dépasse ε.

Soit p un exposant > 1, et soit q son exposant conjugué. DOOB a montré (cf. (*), p. 317) que l'on a, pour toute martingale standard uniformément intégrable (Y_t) :

$$\text{(I.3)} \qquad \|\sup_t |Y_t|\|_p \leqslant q . \|Y_\infty\|_p \quad .$$

Il en résulte que si l'on a $Y_\infty \in L^p$, $A_\infty \in L^q$, la variable aléatoire (I.2) a une norme dans L^1 au plus égale à

$$2q . \|Y_\infty\|_p . \|A_\infty\|_q \quad .$$

b. Un processus croissant intégrable (A_t) est dit <u>naturel</u> si l'on a, pour toute martingale standard bornée (Y_t), la relation

$$\text{(I.4)} \qquad E[\sum (A_s - A_{s-})(Y_s - Y_{s-})] = 0 \quad .$$

(*) DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley ; London, Chapman and Hall, 1953 (Wiley publications in Statistics).

Cette définition est apparemment moins restrictive que celle que nous avons donnée dans l'exposé 11 ; on peut montrer qu'elle lui est équivalente. Supposons que l'on ait $A_\infty \in L^q$: la relation (I.4) reste alors vraie pour toute martingale standard uniformément intégrable (Y_t) telle que Y_∞ appartienne à L^p (il suffit pour le voir d'approcher Y_∞, au sens de L^p, par des variables aléatoires bornées).

c. Voici une généralisation du lemme de l'exposé 11, page 13 ; appelons <u>subdivision</u> toute suite croissante $\mathcal{T} = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, telle que l'on ait $T_0 = 0$, $\lim_n T_n = \infty$ p. s. Considérons une suite de subdivisions $\mathcal{T}^p = (T_n^p)$; nous dirons que cette suite est <u>fine</u> si l'on a, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{p\to\infty} \sup_n d(T_n^p(\omega)\ ,\ T_{n+1}^p(\omega)) = 0$$

où d désigne une distance compatible avec la topologie d'espace compact de $\overline{R}$ (par exemple : $d(x\ ,\ y) = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right|$).

THÉORÈME 1. <u>Soit (Y_t) une martingale standard uniformément intégrable, telle que l'on ait $Y_\infty \in L^p$, et soit (A_t) un processus croissant intégrable tel que l'on ait $A_\infty \in L^q$. Attachons à toute subdivision $\mathcal{T} = (T_n)$ la variable aléatoire</u> :

$$D_{\mathcal{T}} = E[Y_\infty A_\infty - \sum Y_{T_n}(A_{T_{n+1}} - A_{T_n} \mid \mathcal{F}_0)] \quad .$$

<u>Lorsque $\mathcal{T}$ parcourt une suite fine de subdivisions, les variables aléatoires $D_{\mathcal{T}}$ convergent en norme, dans L^1, vers</u>

$$E[\sum (A_s - A_{s-})(Y_s - Y_{s-}) \mid \mathcal{F}_0] \quad .$$

d. Le théorème suivant nous servira dans plusieurs calculs :

THÉORÈME 2. - <u>Soit (A_t) un processus croissant intégrable, et soient deux processus mesurables bornés, (X_t) et (Y_t) (non nécessairement adaptés aux tribus $(\mathcal{F}_t)$) tels que l'on ait</u> :

(I.5) $$E[X_T \mid \mathcal{F}_T] = E[Y_T \mid \mathcal{F}_T] \quad \text{p. s.}$$

pour tout temps d'arrêt T. On a alors p. s. :

(I.6) $$E[\int_0^\infty X_t \, dA_t \mid \mathcal{F}_0] = E[\int_0^\infty Y_t \, dA_t \mid \mathcal{F}_0] \quad .$$

Démonstration. - Posons, pour tout t et tout $\omega \in \Omega$,

$$c_t(\omega) = \inf \{s : A_s(\omega) > t\} \quad .$$

On a alors, pour chaque $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^\infty X_t(\omega) \, dA_t(\omega) = \int_0^{A_\infty(\omega)} X_{c_t}(\omega) \, dt$$

ainsi que la relation analogue relative à (Y_t) ; de sorte que les deux membres de (I.6) sont égaux respectivement à

$$E[\int_0^\infty X_{c_t} . I_{\{c_t < \infty\}} \, dt \mid \mathcal{F}_0] \quad \text{et} \quad E[\int_0^\infty Y_{c_t} . I_{\{c_t < \infty\}} \, dt \mid \mathcal{F}_0] \quad .$$

Il suffit alors d'intervertir les signes d'intégration, de remarquer que c_t est un temps d'arrêt, et d'appliquer (I.5).

e. Voici un théorème analogue, dans lequel c'est le noyau d'intégration qui cesse d'être un processus adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$:

THÉORÈME 3. - Soient (A_t) et (B_t) deux processus stochastiques (non nécessairement adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)$) dont les trajectoires sont p. s. positives, croissantes et continues à droite. On suppose que les variables aléatoires A_∞ et B_∞ sont intégrables et que l'on a :

(I.7) $$E[A_\infty - A_t \mid \mathcal{F}_t] = E[B_\infty - B_t \mid \mathcal{F}_t] \quad \text{pour tout } t \quad .$$

Soit (X_t) un processus adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$, dont les trajectoires sont bornées et continues à gauche. On a alors :

(I.8) $$E[\int_0^\infty X_t \, dA_t] = E[\int_0^\infty X_t \, dB_t] \quad .$$

Démonstration. - Choisissons une subdivision de la demi-droite $\underset{\sim}{R}_+$ au moyen de points t_i qui satisfont aux conditions suivantes :

$$t_{i+1} - t_i \leq \varepsilon \qquad P\{A_{t_i} \neq A_{t_i-}\} = P\{B_{t_i} \neq B_{t_i-}\} = 0 \qquad ;$$

posons $Y_t(\omega) = X_{t_i}(\omega)$ sur l'intervalle $[t_i , t_{i+1}[$. Nous avons :

$$E[\int_0^\infty Y_t \, dA_t] = E[\sum X_{t_i}(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})]$$

$$= E[\sum X_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = E[\int_0^\infty Y_t \, dB_t]$$

d'après (I.7). Pour obtenir (I.8), il suffit de faire tendre ε vers 0 et d'appliquer le théorème de Lebesgue.

II. Potentiels d'énergie finie.

a. Rappelons (exposé 11) qu'il existe, pour tout potentiel (X_t) de la classe (D) , un processus croissant intégrable naturel (A_t) qui engendre (X_t) , c'est-à-dire qui vérifie la relation :

(II.1) $$X_T = E[A_\infty \mid \mathfrak{F}_T] - A_T$$

pour tout temps d'arrêt T . Un tel processus est unique.

DÉFINITION 1. - *Soit (X_t) un potentiel. Si (X_t) n'appartient pas à la classe (D) , nous dirons que (X_t) a une énergie infinie. Si (X_t) appartient à la classe (D) , nous appellerons énergie de (X_t) le nombre positif, fini ou non :*

(II.2) $$e[(X_t)] = \frac{1}{2} E[A_\infty^2]$$

où (A_t) désigne le processus croissant intégrable naturel qui engendre (X_t) .

On peut plus généralement définir, pour tout $p > 1$, les quantités :

$$e_p[(X_t)] = \frac{1}{p!} E[A_\infty^p] \qquad .$$

b. Calcul de l'énergie d'un potentiel.

THÉORÈME 4. - Soit (X_t) le potentiel engendré par le processus croissant intégrable naturel (A_t). On a la relation :

$$\text{(II.3)} \qquad e[(X_t)] = \frac{1}{2} E[\int_0^\infty (X_u + X_{u-})\, dA_u] \quad .$$

Démonstration. - Nous nous bornerons ici au cas où le premier membre est fini. Nous avons, d'après la formule d'intégration par parties :

$$A_\infty^2 = \int_0^\infty (A_\infty - A_u)\, dA_u + \int_0^\infty (A_\infty - A_{u-})\, dA_u$$

$$= 2 \int_0^\infty (A_\infty - A_u)\, dA_u + \int_0^\infty (A_u - A_{u-})\, dA_u \quad .$$

Intégrons, et utilisons d'une part le théorème 2 qui nous donne :

$$2E[\int_0^\infty (A_\infty - A_u)\, dA_u] = 2E[\int_0^\infty X_u\, dA_u]$$

et d'autre part la relation (I.4), dans laquelle on pose $Y_t = X_t + A_t$, et qui nous donne :

$$E[\int_0^\infty (A_u - A_{u-})\, dA_u] = E[\int_0^\infty (X_{u-} - X_u)\, dA_u] \quad .$$

L'énoncé s'en déduit immédiatement.

COROLLAIRE. - Si le potentiel (X_t) est borné par une constante c, son énergie est inférieure à c^2.

(On peut montrer, avec un peu plus de difficultés, que l'on a aussi $e_p[(X_t)] \leq c^p$, pour tout p entier ≥ 2.)

c. Considérons les trois expressions suivantes :

$$e'[(X_t)] = E[\int_0^\infty X_u\, dA_u]$$

$$e[(X_t)] = \frac{1}{2} E[\int_0^\infty (X_u + X_{u-})\, dA_u]$$

$$e''[(X_t)] = E[\int_0^\infty X_{u-}\, dA_u] \quad .$$

Il résulte de la démonstration du théorème 4 que l'on a $e' \leq e \leq e''$, avec égalité si et seulement si le processus (A_t) est continu, c'est-à-dire si (X_t) est régulier (exposé 11). Les quantités e et e'' sont finies simultanément (on a $e'' \leq 2e$). Comme nous le verrons, la quantité e'' présente divers avantages ; en voici un, qui résulte du théorème 3 : soit (B_t) un processus croissant intégrable quelconque (qui n'est pas nécessairement adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$), tel que l'on ait $X_t = E[B_\infty - B_t \mid \mathcal{F}_t]$ pour tout t . On a alors :

(II.4) $$e''[(X_t)] = E[\int_0^\infty X_{u-}\, dB_u] \quad .$$

d. Lien avec la théorie classique - le "principe de l'énergie".

Nous nous plaçons maintenant sous les hypothèses de la troisième partie du mémoire de HUNT ([1]). Nous désignons par

λ la mesure excessive fondamentale (la mesure de Lebesgue dans les cas classiques),

(P_t) le semi-groupe de Markov,

(M_t) le processus de Markov associé au semi-groupe (P_t) et à une mesure initiale η ,

U le noyau-potentiel.

Les surmartingales que nous considérons sont de la forme $X_t = f \circ M_t$, où f est une fonction excessive (surharmonique). Si f est un potentiel de la classe (D) , on peut écrire $f = U\mu$ (μ , mesure positive) et $f = U_A$ (A fonctionnelle additive de Markov naturelle). Rappelons que l'on a, pour toute fonction positive g :

$$U_A(g) = U(g.\mu) \qquad \text{(voir [2])} \quad .$$

Etant donné que l'on a $X_u = f \circ M_u$, on a (pour la mesure initiale η) :

$$e'[(X_t)] = E^\eta[\int_0^\infty f \circ M_u\, dA_u] = \langle \eta , U_A f \rangle = \langle \eta , U(f.\mu) \rangle = \langle \hat{U}\eta , \mu.U\mu \rangle \quad .$$

Faisons parcourir à η une suite de mesures, dont les potentiels tendent en croissant vers la mesure fondamentale λ (on a donc $\lim \hat{U}\eta = 1$). Les quantités e' tendent en croissant vers une quantité $e'_{\lim}[f]$:

$$e'_{lim}[f] = \langle\mu , U\mu\rangle \quad .$$

C'est donc cette quantité qui représente l'énergie classique. Si nous définissons de même les quantités e_{lim} et e''_{lim}, nous obtenons des valeurs supérieures à l'énergie classique, et qui ne lui sont égales que si le potentiel f est régulier, c'est-à-dire si la mesure μ ne charge aucun ensemble semi-polaire.

Soient f et g deux potentiels d'énergie finie, engendrés respectivement par des mesures μ et ν, par des fonctionnelles additives naturelles A et B. Posons $h = f - g$, $\theta = \mu - \nu$, $C = A - B$. Il est naturel de définir (le passage à la limite n'étant pas difficile à justifier) :

(II.5)
$$e_{lim}[h] = \lim_{\eta U \hat{\uparrow} \lambda} E^{\eta}[C^2_{\infty}] \quad .$$

Cette quantité est positive (à l'inverse de l'énergie classique $\langle\mu , U\mu\rangle$, qui peut être < 0 pour certaines mesures et certains noyaux non symétriques, comme le montre l'exemple du processus de translation uniforme sur la droite). En revanche, la relation $e_{lim}[h] = 0$ n'entraîne pas nécessairement $h = 0$ (même exemple). Cette dernière difficulté ne peut pas se produire pour un noyau symétrique.

Nous avons ainsi établi l'inégalité de l'énergie pour les noyaux envisagés dans ([1]). Nous n'insisterons pas sur ces noyaux ici ; signalons simplement qu'on peut montrer que le cône des mesures positives d'énergie finie est complet, et que la projection s'identifie au balayage lorsque le noyau U est symétrique.

e. THÉORÈME 5. - Soit (Y_t) un potentiel d'énergie finie, et soit (X_t) un potentiel majoré par (Y_t) ; (X_t) est alors d'énergie finie, et l'on a :

(II.6)
$$e[(X_t)] \leqslant 4e[(Y_t)] \quad .$$

Démonstration. - Commençons par supposer que le potentiel (X_t) est borné, donc d'énergie finie. Soient (A_t) et (B_t) respectivement les processus croissants intégrables naturels qui engendrent (X_t) et (Y_t). Nous avons

$$e''[(X_t)] = E[\int_0^{\infty} X_{u-}\, dA_u] \leqslant E[\int_0^{\infty} (Y_{u-} + B_{u-})\, dA_u] \quad .$$

Le processus (A_t) étant naturel, et le processus $(Y_u + B_u)$ étant une martingale, cette dernière intégrale est égale à :

$$E[\int_0^\infty (Y_u + B_u)\, dA_u]$$

quantité égale, en vertu du théorème 2, à $E[A_\infty . B_\infty]$. On a donc, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$e''[(X_t)] \leqslant \sqrt{E[A_\infty^2].E[B_\infty^2]} = \sqrt{4e[(X_t)]\ e[(Y_t)]} \quad .$$

Cette inégalité est plus précise que (II.6), car on a $e[(X_t)] \leqslant e''[(X_t)]$. Pour obtenir (II.6) dans le cas général, il suffit de poser $X_t = \lim\limits_{n\to\infty} \inf (X_t , n)$, d'appliquer le résultat précédent aux potentiels bornés $\inf (X_t , n)$, et de passer à la limite grâce au théorème 6 ci-dessous.

f. Convergence monotone et norme-énergie.

Le théorème suivant sera amélioré par la suite dans certains cas particuliers.

THÉORÈME 6. - Soit (X_t^n) une suite croissante de potentiels, qui converge vers un potentiel (X_t) . On a alors l'inégalité :

$$\text{(II.7)} \qquad e[(X_t)] \leqslant \liminf_n e[(X_t^n)] \quad .$$

Démonstration. - Nous nous bornerons ici au cas où le potentiel (X_t) appartient à la classe (D) ; il en est alors de même des potentiels (X_t^n) : soient respectivement (A_t) , (A_t^n) les processus croissants intégrables naturels qui engendrent (X_t) , (X_t^n) . On peut montrer (exposé 11) que les variables aléatoires A_∞^n convergent vers A_∞ au sens de la topologie faible $\sigma(L^1 , L^\infty)$. L'inégalité (II.7) est évidente si son second membre est infini. S'il ne l'est pas, nous pouvons extraire de la suite (A_∞^n) une suite $(A_\infty^{n_k})$ telle que l'on ait :

$$A_\infty^{n_k} \in L^2 \ ; \quad \lim_k E[(A_\infty^{n_k})^2] = \liminf_n E[(A_\infty^n)^2] \quad .$$

La suite $(A_\infty^{n_k})$ converge alors vers A_∞ au sens de la topologie faible $\sigma(L^2, L^2)$ et le théorème est établi.

Remarques. – Le point essentiel de la démonstration précédente a été la convergence (au sens de la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$) des variables aléatoires A_∞^n vers la variable aléatoire A_∞ associée au processus croissant intégrable naturel (A_t) qui engendre (X_t). Cette convergence faible peut être établie sous des hypothèses plus générales que la convergence monotone.

D'après un résultat bien connu sur la convergence faible dans un espace de Hilbert, le théorème précédent entraînera la convergence en norme-énergie des (X_t^n) vers (X_t) chaque fois que l'on aura :

$$\lim_n E[(A_\infty^n)^2] = E[A_\infty^2] < \infty \qquad .$$

Nous allons chercher maintenant des conditions suffisantes pour que la convergence envisagée dans l'énoncé précédent ait lieu en norme-énergie. La discussion générale semble difficile. Nous nous bornerons à deux cas particuliers importants.

THÉORÈME 7. – Soit (X_t^n) une suite croissante de potentiels, qui converge vers un potentiel regulier (X_t) d'énergie finie. La suite (X_t^n) converge alors vers (X_t) en norme-énergie.

Démonstration. – Nous utilisons une méthode due à SHUR (Cf. exposé 11). Désignons par (A_t), (A_t^n) les processus croissants intégrables naturels qui engendrent respectivement (X_t), (X_t^n). Fixons-nous un nombre $\varepsilon > 0$, et désignons par T_n le temps d'arrêt :

$$\text{(II.8)} \qquad T_n(\omega) = \inf\ \{t :\ X_t(\omega) - X_t^n(\omega) > \varepsilon\} \qquad .$$

On a pour tout $p \geqslant n$:

$$\text{(II.9)} \qquad X_{T_p}(\omega) - X_{T_p}^n(\omega) \geqslant X_{T_p}(\omega) - X_{T_p}^p(\omega) \geqslant \varepsilon . I_{\{T_p < \infty\}} \qquad .$$

Lorsque p augmente, T_p augmente ; soit S sa limite. Nous avons pour tout n :

$$E[X_S^n] \leqslant \lim_p E[X_{T_p}^n]$$

et, d'après la régularité de (X_t) :

$$E[X_S] = \lim_p E[X_{T_p}] \quad .$$

Il en résulte, en intégrant (II.9) et en faisant tendre p vers l'infini, que l'on a pour tout n :

$$E[X_S - X_S^n] \geq \varepsilon . P\{S<\infty\} \quad .$$

Le premier membre tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on voit que l'on a p. s. $S = \infty$. On peut d'ailleurs remarquer que T_p ne peut tendre vers l'infini qu'en sautant à l'infini, ce qui montre que les trajectoires du processus (X_t^n) convergent p. s. uniformément vers celles de (X_t) ("convergence quasi-uniforme").

Evaluons alors l'espérance $E[(A_\infty - A_\infty^n)^2]$; elle est égale, d'après le théorème 4, à

$$\frac{1}{2} E[\int_0^\infty [(X_t - X_t^n) + (X_{t-} - X_{t-}^n)] \, d(A_t - A_t^n)] \quad .$$

Supposons $n \geq p$, intégrons de 0 à T_p ; l'intégrale obtenue est majorée par $\varepsilon.(E[A_\infty] + E[A_\infty^n])$. D'autre part, l'intégrale de T_p à $+\infty$ est majorée par :

$$E[(A_\infty - A_{T_p})^2] + E[(A_\infty^n - A_{T_p}^n)^2]$$

(on n'a conservé que les termes positifs, et raisonné comme pour le théorème 4). Le théorème 5 nous montre alors que cette somme est elle-même majorée par $5E[(A_\infty - A_{T_p})^2]$, qui tend vers 0 lorsque $p \to \infty$.

THÉORÈME 8. - <u>Soit</u> (X_t) <u>un potentiel d'énergie finie. Pour tout</u> $\lambda > 0$, <u>désignons par</u> (X_t^λ) <u>une version standard du processus</u> :

$$\text{(II.10)} \qquad X_t^\lambda = \frac{1}{\lambda} E[\int_t^{t+\lambda} X_s \, ds \mid \mathcal{F}_t] \quad .$$

<u>Les potentiels</u> (X_t^λ) <u>convergent vers</u> (X_t) <u>en norme-énergie lorsque</u> λ <u>tend vers</u> 0 .

<u>Démonstration</u>. - Nous nous bornerons ici au cas où le processus croissant intégrable naturel (A_t) qui engendre (X_t) est purement discontinu, et présente un seul saut égal à une variable aléatoire Φ , à un instant T . On en déduira le cas général en remarquant que tout processus croissant naturel est la somme d'un processus continu (pour lequel le problème est résolu par le théorème précédent) et d'une série de processus du type que nous étudions ici.

L'énergie du potentiel (X_t^λ) est égale (d'après la régularité) à $e''[(X_t^\lambda)]$, quantité qui est égale, d'après (II.4), à :

$$E[\int_0^\infty X_{u-}^\lambda \frac{A_{u+\lambda} - A_u}{\lambda} du] = E[\int_0^\infty X_u^\lambda \frac{A_{u+\lambda} - A_u}{\lambda} du] \quad .$$

On a donc :

$$e''[(X_t^\lambda)] = E[\frac{\Phi}{\lambda} \int_{T-\lambda}^T X_u^\lambda du] \quad .$$

Remplaçons X_u^λ par sa valeur dans cette intégrale, nous obtenons pour l'énergie :

$$E[\frac{\Phi}{\lambda} \int_{T-\lambda}^T du . \frac{1}{\lambda} \int_u^T E[X_v \mid \mathcal{F}_u] dv] \quad .$$

(L'intégrale intérieure est étendue de u à T du fait que l'on a $X_v = 0$ pour $v \geqslant T$.) Or, dès que λ est petit, la fonction $E[X_v \mid \mathcal{F}_u]$ est très voisine de Φ (du fait que le temps d'arrêt T est approchable) sur l'intervalle $(T - \lambda, T)$. L'intégrale est donc très voisine de

$$E[\Phi^2 . \frac{1}{\lambda^2} \int_{T-\lambda}^T du \int_u^T dv] = \frac{1}{2} E[\Phi^2] \quad .$$

Or cette valeur est égale à l'énergie de (X_t) . On conclut à l'aide des remarques qui suivent le théorème 6.

La combinaison de ce résultat et des méthodes de l'exposé 11 permet de démontrer le résultat suivant : si (X_t) est un potentiel de la classe (D) , engendré par le processus naturel (A_t) , les variables aléatoires

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty (X_t - E[X_{t+\lambda} \mid \mathcal{F}_t]) dt$$

convergent vers A_∞ au sens de la norme de L^1 .

g. Energie et intégrale de Dirichlet.

THÉORÈME 9. - Soit (X_t) un potentiel d'énergie finie, engendré par le processus croissant intégrable naturel (A_t) ; à chaque subdivision $\mathcal{C} = (T_n)$ associons le nombre :

$$I_{\mathcal{C}} = E[\sum_n (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2] \qquad \text{(II.11)}$$

Lorsque $\mathcal{C}$ parcourt une suite de subdivisions fines, le nombre $I_{\mathcal{C}}$ tend vers $2e''[(X_t)] - E[X_0^2]$.

Démonstration. - Ecrivons que la martingale de carré sommable $(X_t + A_t)$ est un processus à accroissements orthogonaux, et tenons compte des relations $A_0 = X_\infty = 0$; il vient :

$$\begin{aligned} E[A_\infty^2] - E[X_0^2] &= E[\sum_n (A_{T_{i+1}} - A_{T_i} + X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2] \\ &= E[\sum (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2] - E[\sum (A_{T_{i+1}} - A_{T_i})^2] \\ &\quad + 2E[\sum (A_{T_{i+1}} - A_{T_i})(X_{T_{i+1}} - X_{T_i} + A_{T_{i+1}} - A_{T_i})] \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 lorsque la subdivision $\mathcal{C}$ devient arbitrairement fine (théorème 1) ; il en résulte que $I_{\mathcal{C}}$ a la même limite que l'expression :

$$E[A_\infty^2] + E[\sum (A_{T_{i+1}} - A_{T_i})^2] - E[X_0^2]$$

expression qui tend vers $2e''[(X_t)] - E[X_0^2]$.

Interprétation. - Soit (B_t) un mouvement brownien correspondant à la mesure initiale η ; soit v un potentiel deux fois continûment différentiable. Prenons pour (X_t) le processus $v \circ B_t$. Il est facile de voir que la limite de l'expression (II.11) est égale à :

$$\begin{aligned} E^\eta[\int_0^\infty \mathrm{grad}^2\, v \circ B_t\, dt] &= \langle \eta\, ,\, U(\mathrm{grad}^2\, v)\rangle \\ &= \langle \eta U\, ,\, \mathrm{grad}^2\, v\rangle \end{aligned}$$

Lorsque le potentiel ηU tend en croissant vers la mesure de Lebesgue, cette expression tend vers l'intégrale de Dirichlet classique.

III. Intégrale de Dirichlet des fonctions harmoniques.

Soit maintenant (X_t) une surmartingale positive quelconque. Il sera naturel de définir l'intégrale de Dirichlet de (X_t) comme la limite (lorsqu'elle existe) de la somme :

$$I_{\mathcal{C}} = E[\sum (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2]$$

où $\mathcal{C} = (T_n)$ parcourt une suite fine de subdivisions. En particulier, dans le cas où (X_t) est une martingale, on a :

$$I_{\mathcal{C}} = E[(X_\infty - X_0)^2] = E[X_\infty^2 - X_0^2] \quad .$$

Soient u une fonction harmonique sur un espace de Green, et (B_t) un mouvement brownien correspondant à la mesure initiale η . Cette définition de l'intégrale de Dirichlet nous conduit, par le procédé que nous avons déjà utilisé plus haut, à la valeur

$$\lim E^\eta[u_\infty^2 \circ B_\infty - u^2 \circ B_0]$$

où η parcourt une suite de mesures dont les potentiels croissent vers la mesure de Lebesgue. Pour voir que c'est bien l'intégrale de Dirichlet classique que l'on obtient ainsi, remarquons (d'après DOOB) que la fonction u^2 est sousharmonique et que l'on a la décomposition de Riesz :

$$u^2 = h - v$$

où la fonction harmonique h est donnée par

$$h(x) = E^x[u^2 \circ B_\infty]$$

et où le potentiel $v = U\mu$ est donné par

$$v(x) = E^x[u^2 \circ B_\infty - u^2 \circ B_0]$$

de sorte que la quantité que nous avons calculée est égale à

$$\lim \langle \eta , v \rangle = \text{masse totale de } \mu .$$

Or on a :

$$\mu = -\frac{1}{2} \Delta(u^2) = \mathrm{grad}^2 u \, dx$$

où dx désigne la mesure de Lebesgue. La masse totale de μ est donc égale à l'intégrale de Dirichlet classique, que l'on retrouve donc par notre procédé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials, III., Illinois J. Math., t. 2, 1958, p. 151-213.

[2] MEYER (P.-A.). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230.