SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

GUSTAVE CHOQUET

Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 12, p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A7_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 12

MESURES CONIQUES MAXIMALES
SUR LES CÔNES CONVEXES FAIBLEMENT COMPLETS

par Gustave CHOQUET

Nous allons étendre aux cônes convexes saillants faiblement complets, éventuellement sans base, la théorie existant pour les convexes compacts. Cette extension sera possible grâce à l'utilisation des mesures coniques. Nous verrons que toute la théorie se fait sans utiliser à aucun instant la notion de génératrice extrémale ; il existe donc une dissociation complète entre les notions d'éléments extrémaux d'un cône, et de mesure maximale portée par ce cône.

On s'aperçoit donc après coup que la lourdeur des premiers exposés sur les représentations intégrales dans les ensembles convexes tenait à ce qu'on n'avait pas bien dissocié ces notions. Il n'apparaît plus maintenant exclu qu'il existe des cônes convexes faiblement complets sans éléments extrémaux, ceux-ci étant remplacés par un bord qui constitue une sorte de frontière diffuse, et qui s'identifie d'ailleurs à cette frontière dans le cas des cônes métrisables.

Nous terminerons par l'étude d'un schéma très général englobant le cas des cônes faiblement complets, et dans lequel les théorèmes 1 et 2 sont cependant encore valables.

Les démonstrations des théorèmes 2 et 3 et de la proposition 11 utilisent la même technique que celle utilisée récemment par MEYER [5] dans le cas des convexes compacts.

Notations. - Soient V un espace vectoriel topologique faible, X un cône convexe saillant faiblement complet contenu dans V. On désigne par V' le dual topologique de V. Soit S le cône des fonctions convexes sur X de la forme $f = \sup(\ell_1 , \ell_2 , \ldots , \ell_n)$ où $\ell_i \in V'$; alors l'espace vectoriel $(S - S)$ est engendré par $(S - S)_+$ et est réticulé pour l'ordre associé au cône $(S - S)_+$ (en vertu de la relation $V' = X^0 - X^0$; voir CHOQUET [2]).

DÉFINITION 1. - *On appelle* mesure conique *sur* X *toute forme linéaire* μ *sur* $(S - S)$ *telle que* $\mu(f) \geq 0$ *pour toute* $f \in (S - S)_+$.

Exemples.

1. Pour tout $x \in X$, on désignera par ε_x la mesure conique définie par $\varepsilon_x(f) = f(x)$. On appellera mesure discrète toute combinaison linéaire positive de telles mesures ε_x.

2. Si K est un compact de X et ν une mesure de Radon $\geqslant 0$ sur K, on définit une mesure conique μ en posant :

$$\mu(f) = \int f \, d\nu \quad \text{pour toute} \quad f \in (S - S) \quad .$$

On dit alors que μ est localisable sur K ; il n'est pas exact que toute mesure conique soit localisable. Nous n'étudierons pas ici le problème de la localisation des mesures coniques ; signalons seulement sans démonstration que lorsque X est limite projective d'une suite de cônes à base compacte, on peut toujours se ramener à l'étude des mesures localisables sur un chapeau de X, c'est-à-dire un convexe compact de complémentaire (dans X) convexe.

Lorsque X a une base compacte B, toute mesure conique sur X se localise de façon unique sur B.

PROPOSITION 2. - *Le cône M_+ des mesures coniques sur X, muni de la topologie faible associée à la forme bilinéaire $(\mu, f) \to \mu(f)$ est faiblement complet et complètement réticulé pour son ordre propre.*

C'est une conséquence immédiate du fait que $(S - S)$ est un espace de Riesz.

DÉFINITION 3. - *On appelle* résultante *d'une mesure conique μ sur X tout point r de X (s'il en existe), tel que $\mu(f) = f(x)$ pour toute $f \in V'$.*

PROPOSITION 4. - *Toute mesure conique μ a une résultante et une seule (notée $r(\mu)$).*

En effet, soit $\overline{V}$ le complété faible de V ; dans son dual $(\overline{V})'$, toute forme linéaire est continue ; on peut donc identifier les formes linéaires positives sur le polaire X^0 de X aux éléments du polaire X^{00} de X^0 ; comme $X^{00} = X$, la proposition est démontrée.

DÉFINITION 5. - *Pour toute fonction numérique f sur X, majorée par une $g \in V'$, on pose*

$$\hat{f} = (\inf \ell) \quad \text{pour les} \quad \ell \geqslant f \quad \text{sur} \quad X \text{, où} \quad \ell \in V' \quad .$$

Toute $\hat{f}$ est évidemment concave et s. c. s.

PROPOSITION 6. - <u>Pour toute</u> $f \in S$ <u>et tout</u> $x \in X$, <u>on a</u> :

(1) $\hat{f}(x) = \sup(\sum f(x_i))$ <u>pour les familles finies</u> (x_i) <u>de points de</u> X <u>telles que</u> $\sum x_i = x$.

(2) $\hat{f}(x) = \sup(\mu(f))$ <u>pour les</u> $\mu \in M_+$ <u>de résultante</u> x .

Démontrons (1) :

Supposons que $f = \sup(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ où $\ell_p \in V'$; et désignons par ℓ un élément de V' qui majore f .

Soit L_p (resp. L) l'ensemble des points de $X \times R$ qui sont en dessous du graphe de ℓ_p (resp. ℓ) ; L_p est un sous-cône convexe fermé de L . Donc l'enveloppe convexe des L_p , qui n'est autre que $\sum L_p$, est fermée (CHOQUET [2]). Donc $(\sum L_p)$ est identique à l'ensemble des points de $X \times R$ en dessous du graphe de $\hat{f}$, d'où la relation cherchée. Le raisonnement montre même que l'égalité $\hat{f}(x) = \sum f(x_i)$ est réalisée pour une famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ telle que $\sum x_p = x$ et $f(x_p) = \ell_p(x_p)$ pour tout p .

Démontrons (2) :

Pour toute $\mu \in M_+$ de résultante x , et toute $\ell \in V'$ telle que $\ell \geq f$, on a $\mu(f) \leq \mu(\ell) = \ell(x)$. Comme $\ell(x)$ est arbitrairement voisin de $\hat{f}(x)$, on a $\mu(f) \leq \hat{f}(x)$. L'égalité cherchée résulte donc de la première relation puisque celle-ci peut s'écrire :

$$\hat{f}(x) = \sup(\mu(f)) \quad \text{pour les } \mu \text{ discrètes de résultante } x \quad .$$

Autres propriétés (évidentes) : l'application $f \to \hat{f}$ est croissante et sous-linéaire.

1. Ordre sur M_+ et mesures maximales.

Nous définissons sur M_+ une relation notée $\prec$ en posant : $(\mu \prec \nu)$ si $\mu(f) \leq \nu(f)$ pour toute $f \in S$. Il est immédiat que cette relation est une relation d'ordre. Comme $(f \in V') \implies (-f \in V')$, la relation $\mu \prec \nu$ entraîne $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute $f \in V'$; autrement dit μ et ν ont même résultante.

<u>Exemple</u>. - <u>Pour toute</u> μ <u>de résultante</u> x , <u>on a</u>

$$\varepsilon_x \prec \mu \quad .$$

En effet, si $f \in S$, on a $f = \sup(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$, où $\ell_p \in V'$. On peut supposer que $f(x) = \ell_1(x)$. Or $\ell_1 \leqslant f$, d'où :

$$\mu(\ell_1) \leqslant \mu(f) \quad ,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\ell_1(x) = f(x) = \varepsilon_x(f) \leqslant \mu(f) \quad .$$

THÉORÈME 1. - Toute $\mu \in M_+$ est majorée, au sens de l'ordre $\prec$ par une mesure maximale.

En effet l'ordre de M_+ est compatible avec sa topologie, c'est-à-dire que si $\mu_i \to \mu$ et $\nu_i \to \nu$, avec $\mu_i \prec \nu_i$, on a $\mu \prec \nu$. D'autre part, l'ensemble A_x des mesures ν de résultante x est un convexe compact. La convexité est évidente ; d'autre part, pour toute $f \in S$, il existe ℓ_1, $\ell_2 \in V'$ telles que $\ell_1 \leqslant f \leqslant \ell_2$, d'où :

$$\nu(\ell_1) \leqslant \nu(f) \leqslant \nu(\ell_2) \quad ,$$

donc

$$\nu(f) \in [\ell_1(x) \ , \ell_2(x)] \quad .$$

Tout ultrafiltre sur A_x converge donc vers une forme linéaire ; on vérifie aussitôt qu'elle appartient à A_x.

DÉFINITION 7. - Pour toute $f \in (S - S)$ et $\mu \in M_+$, on pose

$$\hat{\mu}(f) = \inf \mu(g) \quad \text{pour les} \quad g \in -S \quad \text{qui sont} \geqslant f \quad \text{sur} \quad X \, .$$

$$\check{\mu}(f) = \sup \mu(g) \quad \text{pour les} \quad g \in S \quad \text{qui sont} \leqslant f \quad \text{sur} \quad X \quad .$$

On a évidemment

$$\check{\mu}(f) \leqslant \mu(f) \leqslant \hat{\mu}(f) \quad \text{pour toute} \quad f \in (S - S)$$

et

$$\hat{\mu}(f) = \mu(f) \quad \text{pour toute} \quad f \in -S \quad .$$

PROPOSITION 8.

1. $\hat{\mu}(f)$ est une fonction sous-linéaire de f.
2. $(\mu \prec \nu) \implies \hat{\mu}(f) \geqslant \hat{\nu}(f)$ pour toute $f \in (S - S)$ (décroissance).

La sous-linéarité résulte de ce que si $g \geqslant f$ et $g' \geqslant f'$, on a $g + g' \geqslant f + f'$. Ensuite, pour toute $g \in - S$,

$$(\mu \prec \nu) \implies (\mu(g) \geqslant \nu(g)) \quad ;$$

donc en appliquant cette relation à toutes les $g \geqslant f$, on obtient

$$\hat{\mu}(f) \geqslant \hat{\nu}(f) \quad .$$

DÉFINITION 9. - On dit qu'une $\mu \in M_+$ est portée par le bord de X si, pour toute $f \in S$, on a

$$\hat{\mu}(f) = \mu(f) \quad .$$

Cette terminologie est justifiée par le fait qu'on appelle bord de X la famille des sous-ensembles $\{x : \hat{f}(x) = f(x)\}$ de X (où $f \in S$) et que, lorsque X est localement compact, on peut montrer que la condition $\hat{\mu}(f) = \mu(f)$ entraîne que μ est portée par $\{x : \hat{f}(x) = f(x)\}$ au sens classique.

THÉORÈME 2. - Soit $\mu \in M_+$.

$$(\mu \text{ est maximale}) \iff (\mu \text{ est portée par le bord de } X) \quad .$$

Démonstration. - Soit $\mu \in M_+$; comme l'application $f \to \hat{\mu}(f)$ de $(S - S)$ dans R est sous-linéaire, il existe sur $(S - S)$ d'après le théorème de Hahn-Banach, une forme linéaire ν telle que

$$\nu(f) \leqslant \hat{\mu}(f) \quad \text{pour toute} \quad f \in (S - S) \quad .$$

Si $f \leqslant 0$, on a

$$\hat{\mu}(f) \leqslant 0 \quad ,$$

d'où

$$\nu(f) \leqslant 0 \quad .$$

On a donc

$$\nu \in M_+ \quad .$$

D'autre part si $f \in - S$, on a

$$\hat{\mu}(f) = \mu(f) \quad ,$$

donc

$$\nu(f) \leqslant \mu(f) \quad ;$$

autrement dit

$$\mu \prec \nu \quad .$$

a. Si nous supposons μ maximale, la relation $\mu \prec \nu$ entraîne $\mu = \nu$. Or, pour toute $f_0 \in (S - S)$, nous pouvions choisir ν (toujours Hahn-Banach) de sorte que

$$\nu(f_0) = \hat{\mu}(f_0) \quad .$$

Comme $\mu = \nu$, on a donc

$$\mu(f_0) = \hat{\mu}(f_0) \quad \text{pour toute} \quad f_0 \in (S - S) \quad .$$

b. Soient μ et $\nu \in M_+$, avec $\mu \prec \nu$; et soit $f \in S$. La proposition 8 montre que

$$\hat{\mu}(f) \geqslant \hat{\nu}(f) \quad . \tag{3}$$

On a d'autre part :

$$\mu(f) \leqslant \nu(f) \quad . \tag{4}$$

Supposons alors μ portée par le bord de X , ceci entraîne

$$\hat{\mu}(f) = \mu(f) \quad . \tag{5}$$

Les relations (3, 4, 5) entraînent $\mu(f) = \nu(f)$, d'où $\mu = \nu$; autrement dit μ est maximale.

PROPOSITION 10. - <u>L'ensemble</u> $\mathfrak{m}$ <u>des mesures maximales est un sous-cône convexe de</u> M_+ , <u>héréditaire à gauche et réticulé pour son ordre propre</u>.

Nous renvoyons pour la démonstration à la proposition 19, qui généralise la proposition 10.

<u>Remarque</u>. Nous avons démontré, au cours de la démonstration du théorème 2, que si μ est maximale, on a

$$\mu(f) = \hat{\mu}(f) \quad \text{pour toute} \quad f \in (S - S) \quad .$$

(On a évidemment aussi $\mu(f) = \check{\mu}(f)$.)

Il résulte de là que si μ est maximale, $\hat{\mu}$ est une forme linéaire sur $(S - S)$.

Inversement, si μ est une mesure telle que $\hat{\mu}$ soit linéaire sur $(S - S)$,

$$(\nu \leqslant \hat{\mu}) \implies (\nu = \hat{\mu}) \quad ,$$

d'où

$$\nu(f) = \mu(f) \quad \text{sur} \quad (-S) \quad ,$$

donc

$$\nu = \mu \quad ;$$

autrement dit μ est extrémale.

Il est probable d'ailleurs qu'il suffirait de supposer $\hat{\mu}$ linéaire sur S .

THÉORÈME 3. - Les énoncés suivants sont équivalents.

1. X est réticulé pour son ordre propre.
2. L'application $f \to \hat{f}$ est positivement linéaire sur S .
3. Tout point x de X est résultante d'une mesure unique μ_x .

On va montrer que $1 \implies 2 \implies 3 \implies 1$.

$(1 \implies 2)$. - On sait déjà que $\widehat{f + g} \leqslant \hat{f} + \hat{g}$; il suffit de montrer la relation inverse.

Or, soit $x \in X$; soient $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ deux familles finies d'éléments de X telles que $\sum x_i = \sum y_j = x$. Comme X est réticulé, il existe une famille $(z_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ d'éléments de X telle que

$$x_i = \sum_j z_{ij} \quad , \qquad y_j = \sum_i z_{ij} \quad ,$$

d'où, si f et $g \in S$:

$$f(x_i) \leqslant \sum_j f(z_{ij}) \quad ; \qquad g(y_j) \leqslant \sum_i g(z_{ij}) \quad .$$

On a donc

$$\hat{f}(x) + \hat{g}(x) = \sup(\Sigma f(x_i)) + \sup(\Sigma f(y_j)) \leqslant \sup(\Sigma f(z_{ij}) + \Sigma g(z_{ij})) \leqslant \widehat{f + g}(x).$$

$(2 \implies 3)$. - Soit $x \in X$. La fonction $f \to \hat{f}(x)$ est par hypothèse linéaire sur S , donc se prolonge en une forme linéaire μ sur $(S - S)$, évidemment appartenant à M_+ .

Soit $\nu \in M_+$ telle que $r(\nu) = x$.

D'après la proposition 6, on a :

$$\nu(f) \leqslant \hat{f}(x) = \mu(f) \quad , \quad \text{d'où} \quad \nu \prec \mu \quad .$$

Autrement dit, μ est bien la seule mesure maximale de résultante x .

(3 $\Longrightarrow$ 1). - D'après le corollaire du théorème 2, le cône convexe A des mesures maximales est réticulé pour son ordre propre.

Or l'application linéaire $\mu \to r(\mu)$ est une surjection de A sur X . Par hypothèse c'est une injection ; c'est donc une bijection, donc X est réticulé.

Remarque. - Désignons par (4) l'énoncé suivant :

(4) Pour toute $f \in S$, la fonction $x \to \hat{f}(x)$ est positivement linéaire sur X .

On peut montrer directement que (1 $\Longrightarrow$ 4) et (3 $\Longrightarrow$ 4).

Par contre, alors que si X est à base compacte on montre aisément que (4 $\Longrightarrow$ 2 et 3), il ne semble pas aussi commode de le montrer dans le cas général (voir CHOQUET [4] et MEYER [5]).

Si cette difficulté était levée, le bon ordre de la démonstration serait 1 $\Longrightarrow$ 4 $\Longrightarrow$ 2 $\Longrightarrow$ 3 $\Longrightarrow$ 1.

PROPOSITION 11. - Lorsque X est réticulé, l'application $x \to \mu_x$ de X dans M_+ est faiblement de 1re classe.

En effet, si $f \in S$, l'application $x \to \mu_x(f) = \hat{f}(x)$ est s. c. s. Donc pour tout $f \in (S - S)$, l'application $x \to \mu_x(f)$ est différence de deux fonctions s. c. s.

2. Axiomatique de la théorie des mesures maximales.

Dans la théorie précédente, on n'a utilisé que très peu le fait que S désigne un cône de fonctions convexes sur un cône faiblement complet. Et de fait, nous allons voir qu'on peut axiomatiser ce que nous venons de faire et obtenir ainsi un cadre susceptible de s'appliquer à bien d'autres situations.

Les structures que nous allons étudier sont définies par un triplet (E , A , B) , où E est un espace vectoriel sur R , et A , B deux cônes convexes pointés contenus dans E . Deux telles structures (E , A , B) , (E' , A' , B') sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme vectoriel de E sur E' qui transforme A en A' , et B en B' .

Exemples.

1. Dans la théorie que nous venons de traiter, E est l'espace $(S - S)$, A le cône $(S - S)_+$, B le cône S.

2. Dans la théorie de E. BISHOP et K. de LEEUW, E est l'espace $\mathcal{C}(K)$ où K est un espace compact, $A = \mathcal{C}(K)_+$, B le cône de $\mathcal{C}(K)$ engendré par les f de la forme φ ou φ^2, avec φ dans un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K)$ qui sépare K et contient les constantes.

Enoncé des axiomes.

AXIOME 1. - $A + B = E$.

AXIOME 2.

a. A est saillant, engendre E, et l'espace E ordonné par A est réticulé (opérations $\smile$ et $\frown$).

b. Pour tous b_1, $b_2 \in B$, on a $(b_1 \smile b_2) \in B$.

AXIOME 3. - Si l'on pose $H = B \cap (-B)$, on a $A + H = E$.

Nous verrons que l'axiome 1 suffit pour établir les théorèmes essentiels.

Notations. - E^* est le dual algébrique de E, muni de la topologie faible associée à la forme bilinéaire $(x, y) \to y(x)$ sur $E \times E^*$; cet espace est faiblement complet.

Dans E^* on désigne par A^0 et B^0 les polaires [1] de A, B. Ce sont des cônes convexes fermés. Dire que A^0 (resp. B^0) est saillant équivaut à dire que A (resp. B) engendre E.

Les éléments de E^* seront appelés mesures et notés μ, ν, ..., les cônes A^0 et B^0 définissent sur E^* deux relations de pré-ordre notées respectivement $\leqslant$ et $\prec$.

Lorsque $\mu \prec \nu$ et $\nu \prec \mu$, on dira que μ et ν sont équivalentes, ce qui se notera $\mu \sim \nu$ (ceci revient à dire que $\mu(b) = \nu(b)$ pour tout $b \in B$).

On notera aussi par $\leqslant$ le pré-ordre sur E associé à A.

DÉFINITION 12. - On appelle mesure maximale (resp. maximale stricte) toute $\mu \in A^0$ telle que, pour toute $\nu \in A^0$ vérifiant $\mu \prec \nu$, on ait $\mu \sim \nu$ (resp. $\mu = \nu$).

[1] A^0 est l'ensemble des $y \in E^*$ tels que $y(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in A$.

Remarque 13. - Il est évident que si μ , $\nu \in A^0$ avec μ non maximale, $(\mu + \nu)$ n'est pas maximale. Il en résulte que si π est maximale, toute π' telle que $0 \leqslant \pi' \leqslant \pi$ est aussi maximale. Autrement dit l'ensemble $m(E , A , B)$ des mesures maximales est une partie de A^0 héréditaire à gauche.

Remarque 14. - Désignons par $m_s(E , A , B)$ l'ensemble des mesures maximales strictes. Alors il est évident que

$$(B_1 \subset B_2) \implies (m_s(E , A , B_1) \subset m_s(E , A , B_2)) \quad .$$

Par contre il est inexact qu'on ait une inclusion analogue en ce qui concerne $m(E , A , B)$.

Notons que lorsque toute $\mu \in A^0$ est caractérisée par sa restriction à B (par exemple si B engendre E), toute mesure maximale est maximale stricte.

LEMME 15. - $(A + B = E) \implies$ (Pour tout $\mu \in E^*$, le convexe $A^0 \cap (\mu + B^0)$ est compact).

En effet $A + B = E$ entraîne aussi $(- A - B) = E$; donc tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = a + b = - a' - b' \text{ , où } a , a' \in A \text{ et } b , b' \in B \quad ;$$

d'où

$$b \leqslant x \leqslant - b' \quad . \tag{7}$$

Si donc $\nu \in A^0 \cap (\mu + B^0)$, ce qui revient à dire que $\nu \geqslant 0$ et $\mu \prec \nu$, on a :

$$\mu(b) \leqslant \nu(b) \ ; \quad \nu(b) \leqslant \nu(x) \leqslant - \nu(b') \ ; \quad \nu(b') \leqslant - \mu(b')$$

d'où

$$\mu(b) \leqslant \nu(x) \leqslant - \mu(b') \quad .$$

Tout ultrafiltre sur $A^0 \cap (\mu + B^0)$ converge donc vers un élément de E^* ; comme cet ensemble est d'autre part fermé, il est compact.

Il serait intéressant de voir si la réciproque de cet énoncé est exacte.

THÉORÈME 1'. - Si l'axiome 1 est vérifié, toute $\mu \in A^0$ est majorée par une mesure maximale.

En effet le fait que B^0 soit fermé et que $A^0 \cap (\mu + B^0)$ soit compact entraîne que A^0 , pré-ordonné par $\prec$, soit inductif.

DÉFINITION 16. - Lorsque l'axiome 1 est vérifié on pose, pour tout $x \in E$ et toute $\mu \in A^0$:

$$\hat{\mu}(x) = \inf_{\substack{b \in B \\ x \leqslant -b}} \mu(-b) \; ; \qquad \check{\mu}(x) = \sup_{\substack{b \in B \\ b \leqslant x}} \mu(b) \quad .$$

La relation (7) utilisée pour le lemme 15 montre que cette définition a un sens.

On a évidemment :

$$\check{\mu} \leqslant \mu \leqslant \hat{\mu} \quad \text{et} \quad -\hat{\mu}(x) = \check{\mu}(-x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E \quad .$$

D'autre part

$$\hat{\mu}(x) = \mu(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in -B \quad .$$

PROPOSITION 17.

a. $\hat{\mu}$ est une fonction sous-linéaire.

b. $(\mu \prec \nu) \implies (\hat{\mu} \geqslant \hat{\nu})$.

La relation $\hat{\mu}(kx) = k\hat{\mu}(x)$ pour $k \geqslant 0$ est évidente ; et la sous-additivité résulte de ce que si $x \leqslant -b'$, $x' \leqslant -b'$, on a

$$x + x' \leqslant -(b + b') \quad .$$

Ensuite, pour tout $b \in B$,

$$(\mu \prec \nu) \implies (\mu(-b) \geqslant \nu(-b)) \quad ;$$

donc en appliquant cette relation à tous les $-b \geqslant x$, on trouve $\hat{\mu} \geqslant \hat{\nu}$.

De la même façon on montrerait que $\check{\mu}$ est sur-linéaire et que

$$(\mu \prec \nu) \implies (\hat{\mu} \geqslant \hat{\nu}) \quad .$$

THÉORÈME 2'. - Supposons l'axiome 1 vérifié, et soit $\mu \in A^0$.

1. (μ est maximale) $\iff$ ($\hat{\mu}(b) = \mu(b)$ pour tout $b \in B$).

2. Si μ est maximale stricte, on a $\hat{\mu}(x) = \mu(x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. - L'application $x \to \hat{\mu}(x)$ étant sous-linéaire, il existe d'après le théorème de Hahn-Banach une $\nu \in E^*$ telle que

$$\nu(x) \leqslant \hat{\mu}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E \; .$$

Si $x \in -A$, comme $0 \in -B$, on a

$$\hat{\mu}(x) \leqslant 0 \quad ,$$

donc aussi

$$\nu(x) \leqslant 0 \quad ;$$

autrement dit

$$\nu \in A^0 \quad .$$

D'autre part, si $x \in -B$, on a

$$\hat{\mu}(x) = \mu(x) \quad ,$$

donc

$$\nu(x) \leqslant \mu(x) \quad ,$$

autrement dit

$$\mu \prec \nu \quad .$$

a. Si μ est maximale, comme $\mu \prec \nu$, on a $\mu \sim \nu$, c'est-à-dire que

$$\mu(b) = \nu(b) \quad \text{pour tout} \quad b \in B \quad .$$

Or, toujours d'après Hahn-Banach, nous pouvions imposer à ν de satisfaire à :

$$\nu(x_0) = \hat{\mu}(x_0) \quad \text{où} \quad x_0 \quad \text{est donnée, mais quelconque} \in E \quad .$$

On a donc

$$\mu(b) = \hat{\mu}(b) \quad \text{pour tout} \quad b \in B \quad .$$

b. Si μ est maximale stricte, le même raisonnement montre que

$$\mu(x) = \hat{\mu}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in E \quad .$$

c. Supposons que $\mu = \hat{\mu}$ sur B .

Si $\mu \prec \nu$, on a $\mu \leqslant \nu$ sur B , et $\hat{\nu} \leqslant \hat{\mu}$.

D'où

$$\hat{\mu} = \mu \leqslant \nu \leqslant \hat{\nu} \leqslant \hat{\mu} \quad \text{sur} \quad B \quad ,$$

d'où

$$\mu = \nu \quad \text{sur} \quad B \quad .$$

Donc μ est maximale.

On a évidemment des énoncés analogues pour $\check{\mu}$.

COROLLAIRE 18. - Si μ est maximale stricte, on a $\check{\mu} = \mu = \hat{\mu}$; autrement dit, pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe b_1 , $b_2 \in B$ tels que

$$b_1 \leqslant x \leqslant - b_2 \qquad \text{et} \quad \mu(- b_2) - \mu(b_1) < \varepsilon \qquad .$$

PROPOSITION 19. - Lorsque les axiomes 1 et 2 sont satisfaits, l'ensemble m des mesures maximales est un sous-cône convexe de A^0 . Ce cône est héréditaire à gauche, et réticulé pour son ordre propre.

En effet, si μ_1 et μ_2 sont maximales, on a $\mu_1 = \hat{\mu}_1$ et $\mu_2 = \hat{\mu}_2$ sur B ; autrement dit, pour tout $b \in B$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe b_1 , $b_2 \in B$ tels que :

$$b \leqslant - b_i \quad \text{et} \quad \mu_i(- b_i) \leqslant \mu_i(b) + \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 \qquad .$$

D'après l'axiome 2, si l'on pose $b' = b_1 \smile b_2$, on a $b \leqslant - b' \leqslant - b_1$ et $- b_2$ d'où

$$\mu_i(- b') \leqslant \mu_i(b) + \varepsilon \quad (\text{pour} \quad i = 1 , 2) \qquad .$$

On a donc

$$(\mu_1 + \mu_2)(- b') \leqslant (\mu_1 + \mu_2)(b) + 2\varepsilon \qquad ;$$

d'où

$$\widehat{\mu_1 + \mu_2}(b) = (\mu_1 + \mu_2)(b) \qquad .$$

Donc $(\mu_1 + \mu_2)$ est maximale ; ceci montre que m est un cône convexe. Or m est héréditaire à gauche (remarque 13), donc si μ_1 , $\mu_2 \in m$, toute μ telle que $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1 + \mu_2$ est aussi extrémale.

Donc sur $A^0 \cap ((\mu_1 + \mu_2) - A^0)$, l'ordre de A^0 est identique à l'ordre associé au cône m .

Or d'après l'axiome 2, A^0 est réticulé pour son ordre propre ; donc m l'est aussi.

Cas d'unicité des mesures maximales. - Si l'on cherche à formuler un théorème d'unicité analogue au théorème 3, on doit d'abord chercher à associer à une structure (E , A , B) un ensemble qui jouera le rôle du cône X et, si c'est possible, définir la notion de résultante d'une $\mu \in A^0$.

Dans le cadre du théorème 3, tout point $x \in X$ peut être identifié : soit à un élément extrémal du cône A^0 , soit à un élément du dual algébrique de $B \cap (-B)$, soit à un élément de A^0 minimal pour la relation $\prec$.

Esquissons ici une étude basée sur la seconde identification :

Posons $H = B \cap (-B)$ et supposons vérifiés l'axiome 2, et l'axiome 3 évidemment plus fort que l'axiome 1.

Désignons par $(H^*)_+$ l'ensemble des formes linéaires sur H qui sont $\geqslant 0$ sur $(H \cap A)$; ce cône convexe jouera le rôle du cône X .

On appellera <u>résultante</u> d'une $\mu \in A^0$ l'élément de $(H^*)_+$ égal à la trace sur H de la forme linéaire μ .

D'après un théorème sur les prolongements de formes linéaires positives (par exemple CHOQUET [3]), tout $r \in (H^*)_+$ est résultante d'au moins une $\mu \in A^0$; on peut montrer, par une démonstration calquée sur celle du lemme 15, que l'ensemble des μ de A^0 ayant une résultante donnée r est un convexe compact, d'où des mesures maximales de résultante r .

D'après la proposition 19, si tout $r \in (H^*)_+$ est résultante d'une μ maximale unique, le cône $(H^*)_+$ est réticulé pour son ordre propre.

Nous n'aborderons pas la question de la réciproque de cet énoncé, ni le problème voisin consistant à caractériser les cas où toute $\mu \in A^0$ est majorée par une mesure maximale unique.

Il est probable que leurs solutions exigeraient des hypothèses supplémentaires, par exemple que pour tout $r \in (H^*)_+$, l'ensemble des $\mu \in A^0$ de résultante r , ait un élément minimal unique (pour la relation $\prec$).

<u>Exemples de structures</u> (E, A, B). - Nous avons donné déjà deux exemples :

Le <u>premier</u> exemple vérifie les axiomes 1, 2, 3.

Le <u>second</u> exemple ne vérifie pas l'axiome 2.

<u>Troisième exemple</u>. Plus généralement, soit X un cône convexe d'un e. v. t. V sur R , tel que toute forme linéaire continue sur V soit différence de deux formes linéaires continues positives sur X . E sera le plus petit espace vectoriel de fonctions numériques sur X , contenant les formes linéaires continues, et stable par l'opération $f \to |f|$; on prendra $A = E_+$, et B = ensemble des f convexes de E .

Les axiomes 1, 2, 3 sont vérifiés.

<u>Quatrième exemple</u>. Soient C un convexe compact d'un e. v. t. faible, K un espace compact. On prend $E = \mathcal{C}(K \times C)$, $A = E_+$, et B = ensemble des f de E qui, pour tout $x \in K$, sont concaves sur $x \times C$.

Ce schéma a été imaginé par MOKOBODZKI pour étudier la désintégration des mesures dans les espaces compacts (métrisables ou non).

On obtiendrait aussi des résultats intéressants en ramplaçant dans la définition de B le mot "concaves" par "convexes".

La théorie du potentiel et des fonctions surharmoniques fournit d'autres exemples intéressants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONSALL (F. F.). - On the representation of the points of a convex set, J. London math. Soc. (à paraître).

[2] CHOQUET (Gustave). - Ensembles et cônes convexes faiblement complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1908-1910 et 2123-2125.

[3] CHOQUET (Gustave). - Le problème des moments, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, t. 1, 1962, n° 4 , 10 pages.

[4] CHOQUET (Gustave). - Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P.-A. Meyer, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 6, 1962, n° 8, 13 pages.

[5] MEYER (Paul-André). - Sur les démonstrations nouvelles du théorème de Choquet, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 6, 1962, n° 7, 9 pages.

[6] MOKOBODZKI (Gabriel). - Quelques propriétés des fonctions numériques convexes (s. c. i. ou s. c. s.) sur un ensemble convexe compact, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 6, 1962, n° 9, 3 pages.