SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une présentation de la théorie des ensembles sousliniens ; application aux processus stochastiques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 7 (1962-1963), exp. n° 2, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1962-1963__7__A1_0>

© Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962-1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
7e année, 1962/63, n° 2

25 octobre 1962

UNE PRÉSENTATION DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES SOUSLINIENS APPLICATION AUX PROCESSUS STOCHASTIQUES

par Paul-André MEYER

La théorie des ensembles K-analytiques, qui a longtemps passé pour un divertissement polonais réservé à quelques spécialistes, est bien connue maintenant grâce aux travaux de CHOQUET sur la capacitabilité. Or CHOQUET a démontré récemment un très beau théorème sur la capacitabilité des ensembles sousliniens abstraits, qui semble en particulier très bien adapté aux besoins de la théorie des processus stochastiques. Etant donné que la théorie de l'opération (A) de Souslin est un peu rebutante, et en tout cas assez mal connue, nous avons essayé de montrer ici que toute la théorie des ensembles sousliniens abstraits et des capacités abstraites peut se développer sans l'opération (A), exactement suivant le même plan que la théorie "topologique". La plupart des démonstrations étant, ou très faciles, ou tout à fait classiques, nous n'en donnerons presque aucune.

I. Ensembles $\mathcal{F}$-analytiques.

1. Notations.

Soit E un ensemble ; nous appellerons pavage de E tout ensemble de parties de E, contenant la partie vide. Si $\mathcal{E}$ est un tel pavage, nous désignerons par $\mathcal{E}_f$ (resp. $\mathcal{E}_\sigma$, $\mathcal{E}_\delta$) l'ensemble des réunions finies (resp. des réunions dénombrables, des intersections dénombrables) d'éléments de $\mathcal{E}$.

Soient $(E_i, \mathcal{E}_i)$ des ensembles pavés. Nous appellerons pavage produit (resp. pavage somme) des $\mathcal{E}_i$ le pavage sur $E = \prod_i E_i$ (resp. sur $E = \sum_i E_i$) constitué par les parties de E de la forme $\prod_i A_i$ (resp. $\sum_i A_i$), où $A_i = E_i$ (resp. $A_i = \emptyset$) sauf pour des indices en nombre fini, pour lesquels on a $A_i \in \mathcal{E}_i$.

2. Pavages semi-compacts.

DÉFINITION 1. - On dit qu'un pavage $\mathcal{E}$ est semi-compact s'il possède la propriété suivante : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$, telle que

$$\bigcap_{n \in \underset{\sim}{N}} A_n = \emptyset \quad ,$$

il existe une partie finie $I \subset \underset{\sim}{N}$ telle que

$$\bigcap_{n \in I} A_n = \emptyset \quad .$$

THÉORÈME 1. - Soit $\mathcal{E}$ un pavage semi-compact ; le pavage $\mathcal{E}_{\delta f}$ est encore semi-compact.

Démonstration. - Nous nous bornerons à établir que

$$(\mathcal{E} \text{ semi-compact}) \Longrightarrow (\mathcal{E}_f \text{ semi-compact}) \quad .$$

Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{E}_f$, telle que l'on ait

$$\bigcap_{n \in I} A_n \neq \emptyset$$

pour toute partie finie $I \subset \underset{\sim}{N}$. Chaque A_n est une réunion

$$\bigcup_{j \in J_n} A_{nj} \quad ,$$

où J_n est un ensemble fini, et où les A_{nj} appartiennent à $\mathcal{E}$. On construit alors par récurrence des $j_n \in J_n$ tels que l'on ait, pour toute partie finie I de $\underset{\sim}{N}$,

$$\bigcap_{n \in I} A_{nj_n} \neq \emptyset \quad .$$

Il résulte de la semi-compacité que l'on a alors

$$\bigcap_{n \in N} A_{nj_n} \neq \emptyset \text{ , et a fortiori } \bigcap_{n \in N} A_n \neq \emptyset \quad .$$

THÉORÈME 2. - Soient $(E_i)_{i \in I}$ des ensembles munis de pavages semi-compacts $\mathcal{E}_i$; les pavages $\prod_i \mathcal{E}_i$ et $\sum_i \mathcal{E}_i$ sont alors semi-compacts.

THÉORÈME 3. - Soit $(E , \mathcal{E})$ un ensemble pavé, et soit f une application de E dans un ensemble F . On suppose que, pour tout $x \in F$, le pavage constitué par les ensembles $f^{-1}\{x\} \cap A$, $A \in \mathcal{E}$, est semi-compact. On a alors, pour toute suite décroissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{E}$:

$$f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(A_n) \quad .$$

3. Ensembles $\mathcal{F}$-analytiques.

DÉFINITION 2. - Soit F un ensemble muni d'un pavage $\mathcal{F}$. On dit qu'une partie A de F est $\mathcal{F}$-analytique s'il existe un ensemble auxiliaire E muni d'un pavage semi-compact $\mathcal{E}$, et une partie B de $E \times F$, appartenant à $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$, telle que A soit la projection de B sur F .

Le pavage sur F constitué par les ensembles $\mathcal{F}$-analytiques sera désigné par la notation $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

THÉORÈME 3.

a. On a $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

b. Tout élément de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est contenu dans un élément de $\mathcal{F}_\sigma$.

c. On a $[\mathcal{A}(\mathcal{F})]_\sigma = [\mathcal{A}(\mathcal{F})]_\delta = \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

d. Soient E un ensemble muni d'un pavage semi-compact $\mathcal{E}$, B une partie $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$-analytique de $E \times F$; la projection de B sur F est alors $\mathcal{F}$-analytique.

e. Soient $(F , \mathcal{F})$ et $(G , \mathcal{G})$ deux ensembles pavés, et f une application de F dans G telle que $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. On a alors aussi $f^{-1}(\mathcal{A}(\mathcal{G})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

f. On a $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

La démonstration de ce théorème ne présente aucune difficulté. Il suffit de revenir, chaque fois, à la définition des ensembles $\mathcal{F}$-analytiques. Nous traiterons à titre d'exemple l'assertion $[\mathcal{A}(\mathcal{F})]_\delta \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles $\mathcal{F}$-analytiques ; il existe pour chacun d'eux un ensemble E_n , muni d'un pavage semi-compact $\mathcal{E}_n$, et un élément B_n de $(\mathcal{E}_n \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$ qui se projette sur F suivant A_n . Soit alors E l'ensemble $\prod_n E_n$ muni du pavage semi-compact $\mathcal{E} = \prod_n \mathcal{E}_n$, et soit B'_n le cylindre de base B_n dans l'espace $E \times F$ (ensemble des points de $E \times F$ qui se projettent sur $E_n \times F$ suivant un point de B_n). L'ensemble $\bigcap_n A_n$ est la projection sur F de $\bigcap_n B'_n$, et cet ensemble appartient à $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$.

Voici un résultat simple, qui montre dans quel cas les ensembles "boréliens" sont aussi analytiques.

THÉORÈME 4. - Soit $(F, \mathcal{F})$ un ensemble pavé, et soit $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par les éléments de $\mathcal{F}$. Pour que l'on ait $\mathcal{T}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$, il faut et il suffit que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{F}$ soit $\mathcal{F}$-analytique.

Soit un ensemble E, muni d'un pavage semi-compact $\mathcal{E}$; supposons que $\mathcal{F}$ soit une tribu, et que le complémentaire de tout élément de $\mathcal{E}$ appartienne à $\mathcal{E}_\sigma$; le complémentaire de tout élément de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est alors $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$-analytique, et il en résulte que sa projection sur F est $\mathcal{F}$-analytique. La même propriété est donc vraie pour la projection de tout élément de $\mathcal{T}(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$.

4. Ensembles analytiques et ensembles sousliniens.

Soient Z_0 (resp. Z) l'ensemble des suites finies (resp. infinies) d'entiers > 0. Si un élément s de Z_0 est un segment initial d'un élément s' de Z_0 (resp. d'un élément σ de Z) nous écrirons $s \prec s'$ (resp. $s \prec \sigma$). Pour toute suite $s \in Z_0$, nous désignerons par $|s|$ la longueur de s. Soit maintenant $(F, \mathcal{F})$ un ensemble pavé ; on appelle système déterminant (sur $\mathcal{F}$) toute application $H : s \to H_s$ de Z_0 dans $\mathcal{F}$. Le noyau du système déterminant H est l'ensemble :

$$A(H) = \bigcup_{\sigma \in Z} \bigcap_{s \prec \sigma} H_s \quad .$$

Les noyaux des systèmes déterminants sur $\mathcal{F}$ constituent le pavage des ensembles $\mathcal{F}$-sousliniens, pavage que nous désignerons par $\mathcal{S}(\mathcal{F})$.

Le théorème suivant, que nous démontrons d'après CHOQUET, n'est en aucune manière indispensable au développement de la théorie.

THÉORÈME 5. - Les pavages $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ sont identiques.

Démonstration.

1° Tout ensemble analytique est souslinien.

Soit A un ensemble analytique ; il existe un ensemble E, muni d'un pavage semi-compact $\mathcal{E}$, et des éléments E_{nm} de $\mathcal{E}$, B_{nm} de $\mathcal{F}$, tels que A soit la projection sur F de l'ensemble :

$$\bigcap_n \bigcup_m (E_{nm} \times B_{nm}) \quad .$$

Or cet ensemble est aussi égal à :

$$\bigcup_{\sigma \in Z} \bigcap_n (E_{n\sigma(n)} \times B_{n\sigma(n)}) \quad .$$

Pour tout élément σ de Z (resp. s de Z_0), posons I_σ (resp. I_s) = $\emptyset$ ou F suivant que l'intersection $\bigcap_n E_{n\sigma(n)}$ (resp. $\bigcap_{n \leq |s|} E_{ns(n)}$) est vide ou non. Le pavage $\mathcal{E}$ étant compact,

$$(I_\sigma = \emptyset) \iff (\exists \ s \prec \sigma : \ I_s = \emptyset) \quad .$$

Posons alors, pour tout $s \in Z_0$, de longueur n :

$$H_s = B_{ns(n)} \cap I_s \quad .$$

Le noyau du système déterminant (H_s) est égal à A .

2° <u>Tout ensemble souslinien est analytique</u>.

Soit A le noyau d'un système déterminant (H_s) . Soit $\bar{\mathbb{N}}$ le compactifié d'Alexandrov de l'espace discret $\mathbb{N}$, et soit $(E , \mathcal{E})$ l'espace compact $\bar{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$, muni du pavage (semi-compact) constitué par ses parties fermées. Pour tout élément s de Z_0 , soit Z_s l'ensemble des suites infinies d'entiers qui commencent par la suite s : on vérifiera aisément que Z_s est un $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ de E . Posons ensuite $G_s = Z_s \times H_s$; c'est un $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\sigma\delta}$. Pour tout entier p , soit J_p la réunion

$$\bigcup_{|s|=p} G_s \quad ;$$

soit enfin B l'intersection des J_p . B est un ensemble $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$-analytique, sa projection sur F est donc analytique, et on vérifie aisément que cette projection est égale à A .

II. Le théorème de capacitabilité

DÉFINITION 3. - *Soit $\mathfrak{F}$ un pavage d'un ensemble F, stable pour les opérations de réunion et d'intersection finies. On appelle capacité sur F (sur $(F, \mathfrak{F})$, s'il peut y avoir ambiguité) une fonction I, définie sur $\mathfrak{P}(F)$, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, qui possède les propriétés suivantes :*

1° I *est croissante.*

2° *Pour toute suite croissante (A_n) de parties de F, on a :*

$$I(\bigcup_n A_n) = \sup_n I(A_n) \quad .$$

3° *Pour toute suite décroissante (B_n) d'éléments de $\mathfrak{F}$, on a :*

$$I(\bigcap_n B_n) = \inf_n I(B_n) \quad .$$

Une partie A de F est dite capacitable si l'on a l'égalité :

$$I(A) = \sup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathfrak{F}_\delta}} I(B) \quad .$$

THÉORÈME 6. - *Tout ensemble $\mathfrak{F}$-analytique est capacitable.*

La démonstration de ce théorème est identique à la démonstration classique de CHOQUET, telle qu'elle est exposée dans BRELOT [2] ou dans BOURBAKI [1], par exemple.

THÉORÈME 7. - *Soit $\mathfrak{F}$ un pavage d'un ensemble F, stable pour les opérations de réunion et d'intersection finies. Soit I une fonction d'ensemble définie sur $\mathfrak{F}$, positive, croissante, fortement sous-additive. Posons, pour tout* $A \in \mathfrak{F}_\sigma$:

$$I^*(A) = \sup_{\substack{B \in \mathfrak{F} \\ B \subset A}} I(B)$$

puis, pour toute partie C de F :

$$I^*(C) = \inf_{\substack{A \in \mathfrak{F}_\sigma \\ A \supset C}} I^*(A) \quad .$$

Pour que I^* soit une capacité fortement sous-additive, il faut et il suffit que I vérifie les deux conditions suivantes :

1° Pour toute suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{F}$, dont la réunion A appartient à $\mathcal{F}$, on a

$$I(A) = \sup_n I(A_n) \quad .$$

2° Pour toute suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{F}$, on a :

$$I^*(\bigcap_n A_n) = \inf_n I(A_n) \quad .$$

III. Application aux processus stochastiques.

1. Définition des processus stochastiques.

On considère un espace probabilisé $(\Omega , \mathcal{F} , P)$; la loi P est supposée complète, ce qui signifie que toute partie A de Ω qui est contenue dans une partie mesurable et P-négligeable, est elle-même mesurable (et P-négligeable).

Un processus stochastique est une fonction $(t , \omega) \to X(t , \omega)$, définie sur l'ensemble produit $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, à valeurs dans un espace mesurable E, qui possède la propriété suivante :

pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, l'application partielle $\omega \to X(t , \omega)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Nous désignerons cette application par X_t, de sorte que nous écrirons indifféremment $X(t , \omega)$ ou $X_t(\omega)$, et que nous parlerons indifféremment du processus X ou du processus (X_t).

Nous nous bornerons ici au cas des processus stochastiques pour lesquels l'espace d'états E est la droite réelle $\mathbb{R}$ (ou parfois la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$). La théorie que nous présentons ici s'étend facilement aux processus à valeurs dans un espace localement compact à base dénombrable.

Nous dirons que deux processus stochastiques X et Y (définis sur le même espace probabilisé) sont des modifications l'un de l'autre si l'on a, pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$:

$$P\{X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = 0 \quad .$$

Un processus X est dit mesurable si la fonction $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ est mesurable, lorsque $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$ est muni de la tribu produit naturelle.

2. Temps d'arrêt.

On est amené la plupart du temps à introduire une structure supplémentaire sur l'ensemble Ω, de la manière suivante : on se donne une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F}_t)_{t \in \underset{\sim}{R}_+}$; il est commode de supposer que cette famille est continue à droite (on a $\bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_s$ pour tout $s \in \underset{\sim}{R}_+$), et que la tribu $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles P-négligeables. On dit alors qu'un processus (X_t) est adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$ si la variable aléatoire X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, pour tout $t \in \underset{\sim}{R}_+$.

On appelle temps d'arrêt toute variable aléatoire T définie sur Ω, à valeurs positives finies ou non, telle que l'on ait :

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout} \quad t \in \underset{\sim}{R}_+ \quad .$$

On peut associer à chaque temps d'arrêt T une tribu $\mathcal{F}_T$, composée des ensembles $A \in \mathcal{F}$ tels que l'on ait :

$$A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{pour tout} \quad t \in \underset{\sim}{R}_+ \quad .$$

La continuité à droite de la famille $(\mathcal{F}_t)$ permet d'ailleurs, si on le désire, de remplacer le signe $<$ par $\leq$ dans les deux définitions précédentes. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Soient X un processus stochastique, T un temps d'arrêt ; nous désignerons par X_T la fonction sur Ω, égale à $X(T(\omega), \omega)$ sur l'ensemble $\{T < \infty\}$, à 0 sur l'ensemble $\{T = \infty\}$.

3. Définition de divers pavages sur $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$.

Soit s un nombre ≥ 0. Nous désignerons par $\mathcal{B}_s$ la tribu borélienne de l'intervalle $[0, s]$. Nous dirons qu'un processus stochastique X possède la propriété (MA) si :

pour tout $s \geq 0$, l'application $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ de $[0, s] \times \Omega$ dans $\underset{\sim}{R}$ est $(\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s)$-mesurable.

Nous dirons qu'une partie A de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$ possède la propriété (MA) si son indicatrice ($I_A(t, \omega) = 1$ ou 0 suivant que (t, ω) appartient ou non à A) la possède ; les parties qui possèdent la propriété (MA) forment une tribu sur $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$, pour laquelle les fonctions mesurables sont les processus qui possèdent (MA).

Soient S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Nous leur associerons des "intervalles stochastiques" :

$$[S, T[= \{(t, \omega) : S(\omega) \leq t < T(\omega)\} .$$

On définit de même des intervalles $[S, T]$, etc. Nous désignerons par $\mathfrak{J}$ le pavage sur $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$ constitué par les intervalles stochastiques de la forme $[S, T[$. Nous dirons qu'un processus stochastique X est bien mesurable s'il est mesurable relativement à la tribu $\mathcal{C}(\mathfrak{J})$ engendrée par $\mathfrak{J}$.

Tout intervalle $[S, T[$ possédant la propriété (MA), tout processus bien mesurable la possède aussi.

Soit T un temps d'arrêt ; pour chaque suite (S_n) de temps d'arrêt inférieurs à T, considérons l'ensemble :

$$J[(S_n)] = \{\omega : S_n(\omega) < T(\omega), \forall n \in \underset{\sim}{N}, \lim_n S_n(\omega) = T(\omega)\} .$$

Soit J la réunion essentielle de tous ces ensembles, pour toutes les suites (S_n) ; si l'on a $J = \{T > 0\}$, nous dirons que le temps d'arrêt T est presque approchable (nous réserverons le mot "approchable" au cas où il existe une seule suite de temps d'arrêt $S_n \leq T$, telle que $J(S_n) = \{T > 0\}$).

Nous désignerons par $\mathfrak{J}'$ le pavage sur $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$ constitué par les intervalles stochastiques $[S, T]$ qui possèdent les propriétés suivantes :

1° $T(\omega) < \infty$ pour tout ω tel que $S(\omega) < \infty$,

2° Le temps d'arrêt S est presque approchable.

Voici quelques propriétés de ces pavages :

THÉORÈME 8. - Soient X un processus qui possède la propriété (MA), T un temps d'arrêt ; la fonction X_T est alors une variable aléatoire $\mathfrak{F}_T$-mesurable.

<u>Démonstration</u>. - Soit s un nombre $\geqslant 0$; l'application $\omega \to (\inf(T(\omega), s), \omega)$ de Ω dans $[0, s] \times \Omega$ est mesurable lorsque le premier ensemble est muni de la tribu $\mathcal{F}_s$, et le second de la tribu $\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s$. On obtient alors le résultat en composant cette application avec l'application $(t, \omega) \to X(t, \omega)$, définie sur le second ensemble, et en revenant à la définition de $\mathcal{F}_T$.

On appelle "trajectoires" d'un processus les applications $t \to X(t, \omega)$.

THÉORÈME 9. - <u>Tout processus</u> X <u>dont les trajectoires sont continues à droite est bien mesurable</u>.

<u>Démonstration</u>. - Nous commencerons par remarquer que X_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable pour tout temps d'arrêt T. Pour l'établir, on approchera T par les temps d'arrêt :

$$T_n(\omega) = \inf\{t : t \in D_n, t > T(\omega)\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

où D_n désigne l'ensemble des nombres de la forme $k/2^n$ $(k \in \mathbb{N})$; on utilisera la mesurabilité de X_{T_n} par rapport à $\mathcal{F}_{T_n}$ (immédiate, du fait que T_n ne prend qu'une infinité dénombrable de valeurs), et la relation

$$\mathcal{F}_T = \bigcap_n \mathcal{F}_{T_n} \quad ,$$

qui résulte de la continuité à droite de la famille $(\mathcal{F}_t)$.

Ceci étant établi, on construit des temps d'arrêt S_n, par récurrence, de la manière suivante :

$$S_0(\omega) = 0$$

$$S_{n+1}(\omega) = \inf\{t : t > S_n(\omega), |X_t(\omega) - X_{S_n}(\omega)| > \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0) \quad .$$

La vérification de la mesurabilité des S_n est immédiate, par récurrence, grâce à la continuité à droite des trajectoires. On considère alors le processus :

$$Y(t, \omega) = \sum_n X_{S_n}(\omega) . I_{\{S_n \leq t < S_{n+1}\}} \quad .$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, le processus Y converge vers X. Posons :

$$T_{kn}(\omega) = S_n(\omega) \quad \text{si l'on a} \quad k\varepsilon \leq X_{S_n}(\omega) < (k+1)\,\varepsilon$$
$$= \infty \quad \text{dans le cas contraire} \quad .$$

Le processus X est limite des processus bien mesurables :

$$\sum_{k,n} k\varepsilon \cdot I_{\{T_{kn} \leq t < S_{n+1}\}} \quad .$$

Ce théorème entraîne le résultat suivant : la tribu des ensembles bien mesurables est engendrée par les processus à trajectoires continues à droite, ou encore par les processus dont les trajectoires sont bornées, continues à droite et pourvues de limites à gauche (l'indicatrice d'un intervalle stochastique $[S , T[$ est un processus de ce type).

5. Mesurabilité des temps d'entrée.

La première application de la théorie des capacités aux processus a été donnée par HUNT. La généralisation suivante du résultat de Hunt est due à BLACKWELL et FREEDMAN (sous une forme un peu différente de celle que nous donnons ici).

Soit A une partie quelconque de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$; nous désignerons par D_A ("début" de A) la fonction définie sur Ω par

$$D_A(\omega) = \inf\{t : (t , \omega) \in A\} \quad .$$

THÉORÈME 10. - Si A est une partie mesurable de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$, D_A est une variable aléatoire ; si A possède la propriété (MA) , D_A est un temps d'arrêt.

Démonstration. - Nous nous bornerons à établir la seconde assertion. Considérons l'ensemble $\{D_A \leq s\}$; c'est la projection sur Ω de l'ensemble $([0 , s] \times \Omega) \cap A$. Or cet ensemble est $(\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s)$-mesurable (il nous suffirait qu'il fût $(\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s)$-analytique) ; sa projection est donc $\mathcal{F}_s$-analytique, donc capacitable pour la mesure extérieure associée à P (considérée comme loi de probabilité sur $\mathcal{F}_s$). La tribu $\mathcal{F}_s$ étant complète, le théorème est établi.

Considérons en particulier une partie analytique B de la droite réelle. Si le processus X possède la propriété (MA) , l'intersection

$$([0 , s] \times \Omega) \cap X^{-1}(B)$$

est $(\mathcal{B}_s \times \mathcal{F}_s)$-analytique, de sorte que l'on peut appliquer le théorème précédent. La variable aléatoire :

$$T_B(\omega) = \inf\{t : X_t(\omega) \in B\}$$

est appelée le temps d'entrée de X dans l'ensemble B.

6. Existence de diverses modifications.

Désignons par $M(\Omega)$ l'ensemble des (classes de) variables aléatoires à valeurs réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, muni de la distance suivante :

$$d(f, g) = \sum_n \frac{1}{2^n} P\{|f - g| > \frac{1}{n}\}$$

qui définit la topologie de la convergence en mesure. Il est bien connu que toute suite de variables aléatoires (f_n), telle que la série $\sum d(f_n, f_{n+1})$ converge, converge en mesure et presque partout.

Une application de $\underset{\sim}{R}_+$ dans $M(\Omega)$ sera dite mesurable si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées mesurables, ou encore, si elle prend ses valeurs dans une partie séparable de $M(\Omega)$ et si l'image réciproque de toute boule ouverte de $M(\Omega)$ est mesurable dans $\underset{\sim}{R}_+$.

Le théorème suivant est dû à DOOB (non publié). Nous ne le démontrerons pas en détails ici.

THÉORÈME 11. - Soit X un processus stochastique adapté aux tribus $(\mathcal{F}_t)$; pour qu'il existe une modification de X qui possède la propriété (MA), il faut et il suffit que l'application $t \to X_t$ de $\underset{\sim}{R}_+$ dans $M(\Omega)$ soit mesurable.

(La mesurabilité de l'application $t \to X_t$ est vraie pour tout processus mesurable X, non nécessairement adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$; pour établir la réciproque, on construit des processus (X_t^n) qui possèdent les propriétés suivantes :

$$X_t^n = X_{k/n}^n \quad \text{pour} \quad t \in [k/n, (k+1)/n[\qquad (k \in \underset{\sim}{N})$$

$$d(X_t, X_t^n) \leq 1/2^n \quad \text{pour tout} \quad t$$

$$X_{k/n}^n \quad \text{est} \quad \mathcal{F}_{(k+1)/n}\text{-mesurable pour tout} \quad k \in \underset{\sim}{N} \quad .$$

On pose alors $Y(t, \omega) = \lim_n X^n(t, \omega)$ là où cette limite existe, $= 0$ là où elle n'existe pas ; le processus Y est la modification cherchée.)

THÉORÈME 12.

a. Soit X un processus stochastique mesurable, borné en module par une constante. Il existe un processus stochastique Y, bien mesurable, tel que l'on ait pour tout temps d'arrêt T :

$$Y_T = E[X_T \mid \mathcal{F}_T] \quad \text{p. s.} \quad .$$

b. Soit X un processus stochastique qui possède la propriété (MA) (ou tel, plus généralement, que X_T soit $\mathcal{F}_T$-mesurable pour tout temps d'arrêt T) ; il existe un processus bien-mesurable Y tel que l'on ait pour tout temps d'arrêt T :

$$Y_T = X_T \quad \text{p. s.} \quad .$$

Démonstration. - Nous nous bornerons à établir la première assertion, car la seconde s'en déduit très facilement. Soit M l'espace vectoriel constitué par les processus mesurables bornés qui vérifient (a) ; il est clair que cet espace est stable pour les passages à la limite le long de suites monotones, uniformément bornées en module. Pour montrer que M contient tous les processus mesurables bornés, il suffit de montrer qu'il contient les processus de la forme :

$$X(t, \omega) = a(t).Z(\omega)$$

où $a(t)$ est la fonction indicatrice d'un intervalle de $\underset{\sim}{R}_+$, et $Z(\omega)$ désigne une variable aléatoire bornée. Soit alors (Z_t) une version continue à droite de la martingale $(E[Z \mid \mathcal{F}_t])$; il nous suffit de prendre :

$$Y(t, \omega) = a(t).Y_t(\omega) \quad .$$

Nous allons étudier maintenant une autre modification remarquable. Nous aurons besoin de quelques remarques sur les temps d'arrêt. Si T est un temps d'arrêt, et si A est un élément de $\mathcal{F}_T$, nous désignons par T_A le temps d'arrêt défini par :

$$T_A(\omega) = T(\omega) \quad \text{pour} \quad \omega \in A \;; \qquad T_A(\omega) = \infty \quad \text{pour} \quad \omega \notin A \quad .$$

Il existe un élément A de $\mathcal{F}_T$ tel que T_A soit presque-approchable, et que l'on ait pour tout temps d'arrêt presque-approchable S :

$$P\{S(\omega) = T(\omega) < \infty \, , \quad \omega \notin A\} = 0 \quad .$$

Il suffit pour le voir de choisir pour A la réunion essentielle des ensembles $J[(S_n)]$ qui ont été définis au n° 3 ci-dessus. Le temps d'arrêt T_A ainsi construit sera désigné par T_a ("partie presque-approchable de T") dans la suite, tandis que le temps d'arrêt $T_{\Omega - A}$ sera désigné par T_i ("partie totalement inaccessible de T").

Pour tout temps d'arrêt T, nous désignerons par $[T]$ l'ensemble

$$\{(t \, , \, \omega) \; : \; t = T(\omega)\} \qquad \text{(le graphe de } T\text{)}$$

et nous remarquerons que, si T est presque-approchable, l'ensemble $[T]$ est $\mathcal{J}'$-analytique, ainsi que son complémentaire.

THÉORÈME 13. - Soit X un processus bien mesurable ; il existe un processus bien mesurable X' qui possède les propriétés suivantes :

1° Pour toute partie analytique B de la droite, l'ensemble $X'^{-1}(B)$ est $\mathcal{J}'$-analytique.

2° On a $X_T = X'_T$ p. s. pour tout temps d'arrêt presque-approchable T.

3° Il existe une suite de temps d'arrêt R_n tels que l'on ait :

$$\{(t \, , \, \omega) \; : \; X(t \, , \, \omega) \neq X'(t \, , \, \omega)\} = \bigcup_n \, [R_n] \quad .$$

Démonstration. - Soit E l'espace compact $[0 \, , \, 1]^{\underset{\sim}{N}}$. Le processus X étant bien mesurable, il existe un processus Z à valeurs dans E, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche (y compris une limite à gauche au point à l'infini), adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)$, et une fonction numérique mesurable f définie sur E, telle que l'on ait

$$X(t \, , \, \omega) = f \circ Z(t \, , \, \omega) \quad .$$

Nous désignerons par Z^0 le processus obtenu en rendant Z continu à gauche :

$$Z_t^0(\omega) = Z_{t-}(\omega) \quad .$$

Commençons par établir que l'ensemble $(Z^0)^{-1}(B)$ est $\mathfrak{J}'$-analytique, pour toute partie analytique B de E. Il suffit de le montrer dans le cas où l'ensemble envisagé est un ouvert U. Désignons par (U_p) une suite croissante d'ouverts, telle que $U = \bigcup_p \overline{U}_p$.

Posons :

$$H_{knp} = \{(t , \omega) : t \in [\frac{k}{2^n} , \frac{k+1}{2^n}] , \; Z^0_{k/2^n}(\omega) \in U_p\}$$

$$H_{np} = \bigcup_k H_{knp}$$

$$H_p = \liminf_n H_n$$

$$H = \bigcup_p H_p \quad .$$

On a évidemment $H = (Z^0)^{-1}(U)$. Il nous suffit donc de montrer que l'on a $H_{knp} \in \mathfrak{J}'$. Or posons :

$$T_{knp}(\omega) = k/2^n \text{ lorsque } Z^0_{k/2^n}(\omega) \text{ appartient à } U_p$$
$$= \infty \text{ dans le cas contraire} \quad .$$

On a

$$H_{knp} = [T_{knp} , T_{knp} + 1/2^n] \quad ;$$

de sorte qu'il suffit d'établir que T_{knp} est presque-approchable. Or soit (t_j) une suite strictement croissante, qui converge vers $k/2^n$. Considérons les temps d'arrêt suivants :

$$S_j(\omega) = t_j \text{ si } Z^0_{t_j}(\omega) \in U_p$$
$$= k/2^n \text{ si } Z^0_{t_j}(\omega) \notin U_p , \text{ mais } Z^0_{k/2^n}(\omega) \in U_p$$
$$= j + k/2^n \text{ si } Z^0_{t_j}(\omega) \notin U_p , \; Z^0_{k/2^n}(\omega) \notin U_p \quad .$$

On a évidemment $S_j \leq T_{knp}$,

$$\lim_j S_j = T_{kmp} \quad \text{et} \quad S_j(\omega) < T_{kmp}(\omega)$$

dès que j est suffisamment grand.

Nous allons alors modifier le processus Z^0 de la manière suivante. Soit (D^n) une suite de temps d'arrêt qui "porte" toutes les discontinuités de Z, en ce sens que :

$$\{(t, \omega) : Z_t(\omega) \neq Z_{t-}(\omega)\} = \bigcup_n [D^n]$$

(pour voir qu'il existe une telle suite, on pourra choisir une distance d compatible avec la topologie de E, et désigner, par $T_{n1}(\omega)$, $T_{n2}(\omega) \dots T_{nm}(\omega)$, le premier ... le m-ième instant t pour lequel on a

$$1/(n-1) > d(X_t(\omega), X_{t-}(\omega)) \geq 1/n \qquad ;$$

il suffit ensuite de ranger ces temps d'arrêt T_{nm} en une suite).

Construisons alors les temps d'arrêt D^n_a (parties presque-approchables des D^n) et D^n_i, et posons :

$$\begin{aligned} Z'(t, \omega) &= Z(t, \omega) \quad \text{pour} \quad (t, \omega) \in \bigcup_n [D^n_a] \\ &= Z^0(t, \omega) \quad \text{pour} \quad (t, \omega) \notin \bigcup_n [D^n_a] \quad . \end{aligned}$$

Chaque ensemble $[D^n_a]$ étant $\mathcal{F}'$-analytique, ainsi que son complémentaire, l'ensemble $Z'^{-1}(B)$ est encore analytique pour toute partie analytique B de E ; il est clair que l'on a $Z_S = Z'_S$ pour tout temps d'arrêt presque approchable S, et que l'ensemble $\{(t, \omega) : Z(t, \omega) \neq Z'(t, \omega)\}$ est égal à la réunion des $[D^n_i]$.

Pour obtenir la modification X' cherchée, il suffit maintenant de poser :

$$X'(t, \omega) = f \circ Z'(t, \omega) \quad .$$

La seule assertion qui demande alors une vérification est alors (3) : il suffit de poser :

$$\begin{aligned} R_n(\omega) &= D^n_i(\omega) \quad \text{si} \quad X_{D^n_i}(\omega) \quad \text{est différent de} \quad X'_{D^n_i}(\omega) \\ &= \infty \quad \text{dans le cas contraire} \end{aligned}$$

et de remarquer que les R_n sont des temps d'arrêt.

7. Sections des ensembles bien mesurables.

THÉORÈME 14. - Soit A une partie bien mesurable de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$, et soit C le sous-ensemble de Ω :

$$C = \{\omega : \exists\ t : (t, \omega) \in A\} \qquad \text{(projection de } A \text{ sur } \Omega) \quad .$$

Il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un temps d'arrêt T tel que :

$$\{T < \infty\} \subset C \qquad P\{T(\omega) < \infty\} \geq P(C) - \varepsilon$$

$$(T(\omega), \omega) \in A \text{ pour tout } \omega \text{ tel que } T(\omega) < \infty \quad .$$

Démonstration. - Nous pouvons associer à A, en vertu du théorème précédent, une partie bien mesurable A' et des temps d'arrêt R_n tels que l'on ait :

$$A' \in \mathcal{A}(\mathfrak{J}')$$

$$A \,\Delta\, A' = \bigcup_n [R_n] \quad (\Delta \text{ désignant la différence symétrique})$$

$$(S(\omega), \omega) \in A \iff (S(\omega), \omega) \in A' \quad \text{p. s.}$$

pour tout temps d'arrêt presque-approchable S.

Posons

$$R'_n(\omega) = R_n(\omega) \quad \text{si} \quad (R_n(\omega), \omega) \in A, \quad (R_n(\omega), \omega) \notin A'$$

$$= \infty \quad \text{dans le cas contraire} \quad ;$$

posons aussi :

$$S'_n(\omega) = \inf(R'_1(\omega) \ldots R'_n(\omega))$$

et choisissons k assez grand pour que l'on ait :

$$P\{\inf_n S'_n < \infty, \quad S_k = \infty\} < \varepsilon/2 \quad .$$

D'autre part, désignons par $\mathfrak{J}''$ le pavage $\mathfrak{J}'_{f\delta}$, et par Φ la fonction qui associe à toute partie H de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$ la mesure extérieure de sa projection sur Ω ; la fonction Φ est une capacité relativement à $\mathfrak{J}''$. L'ensemble A', étant $\mathfrak{J}'$-analytique, contient un élément A'' de $\mathfrak{J}''$ tel que $\Phi(A'') \geqslant \Phi(A') - \varepsilon/2$; soit S le "début" de A'' : c'est un temps d'arrêt presque-approchable, et l'on a $(S(\omega), \omega) \in A''$, donc $\in A'$. Étant donné que S est presque-approchable, on a aussi $(S(\omega), \omega) \in A$. Pour obtenir le temps d'arrêt T cherché, il suffit de prendre :

$$T = \inf(S, S'_k) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chapitre 9 : Utilisation des nombres réels en topologie générale, 2e édition. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Eléments de Mathématique, 8).

[2] BRELOT (Marcel). - Eléments de la théorie classique du potentiel. - Paris, Centre de Documentation universitaire, 1959 (Les Cours de Sorbonne. 3e cycle).

[3] CHOQUET (Gustave). - Forme abstraite du théorème de capacitabilité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 83-89.