SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur les démonstrations nouvelles du théorème de Choquet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 7

1er juin 1962

SUR LES DÉMONSTRATIONS NOUVELLES DU THÉORÈME DE CHOQUET

par Paul-André MEYER

Les démonstrations du théorème d'existence de CHOQUET se sont multipliées ces dernières années, depuis l'article de BISHOP et DeLEEUW jusqu'aux démonstrations récentes d'HERVÉ et de BONSALL, qui ont atteint un degré de simplicité qu'il est sans doute difficile de dépasser. Nous avons repris ici les méthodes de ces auteurs, ainsi que des idées de BAUER, afin de présenter une démonstration unifiée des théorèmes d'existence et d'unicité. Notre première démonstration du théorème d'unicité a d'ailleurs été elle-même très améliorée par CHOQUET. Les méthodes présentées ci-dessous nous permettent aussi d'établir simplement, en même temps que le théorème de Choquet proprement dit, un important résultat démontré tout récemment par MOKOBODZKI.

Nous ne chercherons pas ici à nous placer dans les hypothèses, en apparence plus générales, de BISHOP et DeLEEUW. X désignerait alors un compact quelconque, H un sous-espace vectoriel de $C(X)$, contenant les constantes et séparant les points, et S le plus petit cône convexe fermé dans $C(X)$, contenant H, et stable pour l'opération de borne supérieure. (H et S sont les initiales respectivement de "harmonique" et "sous-harmonique".) Ces hypothèses n'exigeraient que des changements insignifiants dans les démonstrations ; CHOQUET a d'ailleurs montré que l'on peut toujours se ramener au cas que nous traitons ici.

1. Hypothèses et notations.

Soit X un espace topologique compact muni d'une structure affine telle que l'espace H des formes affines continues sur X sépare les points de X. Afin de faciliter l'application du théorème de Hahn-Banach, il sera commode de supposer X plongé dans un espace vectoriel topologique localement convexe E tel que H coïncide avec l'espace des restrictions à X des formes affines continues sur E ; cela est toujours possible.

Munissons H de la norme de la convergence uniforme : toute forme linéaire bornée m sur H est induite par une mesure sur X de même norme, μ. Si la forme m est positive, elle vérifie la relation $\|m\| = m(1)$; cette égalité est encore vraie pour μ, qui est donc positive. Nous ne considérerons plus désormais que des mesures positives.

Soit μ une telle mesure ; nous désignerons par $\tilde{\mu}$ sa restriction à H. Deux mesures μ et ν telles que $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$ seront dites équivalentes (notation : $\mu \sim \nu$).

Les fonctions convexes continues sur X constituent un cône, que nous désignerons par S. L'espace vectoriel $S - S$ est réticulé, contient les constantes, sépare les points de X : on déduit du théorème de Weierstrass-Stone qu'il est dense en norme dans $C(X)$.

Nous définissons maintenant, d'après BISHOP et DeLEEUW, une relation d'ordre sur $\mathcal{M}^+(X)$, notée $\prec$: $\mu \prec \nu \iff \tilde{\mu} = \tilde{\nu}$ et $\langle \mu , f \rangle \leq \langle \nu , f \rangle$ pour toute fonction f de S. Une mesure maximale pour cet ordre sera dite simplement "maximale".

2. Faces de X et points extrémaux.

DÉFINITION 1. - Nous dirons qu'une mesure μ est stable sur une partie compacte K de X si toute mesure ν telle que $\nu \sim \mu_K$ (trace de μ sur K) est portée par K.

DÉFINITION 2. - Nous appellerons face de X toute partie compacte non vide de X telle que :

pour tout $x \in K$, la masse unité ε_x est stable sur K.

DÉFINITION 3. - Un point x est dit extrémal si $\{x\}$ est une face.

Définitions équivalentes :

1° La classe d'équivalence de ε_x est réduite à ε_x.

2° La relation $x = \frac{y + z}{2}$, y et $z \in X$, entraîne les égalités $y = z = x$.

Nous appellerons frontière de X, et nous noterons ∂_X, l'ensemble des points extrémaux.

THÉORÈME 1 (d'après CHOQUET). - Si X est métrisable, la frontière est un G_δ.

Démonstration. - $X - \partial_X$ est l'image du complémentaire de la diagonale Δ de $X \times X$ par l'application $(x , y) \to (x + y)/2$ de $X \times X$ dans X ; si X est métrisable, le complémentaire de Δ est un K_σ, et il en est de même de son image.

THÉORÈME 2 ("principe du maximum de Bauer"). - Soit f une fonction concave semi-continue inférieurement (en abrégé sci). Si l'on a $f(x) \geq 0$ en tout point de ∂_X , on a $f \geq 0$ sur tout X .

Démonstration.

a. Il existe des faces (X est une face).

b. Toute intersection de faces est une face.

c. Toute face contient une face minimale (ZORN).

d. L'ensemble des points où une fonction concave sci atteint son minimum est une face.

e. Toute face minimale est un point extrémal.

Pour établir ce dernier résultat, montrons qu'une face F qui contient au moins deux points x et y n'est pas minimale. En effet, soit h une fonction de H qui sépare x et y ; l'ensemble des points de F , où h est égale à son minimum sur F , est une face de X qui ne peut contenir à la fois x et y , donc une face distincte de F .

Le théorème résulte immédiatement de ces assertions. On pourrait en déduire, comme BAUER, le théorème de Krein-Milman.

3. Enveloppes d'une fonction.

DÉFINITION 4. - Soit f une fonction bornée quelconque définie sur une partie de X contenant la frontière. Nous appellerons enveloppe supérieure de f (resp. inférieure) la fonction concave semi-continue supérieurement (en abrégé : scs) (respectivement la fonction convexe sci) définie sur tout X par :

$$\overline{f}(x) = \inf_{\substack{s \in -S \\ s \geq f \text{ sur } \partial_X}} s(x) \qquad (\text{resp. } \underline{f}(x) = \sup_{\substack{s \in S \\ s \leq f \text{ sur } \partial_X}} s(x)) .$$

Toute fonction concave scs étant l'enveloppe inférieure des fonctions affines continues qui la majorent, on peut remplacer " $s \in -S$ " par " $s \in H$ " ou par " s concave scs" dans la première définition. En particulier, si f est concave scs, on a $\overline{f} = f$. Le théorème 2 montre d'autre part que l'on a $\overline{f} \geq \underline{f}$.

THÉORÈME 3. - L'application $f \to \overline{f}$ possède les propriétés suivantes :

a. $f \leq g$ sur $\partial_X \Rightarrow \overline{f} \leq \overline{g}$; $\overline{f}$ est comprise entre les bornes de f sur ∂_X.

b. On a $\overline{f+g} \leq \overline{f} + \overline{g}$ et $\overline{(af)} = a\overline{f}$ (a constante positive).

c. Si f est définie sur X, convexe et scs, on a $\overline{f}(x) = \sup\limits_{\mu \sim \varepsilon_X} \int f(y)\, d\mu(y)$. En particulier, on a $\overline{f}(x) = f(x)$ en tout point-frontière.

Démonstration. - Tout ceci est évident, sauf le dernier point. Soit f' la fonction de x définie par l'expression (c) : on vérifie très facilement que f' est concave, scs, égale à f à la frontière. Toute forme h de H, qui majore f à la frontière, majore f partout (théorème 2), donc $\int h(y)\, d\mu(y)$ majore $\int f(y)\, d\mu(y)$, et h majore f'. On a donc $f \leq f' \leq \overline{f}$.

Mais, inversement, toute forme de h, qui majore f', majore f, donc $\overline{f}$, et il en résulte bien que l'on a $f' = \overline{f}$.

4. Propriétés des mesures maximales.

THÉORÈME 4 (BISHOP et DeLEEUW).

a. Toute mesure est majorée au sens de l'ordre $\prec$ par une mesure maximale.

b. Soit μ une mesure maximale. Toute mesure ν telle que $\nu \leq \mu$ est maximale.

Démonstration. - (a) est une conséquence immédiate du théorème de Zorn et du théorème de compacité vague. Dans le cas de (b), écrivons $\mu = \nu + \lambda$: si ν n'est pas maximale, il existe $\nu' \neq \nu$ telle que $\nu \prec \nu'$, et on a $\mu \prec \nu' + \lambda$; μ n'est donc pas maximale.

Le théorème suivant est le plus important de cet exposé. Il est dû à MOKOBODZKI, et la démonstration que nous en donnons utilise une méthode de BAUER et BONSALL.

THÉORÈME 5. - Pour qu'une mesure ν soit maximale, il faut et il suffit que l'on ait, pour toute fonction $f \in S$, la relation :

$$\langle \nu , f \rangle = \langle \nu , \overline{f} \rangle .$$

Démonstration. - Soit μ une mesure positive quelconque. Posons, pour toute fonction f de $C(X)$:

$$p_\mu(f) = \langle \mu , \overline{f} \rangle .$$

a. C'est une fonction sous-additive, positivement linéaire sur $C(X)$, qui coïncide avec μ sur H. D'après le théorème de Hahn-Banach, on peut trouver une forme linéaire ν sur $C(X)$, qui induit μ sur H, et telle que l'on ait :

$$\nu(f) \leq p_\mu(f) \quad \text{pour tout } f \in C(X) .$$

Si l'on a $f \leq 0$, on a aussi $p_\mu(f) \leq 0$, donc $\nu(f) \leq 0$. Il s'agit donc d'une mesure positive, équivalente à μ . De plus, si f appartient à $-S$, on a $f \geq \bar{f}$, et donc $\nu(f) \leq \mu(f)$; autrement dit, on a $\mu \prec \nu$. En particulier, si μ est maximale, on a

$$\mu = \nu \qquad \text{et} \qquad \mu(f) \leq p_\mu(f)$$

pour toute fonction $f \in C(X)$.

b. Soit f une fonction de S . Le théorème de Hahn-Banach nous permet de choisir une mesure $\nu \leq p_\mu$ telle que l'on ait $\nu(f) = p_\mu(f) = \mu(\bar{f})$. Si μ est maximale, nous avons $\mu = \nu$ et donc $\mu(\bar{g}) = \mu(g)$ pour toute $g \in S$.

c. Si μ est maximale, nous avons $\mu = \nu$ et donc $\mu(\bar{f} - f) = 0$ pour toute fonction $f \in S$. Supposons réciproquement que μ vérifie cette égalité ; choisissons une mesure maximale $\nu \succ \mu$, et soit f une fonction de S . Nous avons $\mu(f) \leq \nu(f)$, et d'autre part $\mu(\bar{f}) \geq \nu(\bar{f})$ ($\bar{f}$ étant concave scs). Ceci n'est compatible avec les relations $\mu(\bar{f} - f) = \nu(\bar{f} - f) = 0$ que si μ et ν coïncident sur S , donc partout. La mesure μ est donc maximale.

COROLLAIRE 1 (MOKOBODZKI). - Pour que μ soit maximale, il faut et il suffit que μ ne charge aucun des compacts :

$$\{x : \bar{f}(x) \geq f(x) + \varepsilon\} , \quad f \in S , \quad \varepsilon > 0 \quad .$$

En particulier, toute mesure intégrale d'une famille mesurable de mesures maximales est encore maximale.

Soit f une fonction convexe continue ; on dit que f est <u>strictement convexe</u> en un point x s'il existe deux points y et x de X et un nombre t compris entre 0 et 1 , tels que l'on ait :

$$x = ty + (1 - t)\, z \qquad f(x) < tf(y) + (1 - t)\, f(z) \quad .$$

En un tel point, on a évidemment $\bar{f}(x) > f(x)$. Si X est métrisable, on pourra construire aisément (à l'aide d'une série de carrés de formes affines, par exemple) une fonction convexe qui est strictement convexe en tout point non extrémal. On obtient donc la démonstration du théorème fondamental de Choquet, due à BONSALL.

THÉORÈME 6. - Si X est métrisable, une mesure est maximale si et seulement si elle est portée par la frontière.

La méthode utilisée ci-dessus montrerait aussi, à la manière de BAUER, l'existence de la frontière de Šilov et son identité avec l'adhérence de ∂_X .

5. Résolutivité.

DÉFINITION 5. - Soit f une fonction bornée définie sur X . Nous dirons que f est résolutive si l'ensemble des points x , où la relation

$$\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$$

n'est pas vérifiée, est négligeable pour toute mesure maximale.

Nous n'étudierons pas ici la notion de résolutivité. Nous nous bornerons aux résultats très simples suivants :

a. La somme de deux fonctions résolutives est résolutive. Soient f et g deux fonctions résolutives, μ une mesure maximale ; cela résulte de

$$\mu(\underline{f+g}) \geq \mu(\underline{f} + \underline{g}) = \mu(\overline{f} + \overline{g}) \geq \mu(\overline{f+g}) .$$

Comme on a l'inégalité inverse, le théorème est établi.

b. Une limite uniforme de fonctions résolutives est résolutive. (facile)

THÉORÈME 7. - Toute fonction de $C(X)$ est résolutive.

Démonstration. - D'après (a) et (b), il suffit de montrer que toute fonction f de S est résolutive. Or on a $\underline{f} = f$, $f \leq \overline{f}$, et $\mu(f) = \mu(\overline{f})$ pour toute mesure maximale. Le théorème en résulte immédiatement.

6. Mesures pseudoportées par la frontière.

THÉORÈME 8. - Soit μ une mesure maximale, et soit $(f_n)_{n\in N}$ une suite de fonctions résolutives, comprises entre 0 et 1 , qui décroît vers 0 sur X et dont la limite est nulle en tout point de ∂_X . On a

$$\lim_n \mu(f_n) = 0 .$$

Démonstration. - Il nous suffit d'établir que l'on a $\lim_n \mu(\underline{f}_n) = 0$. Pour chaque n, choisissons une fonction s_n, enveloppe supérieure d'un nombre fini de formes linéaires, telle que l'on ait $s_n(x) \leq f_n(x)$ en tout point de la frontière, $s_n(x) \geq 0$ partout. Comme $\mu(s_n)$ approche autant que l'on veut $\mu(\underline{f}_n)$, il nous suffit de montrer que $\mu(s_n)$ tend vers 0.

Rangeons en une suite les formes affines h_n considérées, de sorte que l'on ait :

$$s_1 = \sup(h_1, h_2 \dots h_{n_1})$$

$$s_2 = \sup(h_{n_1} \dots h_{n_2}), \text{ etc.} \quad ,$$

et considérons l'application linéaire $h : x \to (h_n(x))_{n \in N}$ de X dans R^N. Son image Y est convexe compacte, et la frontière de Y est contenue dans l'image de la frontière de X (remarquer que l'image réciproque d'un point extrémal est une face de X). Soient $y_1, y_2, \dots$ les applications coordonnées sur Y : comme $h_i = y_i \circ h$, le fait que les s_n tendent vers 0 entraîne que les fonctions convexes $t_1 = \sup(y_1, y_2 \dots y_{n_1})$, etc., tendent vers 0 sur la frontière de Y, en restant bornées. D'autre part, la mesure $h(\mu)$ est majorée par une mesure maximale ν, qui est portée par la frontière du compact métrisable Y. On a donc

$$\mu(s_n) = \langle h(\mu), t_n \rangle \leq \langle \nu, t_n \rangle \quad .$$

Il en résulte immédiatement que $\mu(s_n)$ a pour limite 0.

COROLLAIRE (BISHOP-DeLEEUW). - Une mesure maximale ne charge aucun compact de Baire disjoint de la frontière. (La fonction caractéristique d'un tel compact est l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante de fonctions continues positives, qui converge vers 0 en tout point extrémal.)

7. Le théorème d'unicité de Choquet.

DÉFINITION 6. - On dit que X est un simplexe, si le dual H' de H est réticulé pour son ordre naturel.

THÉORÈME 9. - Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) X est un simplexe.

(2) L'application $f \to \overline{f}$ est positivement linéaire sur le cône S.

(3) Toute mesure positive sur X est équivalente à une mesure maximale unique.

(4) La fonction $x \to \overline{f}(x)$ est affine pour toute fonction $f \in S$.

Démonstration. - Nous commencerons par montrer l'équivalence de (3) et (4) :

(4) $\Rightarrow$ (3). Soient f une fonction de S, μ et ν deux mesures maximales équivalentes. La fonction affine scs $\overline{f}$ est égale à l'enveloppe inférieure de l'ensemble des fonctions affines continues qui la majorent, et cet ensemble est filtrant décroissant (c'est une application du théorème de Hahn-Banach, due à MOKOBODZKI). Il en résulte que l'on a $\mu(\overline{f}) = \nu(\overline{f})$, et donc (théorème 5) $\mu(f) = \nu(f)$; (3) résulte alors de ce que $S - S$ est dense dans $C(X)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Désignons par M_x la mesure maximale de barycentre x ; une somme de mesures maximales étant maximale, il résulte de (3) que l'application $x \to M_x$ est affine. Or on a $\overline{f}(x) = M_x(f)$ si f appartient à S ; d'où le résultat.

Passons maintenant à l'équivalence entre (1), (2) et (3) :

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit m une forme linéaire positive sur H ; elle est induite par une mesure maximale unique, et on construit ainsi une bijection croissante du cône positif de H' sur le cône des mesures maximales, qui est évidemment réticulé.

(1) $\Rightarrow$ (2) (d'après CHOQUET). Soient f et g deux fonctions de S. Il nous suffit de vérifier l'inégalité $\overline{f}(x) + \overline{g}(x) \leq \overline{f+g}(x)$. Nous avons d'autre part, en remplaçant dans l'égalité (c) du théorème 3 les mesures quelconques par des mesures discrètes :

$$\overline{f}(x) = \sup \sum_{i \in I} \langle x'_i , f \rangle \qquad ,$$

$(x'_i)_{i \in I}$ étant un système fini de mesures positives ponctuelles, tel que l'on ait $\sum_{i \in I} x'_i \sim \varepsilon_x$, et le sup étant pris sur l'ensemble de tous ces systèmes. On évaluerait de même $\overline{g}(x)$ à l'aide de systèmes $(y'_j)_{j \in J}$. En appliquant le "lemme de décomposition" de la théorie des espaces réticulés [1], on déduit de l'équivalence $\sum_{i \in I} x'_i \sim \sum_{j \in J} y'_j$ l'existence de formes positives (z'_{ij}), telles que l'on ait

$$x'_i \sim \sum_j z'_{ij} \qquad\qquad y'_j \sim \sum_i z'_{ij} \qquad .$$

Comme f est convexe, et comme chacune des x'_i est ponctuelle, on a :

[1] Voir par exemple : chapitre 2, paragraphe 1, n° 1 de

BOURBAKI (Nicolas). - Intégration. Chapitres 1-4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Eléments de Mathématique, 13).

$$\langle x'_i , f \rangle \leq \sum_j \langle z'_{ij} , f \rangle$$

et de même

$$\langle y'_j , f \rangle \leq \sum_i \langle z'_{ij} , g \rangle \quad .$$

Il en résulte que l'on a

$$\overline{f}(x) + \overline{g}(x) \leq \sup \sum_{i,j} \langle z'_{ij} , f + g \rangle \leq \overline{f + g}(x) \quad ,$$

car

$$\sum_{i,j} z'_{ij} \sim \varepsilon_x \quad .$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). Considérons la forme linéaire sur S, $f \to \overline{f}(x)$; prolongeons-la par linéarité à $S - S$, puis par continuité à $C(X)$. On vérifie immédiatement que l'on obtient ainsi une mesure positive, qui majore d'après l'égalité (c) du théorème 3 toutes les mesures équivalentes à ε_x.

THÉORÈME 10.- Soit M_x la mesure maximale de barycentre x ; l'application $x \to M_x$ est vaguement mesurable, et la mesure maximale associée à une mesure quelconque μ est égale à $\int M_x \, d\mu(x)$.

Démonstration. - La seconde assertion résulte immédiatement de la première, du corollaire 1 au théorème 5, et de l'unicité de la mesure maximale équivalente à une mesure donnée. D'autre part, l'application $x \to M_x(f)$ est mesurable lorsque f appartient à S (elle est alors scs), donc lorsque f appartient à $S - S$, et enfin par passage à la limite uniforme lorsque f est quelconque dans $C(X)$. L'application $x \to M_x$ est donc vaguement mesurable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (H.). - Šilovscher Rand und Dirichletscher Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 89-136.

[2] BISHOP (E.) and DeLEEUW (K.). - The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 305-331.

[3] MOKOBODZKI (Gabriel). - Balayage défini par un cône convexe de fonctions, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 803-805.

On trouvera d'autres références dans la bibliographie de l'exposé n° 8 de Gustave CHOQUET.