Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Philippe Courrège

Fonctionnelles multiplicatives, sous-processus d'un processus de Markov et semi-groupes subordonnés

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 2 (1961-1962), exp. nº 6, p. 1-54

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_2_A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 6

11, 18 et 25 mai 1962

FONCTIONNELLES MULTIPLICATIVES, SOUS-PROCESSUS D'UN PROCESSUS DE MARKOV ET SEMI-GROUPES SUBORDONNÉS

par Philippe COURRÈGE

Introduction. - Le but du présent exposé est d'étudier les relations entre trois manières différentes d'introduire ce que, cédant à la mode actuelle, on pourrait appeler les sous-trucs d'un processus de Markov stationnaire.

Un processus de Markov stationnaire étant donné, soit ζ sa durée de vie, et $\{P_t\}$ le semi-groupe associé à sa fonction de transition (cf. chapitre 1). Selon qu'on envisage le processus lui-même, ou seulement sa fonction de transition, on peut introduire un sous-truc de X,

- Soit comme un processus de Markov stationnaire, $\hat{X}$ ayant une durée de vie $\hat{\zeta} \leqslant \zeta$; on dit alors que $\hat{X}$ est un sous-processus de X (cf. chapitre 2) ;

- Soit comme un semi-groupe $\{Q_t\}$ tel que $0 \leqslant Q_t \leqslant P_t$, pour tout t ; on dit alors que $\{Q_t\}$ est un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$ (cf. chapitre 4).

Un premier lien entre sous-processus et semi-groupes subordonnés réside dans le fait que le semi-groupe associé à la fonction de transition de $\hat{X}$ est subordonné à $\{P_t\}$ (corollaire de la proposition 2.2, et chapitre 4, exemple 2).

Les fonctionnelles multiplicatives de Markov (cf. chapitre 3) introduisant un deuxième lien de la façon suivante : pour tout t, soit M_t une fonction telle que

$$P_x[\hat{\zeta} > t \mid F] = M_t \qquad P_x \text{ presque sûrement}$$

(où F désigne la tribu des ensembles mesurables pour X) ; la famille $(M_t)_{t \geqslant 0}$ possède les propriétés suivantes :

$$0 \leqslant M_t \leqslant 1$$

$$M_{t+s} = M_t \times M_s \circ \theta_t \qquad P_x \text{ presque sûrement (cf. th. 2.1)}$$

$$Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t \cdot M_t] \quad \text{(th. 4.1 et 4.2)}$$

(où θ_t est l'opérateur de translation de X, et $\{Q_t\}$ le semi-groupe associé à la fonction de transition de $\hat{X}$).

On appellera fonctionnelle multiplicative une telle famille $(M_t)_{t\geq 0}$, convenablement régularisée (cf. chapitre 3).

La manière axiomatique d'introduire les processus de Markov, et les relations entre sous-processus et fonctionnelles multiplicatives, sont empruntées à DYNKIN [1].

Les résultats concernant les relations entre semi-groupes subordonnés et fonctionnelles multiplicatives sont empruntés à MEYER [2].

Chapitre 0. - Quelques résultats de théorie de la mesure.

1. π- et λ-systèmes.

Soit E un ensemble, et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E.

On dit que $\mathcal{A}$ est une π-système si $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie.

On dit que $\mathcal{A}$ est un λ-système si :

(λ_1) $\forall\ n\ ,\ A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \uparrow A \implies A \in \mathcal{A}$,

(λ_2) $A\ ,\ B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset \implies A \cup B \in \mathcal{A}$,

(λ_3) $A\ ,\ B \in \mathcal{A}$ et $B \subset A \implies A \backslash B \in \mathcal{A}$.

On désignera par $\sigma(\mathcal{A})$ le σ-clan engendré par $\mathcal{A}$.

LEMME 0.1. - Soient E un ensemble, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles de parties de E. Si $\mathcal{A}$ est un π-système, $\mathcal{B}$ un λ-système et $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$, alors $\mathcal{B} \supset \sigma(\mathcal{A})$.

2. Espaces mesurables.

On appellera espace mesurable, tout couple $(E\ ,\ \mathcal{B})$ où E désigne un ensemble, et $\mathcal{B}$ une tribu sur E. Si $(E\ ,\ \mathcal{B})$ est un espace mesurable, on désignera par $G(E\ ,\ \mathcal{B})$, ou encore $G(E)$, l'ensemble des applications de E dans R mesurables et bornées ; muni de la norme uniforme, $G(E\ ,\ \mathcal{B})$ est un espace de Banach.

LEMME 0.2. - Soit $(E\ ,\ \mathcal{B})$ un espace mesurable, et soit H un sous-espace vectoriel de $G(E\ ,\ \mathcal{B})$ tel que :

$$A \in \mathcal{B} \implies 1_A \in H$$

où 1_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subset E$.

$$\forall\ n\ ,\ f_n \in H \text{ et } 0 \leqslant f_n \uparrow f \implies f \in H \quad .$$

Alors

$$H = G(E\ ,\ \mathcal{B}) \quad .$$

LEMME 0.3. - Soient $(E\ ,\ \mathcal{B})$ un espace mesurable et $x\ ,\ \Gamma \to P(x\ ,\ \Gamma)$ une application de $E \times \mathcal{B}$ dans $[0\ ,\ 1]$, telle que

- pour tout $x \in E$, $\Gamma \to P(x\ ,\ \Gamma)$ est une mesure bornée sur $(E\ ,\ \mathcal{B})$;
- pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}$, $x \to P(x\ ,\ \Gamma)$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

Alors, si $f : E \to R$ est une fonction $\mathcal{B}$-mesurable bornée, la fonction $x \to \int P(x\ ,\ dy)\ f(y)$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

3. Ensembles et fonctions universellement mesurables.

Soit $(E\ ,\ \mathcal{B})$ un espace mesurable. Nous désignerons par $\mathcal{B}^*$ la tribu sur E définie par

" $A \in \mathcal{B}^*$ " $\iff$ "Pour toute mesure bornée μ sur $(E\ ,\ \mathcal{B})$, il existe A_1 et A_2 appartenant à $\mathcal{B}$ tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$ ".

Les ensembles de $\mathcal{B}^*$ sont appelés ensembles universellement mesurables par rapport à l'espace mesurable $(E\ ,\ \mathcal{B})$, et les fonctions $\mathcal{B}^*$-mesurables sont aussi appelées fonctions universellement mesurables (par rapport à $(E\ ,\ \mathcal{B})$).

Pour qu'une application $f : E \to R$ soit $\mathcal{B}^*$-mesurable, il faut et il suffit que, pour toute mesure bornée μ sur E , f coïncide μ-presque partout sur E avec une fonction $\mathcal{B}$-mesurable.

Toute mesure bornée μ sur $(E\ ,\ \mathcal{B})$ se prolonge d'une façon et d'une seule à $\mathcal{B}^*$.

Cas d'un espace localement compact à base dénombrable.

Soit E un tel espace, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$ sa tribu borélienne, et T une application linéaire positive de $G(E\ ,\ \mathcal{B})$ dans $G(E\ ,\ \mathcal{B})$. Il existe une application $x\ ,\ \Gamma \to P(x\ ,\ \Gamma)$ et une seule de $E \times \mathcal{B}$ dans R_+ telle que :

- Pour tout $x \in E$, $\Gamma \to P(x\ ,\ \Gamma)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$ bornée sur E .
- Pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}$, la fonction $x \to P(x\ ,\ \Gamma)$ appartient à $G(E\ ,\ \mathcal{B})$.
- Pour tout $g \in G(E\ ,\ \mathcal{B})$, $Tg(x) = \int P(x\ ,\ dy)\ g(y)$.

4. Espérances mathématiques conditionnelles (cf. [2], p. 201).

Soient (Ω , F) un espace mesurable, P une probabilité sur (Ω , F), $A \in F$, et F_1 une tribu sur A contenue dans F. Désignons par $L^1(A , F_1 , P)$ l'ensemble des classes de fonctions numériques sur A, F_1-mesurables et intégrables par rapport à la mesure induite par P sur A.

Alors, il existe une application linéaire $\varphi \to \hat{\varphi}$, et une seule, de $\mathcal{L}^1(\Omega , F , P)$ sur $L^1(A , F_1 , P)$, telle que

$$\int_A \varphi \, dP = \int_A \hat{\varphi} \, dP \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega , F , P) \quad .$$

La classe $\hat{\varphi}$, (ou un quelconque de ses représentants) est appelée espérance mathématique conditionnelle de la fonction φ, par rapport à la tribu F_1, et notée $E[\varphi|F_1]$.

Si $B \in F$, $E[1_B|F_1]$ est appelée probabilité conditionnelle de B par rapport à F_1, et notée $P[B|F_1]$.

Par abus de langage, on désignera aussi par $E[\varphi|F_1]$ un représentant (élément de $\mathcal{L}^1(A , F_1 , P)$, ou même élément de $\mathcal{L}^1(\Omega , F , P)$ F_1-mesurable sur A et nul sur $\complement A$) de la classe $\hat{\varphi} = E[\varphi|F_1]$.

On a, avec ces conventions, les relations suivantes :

α. $\int_A E[\varphi|F_1] \, dP = \int_A \varphi \, dP \qquad \varphi \in G(\Omega , F) , \quad A \in F_1 \quad .$

β. $\int \Psi \, E[\varphi|F_1] \, dP = \int \Psi \, \varphi \, dP$

pour $\varphi \in G(\Omega , F)$, et $\Psi \in G(\Omega , F)$ F_1-mesurable sur A et nulle sur $\complement A$.

γ. Si $\varphi \in \mathcal{L}^1(\Omega , F , P)$, et si $\Psi \in \mathcal{L}^1(\Omega , F , P)$ est F_1-mesurable sur A, on a

$$E[\varphi . \Psi \mid F_1] = (\Psi|A) . E[\varphi|F_1] \; (*) \quad P \text{ presque partout sur } A \quad .$$

δ. Si $\varphi \in G(\Omega , F)$, $E[\varphi|F_1]$ contient au moins un représentant Ψ tel que

$$\sup_{\omega \in A} |\Psi(\omega)| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega)| \quad .$$

On désignera dans la suite encore par $E[\varphi|F_1]$ un tel représentant.

(*) Où $\Psi|A$ désigne la restriction de la fonction Ψ à l'ensemble A.

5. Théorème de convergence des martingales.

Soient (Ω , F) un espace mesurable, P une probabilité sur F, et (F_n) une suite croissante de sous-tribus de F. On dit qu'une suite (X_n) de fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega , F , P)$ est une martingale par rapport à la suite (F_n) de tribus, si $E[X_{n+1} \mid F_n] = X_n$ P presque partout, pour tout n.

LEMME 0.4. - Si la martingale (X_n) sur (Ω , F , P) est telle que

$$\sup_n \int |X_n| \, dP < +\infty \quad ,$$

alors la suite (X_n) converge P presque partout sur Ω vers une fonction de $\mathcal{L}^1(\Omega , F , P)$.

Chapitre 1. - Processus de Markov stationnaires interrompus.

1. Fonctions de transition stationnaires et semi-groupes de transformations positives contractantes.

On appellera fonction de transition stationnaire sous-markovienne [1] sur l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, toute application $(t , x , \Gamma) \to P_t(x , \Gamma)$ de $R_+ \times E \times \mathcal{B}$ dans l'intervalle $[0 , 1]$ de R, telle que :

(FT_1) Pour tout $t \in R_+$, et $\Gamma \in \mathcal{B}$, $x \to P_t(x , \Gamma)$ est une fonction de $G(E)$.

(FT_2) Pour tout $t \in R_+$ et $x \in E$, $\Gamma \to P_t(x , \Gamma)$ est une mesure (bornée) sur $(E , \mathcal{B})$.

(FT_3) Pour tout $s , t \in R_+$, $x \in E$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$,

$$P_{t+s}(x , \Gamma) = \int_E P_t(x , dy) \, P_s(y , \Gamma) \quad .$$

(Equation de Chapmann-Kolmogorov.)

Pour tout t et x, on a $P_t(x , E) \leq 1$. Si $P_t(x , E) = 1$ pour tout $t \in R_+$ et $x \in E$, on dit que la fonction de transition est <u>markovienne</u>.

Toute fonction de transition stationnaire sur l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$ se prolonge de façon unique en une fonction de transition stationnaire sur l'espace

---

[1] ou, plus brièvement, fonction de transition.

mesurable $(E, \mathcal{B}^*)$.

Si $\{P_t(x, \Gamma)\}$ est une fonction de transition sur $(E, \mathcal{B})$, et si, pour tout $t \in R_+$, $f \in G(E)$, $x \in E$, on pose

$$P_t f(x) = \int_E P_t(x, dy) f(y) \qquad ,$$

$\{P_t\}_{t \geq 0}$ constitue un semi-groupe de transformations positives contractantes [2] $(\|P_t f\| \leqslant \|f\|)$ de l'espace de Banach $G(E)$.

2. Définition d'un processus de Markov stationnaire (interrompu).

Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et $\{P_t(x, \Gamma)\}$ une fonction de transition stationnaire sous-markovienne sur $(E, \mathcal{B})$.

Considérons alors les termes suivants :

- Un ensemble Ω.
- Une application ζ de Ω dans $\overline{R}_+ = [0, +\infty]$.
- Pour chaque $\omega \in \Omega$, une application $t \to X_t(\omega)$, de $[0, \zeta(\omega)[$ dans E.
- Pour chaque $t \in R_+$, une application θ_t de $[\zeta > t]$ sur $[\zeta > 0]$ [3].
- Une tribu $\mathcal{M}$ sur Ω, et, pour chaque $x \in E$, une probabilité P_x sur $(\Omega, \mathcal{M})$.

On dira que le terme $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \mathcal{M}, (P_x), (\theta_t)\}$ est un processus de Markov stationnaire (interrompu) à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ et admettant $\{P_t(x, \Gamma)\}$ comme fonction de transition, si les relations suivantes sont satisfaites par X :

(M_1) $\zeta(\theta_t(\omega)) = \zeta(\omega) - t$ pour tout $t \in R_+$ et $\omega \in [\zeta > t]$.

(M_2) $X_{t+h}(\omega) = X_h(\theta_t(\omega))$ pour tout t, h et $\omega \in [\zeta > t + h]$.

(M_3) Si F désigne la tribu sur Ω engendrée par les ensembles

$$[X_t \in \Gamma] = \{\omega \mid \omega \in \Omega , \ \zeta(\omega) > t \ \text{et} \ X_t(\omega) \in \Gamma\}$$

où $t \in R_+$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$, $\mathcal{M}$ contient F.

---

(2) Un tel semi-groupe est aussi appelé sous-markovien.

(3) On désigne par $[\zeta > t]$, l'ensemble $\{\omega \mid \omega \in \Omega \text{ et } \zeta(\omega) > t\}$.

(M_4) Pour tout $t \in R_+$, $x \in E$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$,

$$P_t(x , \Gamma) = P_x[X_t \in \Gamma] \quad .$$

(M_5) [Propriété de Markov.]

Pour tout $t \in R_+$, soit F_t la tribu sur l'ensemble $[\zeta > t]$ engendrée par les ensembles $[X_u \in \Gamma] \cap [\zeta > t]$, $0 \leqslant u \leqslant t$, $\Gamma \in \mathcal{B}$.

On a alors, pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in E$, $\Gamma \in \mathcal{B}$,

$$P_x[X_t \in \Gamma \mid F_s] = P_{t-s}(X_s , \Gamma) \qquad (^4)$$

P_x presque sûrement (5) sur $[\zeta > s]$.

On dira que le terme $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, si les axiomes M_1 , M_2 , M_3 , M_5 sont vérifiés, et si l'application

$$(t , x , \Gamma) \to P_x[X_t \in \Gamma]$$

de $R_+ \times E \times \mathcal{B}$ dans $[0 , 1]$ est une fonction de transition sur $(E , \mathcal{B})$; cette application est alors appelée fonction de transition du processus X .

La terminologie suivante facilite l'interprétation probabiliste.

Les éléments de Ω sont appelés trajectoires du processus X . Pour tout $\omega \in \Omega$, $\zeta(\omega)$ est la "durée de vie" de la trajectoire ω . Un processus, pour lequel $\zeta(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$, est appelé processus non interrompu (6).

Pour tout $t \in R_+$, θ_t est appelé l'opérateur de translation par t , et F_t est appelé la tribu des événements antérieurs à t .

Si $x \in E$, $t \in R_+$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$, $P_x[X_t \in \mathcal{B}]$ est intuitivement, la probabilité pour qu'une trajectoire, partant de x à l'instant 0 , soit dans l'ensemble Γ à l'instant t (cf. remarque 1).

---

(4) $P_{t-s}(X_s , \Gamma)$ désigne la fonction $\omega \to P_{t-s}(X_s(\omega) , \Gamma)$ définie sur $[\zeta > s]$. Cette fonction peut aussi être notée $P_{t-s} 1_\Gamma \circ X_s$, où $\{P_t\}$ désigne le semi-groupe associé à la fonction de transition $\{P_t(x , \Gamma)\}$.

(5) Conformément à l'usage courant chez les probabilistes, "presque sûrement" est ici synonyme de "presque partout".

(6) A tout processus de Markov, à valeurs dans $(E , \mathcal{B})$, on peut associer canoniquement un processus non interrompu à valeurs dans l'espace $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ obtenu en "adjoignant à E un point à l'infini". Cf. à ce sujet l'appendice 2.

Remarque 1. - Les fonctions de transition des processus de Markov classiques (cf. par exemple le théorème 1.1) satisfont généralement à une condition supplémentaire relative à l'opérateur P_0 , par exemple :

(M) $\{x\} \in \mathcal{B}$ et $P_0(x , E\setminus\{x\}) = 0$ pour tout $x \in E$ (7) ,

ou bien

(N) $P_0(x , E) = 1$ pour tout $x \in E$.

(N) $\Longrightarrow$ (M) , (M) implique l'existence (8) d'un ensemble $P \in \mathcal{B}$ tel que

$$P_0(x , \Gamma) = 1_{\Gamma \cap P}(x) \quad \text{pour tout } x \in E \text{ et } \Gamma \in \mathcal{B} ,$$

et (N) implique que $P = E$, c'est-à-dire P_0 = identité de $G(E , \mathcal{B})$.

Dans la plus grande partie de cet exposé, ces conditions n'interviendront pas ; nous les introduirons quand elles serviront.

Remarque 2. - Les axiomes (M_4) et (M_5) sont surabondants. On pourrait les remplacer par :

(M'_4) Pour tout $t \in R_+$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$, la fonction

$$x \to P_x[X_t \in \Gamma] \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable sur } E .$$

(M'_5) Pour $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in E$ et $\Gamma \in \mathcal{B}$, on a :

$$P_x[X_t \in \Gamma \mid F_s] = P_{X_s}[X_{t-s} \in \Gamma] \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s]$$

(où $P_{X_s}[X_u \in \Gamma]$ désigne la fonction $\omega \to P_{X_s(\omega)}[X_u \in \Gamma]$ définie sur $[\zeta > s]$).

En effet, si on pose $P_t(x , \Gamma) = P_x[X_t \in \Gamma]$, $(t , x , \Gamma) \to P_t(x , \Gamma)$ vérifie alors (FT_1) et (FT_2).

D'autre part, d'après (M'_5), on a

$$P_{u+s}(x , \Gamma) = P_x[X_{u+s} \in \Gamma] = \int P_{X_s}[X_u \in \Gamma] \, dP_x$$

$$= \int P_s(x , dy) \, P_u(y , \Gamma) ,$$

---

(7) Cette condition s'écrit aussi : $P_x[X_0 \neq x] = 0$, et permet d'interpréter P_x comme la probabilité, "sachant que les trajectoires partent de x à l'instant 0 ".

(8) D'après l'équation de Chapmann-Kolmogorov (FT_3) et le théorème de Radon-Nikodym.

puisque $\Lambda \to P_s(x, \Lambda)$ est la mesure image de P_x par X_s. D'où (FT_3).

3. Processus canoniques. Processus équivalents. Processus subordonnés.

L'espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ étant donné, désignons par Ω_E l'ensemble des applications d'un intervalle $[0, \lambda[$ dans E, $(\lambda \in R_+)$. Si $\varphi \in \Omega_E$ est définie dans $[0, \lambda[$, posons $\overline{\zeta}(\varphi) = \lambda$. Si $\overline{\zeta}(\varphi) > t$, posons

$$\overline{X}_t(\varphi) = \varphi(t)$$

et définissons l'élément $\overline{\theta}_t(\varphi)$ de Ω_E comme l'application $u \to \varphi(t+u)$ de $[0, \overline{\zeta}(\varphi) - t[$ dans E. Désignons enfin par $\overline{F}$ la tribu sur Ω_E engendrée par les ensembles $[\overline{X}_t \in \Gamma]$, $t \in R_+$, $\Gamma \in \mathcal{B}$.

Les termes Ω_E, $\overline{\zeta}$, $(\overline{X}_t)$, $\overline{F}$, $(\overline{\theta}_t)$, ainsi définis, vérifient les axiomes (M_1), (M_2), (M_3) des processus de Markov stationnaires.

Un processus de Markov de la forme :

$$X = \{\Omega_E, \overline{\zeta}, (\overline{X}_t), \overline{F}, (\overline{P}_x), \overline{\theta}_t\}$$

sera dit canonique.

Cas où E est un espace topologique. - Soit alors $\overline{\Omega}$ le sous-ensemble de Ω_E formé des trajectoires φ continues à droite et ayant une limite à gauche. Pour tout $t \in R_+$, $\overline{\theta}_t(\Omega) \subset \Omega$; désignons encore par $\overline{\zeta}$, $\overline{X}_t$, $\overline{\theta}_t$, $\overline{F}$ les restrictions à $\overline{\Omega}$ des termes précédemment définis sur Ω_E. Les termes ainsi définis vérifient encore les axiomes (M_1), (M_2), (M_3). Un processus de la forme

$$X = \{\overline{\Omega}, \overline{\zeta}, (\overline{X}_t), \overline{F}, (\overline{P}_x), \overline{\theta}_t\}$$

sera appelé processus canonique à valeurs dans $(E, \mathcal{B})$ et ayant toutes ses trajectoires continues à droite et pourvues de limite à gauche.

On introduirait de façon analogue un processus canonique ayant ses trajectoires continues.

Plus généralement, on dit qu'un processus de Markov $X = \{\Omega, \zeta, (X_t), \dots\}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{B}_E)$ a ses trajectoires continues à droite (resp. continues ...) si, pour tout $\omega \in \Omega$ l'application $t \to X_t(\omega)$ de $[0, \zeta(\omega)[$ dans E est continue à droite en tout point (resp. continue ...).

Processus équivalents. - On dit que deux processus de Markov X et $\hat{X}$ sont équivalents, s'ils sont à valeurs dans le même espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, et s'ils admettent la même fonction de transition.

Processus subordonnés. - Soient

$$X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$$

et

$$\hat{X} = \{\hat{\Omega} , \hat{\zeta} , (\hat{X}_t) , \hat{\mathcal{M}} , (\hat{P}_x) , (\hat{\theta}_t)\}$$

deux processus de Markov stationnaires, à valeurs dans le même espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, et $\gamma : \hat{\Omega} \to \Omega$. On dit que $\hat{X}$ est subordonné à X par γ , si

(S_1) $$\hat{\zeta} = \zeta \circ \gamma$$

(S_2) $$\hat{X}_t(\hat{\omega}) = X_t(\gamma(\hat{\omega})) \quad \text{pour tout} \quad t \in R_+ \quad \text{et} \quad \hat{\omega} \quad \text{tel que} \quad \hat{\zeta}(\hat{\omega}) > t .$$

(S_3) $\gamma^{-1}(\mathcal{M}) \subset \hat{\mathcal{M}}$, et $\hat{P}_x \gamma^{-1} A = P_x A$ pour tout $A \in \mathcal{M}$ [9] .

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1.

1. Si le processus $\hat{X}$ est subordonné au processus X , $\hat{X}$ et X sont équivalents.

2. Tout processus est subordonné à un processus canonique.

(1) résulte de ce que, si $\hat{X}$ est subordonné à X par γ ,

$$\hat{P}_x[\hat{X}_t \in \Gamma] = \hat{P}_x \gamma^{-1}[X_t \in \Gamma] = P_x[X_t \in \Gamma] .$$

Pour montrer (2), on considère un processus $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$, et on définit l'application γ de Ω dans Ω_E par la relation :

$$\overline{X}_t(\gamma(\omega)) = \gamma(\omega)(t) = X_t(\omega)$$

pour tout $t \in R_+$ et $\omega \in [\zeta > t]$. Les relations (S_1) et (S_2) sont alors vérifiées,

---

[9] Autrement dit, P_x est image de $\hat{P}_x$ par γ .

et $\gamma^{-1}(\overline{F}) \subset \mathfrak{M}$.

On peut donc poser $\overline{P}_x = \gamma(P_x)$ ($\overline{P}_x$ image de P_x par γ) ; (S_3) est alors vérifié, et il reste à vérifier la relation (M_5), c'est-à-dire

$$\overline{P}_x[\overline{X}_t \in \Gamma] \cap A = \int_A P_{t-s}(\overline{X}_s , \Gamma) \, d\overline{P}_x$$

pour tout $A \in \overline{F}_t$, relation qui résulte de la définition de $\overline{P}_x$ comme mesure image de P_x par γ .

4. Propriétés élémentaires des processus de Markov stationnaires.

Dans ce numéro,

$$X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathfrak{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$$

désigne un processus de Markov stationnaire à valeurs dans $(E , \mathcal{B})$ et admettant $\{P_t(x , \Gamma)\}$ comme fonction de transition.

a. Expression de $P_x\{\bigcap_{i=1}^{n} [X_{t_i} \in \Gamma_i]\}$, $t_i \in R_+$, $\Gamma_i \in \mathcal{B}$.

PROPOSITION 1.2. - Soient $(\Gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite finie d'éléments de $\mathcal{B}$, et $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une suite de nombres réels, tels que $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n$. Alors :

$$P_x\{\bigcap_{i=1}^{n} [X_{t_i} \in \Gamma_i]\}$$

$$= \int_{\Gamma_1} P_{t_1}(x , dx_1) \int_{\Gamma_2} P_{t_2-t_1}(x_1 , dx_2) \int \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2} , dx_{n-1})$$

$$P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1} , \Gamma_n) \quad .$$

COROLLAIRE 1. - Si $(x_1 , \dots , x_n) \to f(x_1 , \dots , x_n)$ est une fonction $\mathcal{B}^n$-mesurable sur E^n , et si $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_n$, on a :

$$\int_{[\zeta>t_n]} f(X_{t_1} , \dots , X_{t_n}) \, dP_x$$

$$= \int P_{t_1}(x , dx_1) \int P_{t_2-t_1}(x_1 , dx_2) \int \dots \int P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1} , dx_n) \, f(x_1 , \dots , x_n) .$$

COROLLAIRE 2. - Pour tout $A \in F$ [10], la fonction $x \to P_x(A)$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

Pour tout $\varphi : \Omega \to R$, F-mesurable et bornée, et pour tout $\varphi : \Omega \to \overline{R}_+$, F-mesurable, la fonction $x \to E_x[\varphi] = \int \varphi \, dP_x$ est $\mathcal{B}$-mesurable.

Pour montrer la proposition 1.2, on montrera, par récurrence sur n, en utilisant les axiomes (M_4) et (M_5) et le lemme 0.3, que, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions numériques bornées $\mathcal{B}$-mesurables sur E, et si $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$,

$$\int \prod_{i=1}^{n} f_i \circ X_{t_i} \, dP_x = \int P_{t_1}(x, dx_1) \, f(x_1) \int P_{t_2-t_1}(x_1, dx_2) \, f(x_2)$$

$$\int \dots f(x_{n-1}) \int P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \, f(x_n) \quad .$$

Les corollaires 1 et 2 en résultent en utilisant les lemmes 0.1 et 0.2.

b. Les mesures P_μ et les tribus définitives. - Soit μ une mesure bornée sur $(E, \mathcal{B})$. Pour tout $A \in F$, $x \to P_x(A)$ est $\mathcal{B}$-mesurable d'après le corollaire 2 de la proposition 1.2. Si on pose

$$P_\mu(A) = \int \mu(dx) \, P_x(A) \text{ , pour } A \in F \quad ,$$

P_μ est une mesure bornée sur (Ω, F), et si μ est une probabilité, P_μ est aussi une probabilité.

On appelle répartition initiale du processus, toute probabilité sur $(E, \mathcal{B})$.

D'après les lemmes 0.1 et 0.2, on a $\int \varphi \, dP_\mu = \int \mu(dx) \int \varphi \, dP_x$; pour tout $\varphi : \Omega \to R$, F-mesurable borné, on notera $E_\mu[\varphi]$ l'intégrale $\int \varphi \, dP_\mu$. Si on pose en outre,

$$E_x[\varphi] = \int \varphi \, dP_x \quad ,$$

on a

$$E_\mu[\varphi] = \int \mu(dx) \, E_x[\varphi] \quad .$$

En particulier,

$$P_{\varepsilon_x} = P_x \text{ et } E_{\varepsilon_x} = E_x \qquad (x \in E) \quad .$$

---

(10) Rappelons qu'on désigne par F (n° 3) la tribu engendrée par les ensembles $[X_t \in \Gamma]$, $(t \in R_+ , \Gamma \in \mathcal{B})$.

Désignons par F^* la tribu sur Ω définie par

" $A \in F^*$ " $\Longleftrightarrow$ "Pour toute répartition initiale μ , il existe deux ensembles A_1 et A_2 de F tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $P_\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$ ".

Pour tout μ , la mesure P_μ se prolonge de façon unique à F^* . Nous désignerons encore par P_μ ce prolongement.

Pour tout $t \in R_+$, désignons par F_t^* la tribu sur l'ensemble $[\zeta > t]$ définie par

" $A \in F_t^*$ " $\Longleftrightarrow$ " $A \subset [\zeta > t]$, et, pour tout μ , il existe $B \in F_t$ tel que $A \backslash B \in F^*$, $B \backslash A \in F^*$ et $P_\mu(A \backslash B) = P_\mu(B \backslash A) = 0$ ".

Les tribus $(F_t^*)_{t \geq 0}$ sont appelées "<u>tribus définitives</u> associées au processus de Markov X ".

Elles possèdent les propriétés suivantes :

- $F_t \subset F_t^* \subset F^*$ pour tout $t \in R_+$.
- $s \leq t$ et $A \in F_s^* \Longrightarrow A \cap [\zeta > t] \in F_t^*$.
- Si $s \leq t$, si μ est une répartition initiale, et si $\Gamma \in \mathcal{B}$, on a

$$P_\mu[X_t \in \Gamma \mid F_s^*] = P_{t-s}(X_s , \Gamma) \qquad P_\mu \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s] \quad .$$

<u>Remarque</u> 1. - Si $\varphi : \Omega \to R$ est F^*-mesurable bornée, la fonction $x \to E_x[\varphi] = \int \varphi \, dP_x$ est universellement mesurable sur l'espace $(E , \mathcal{B})$, et on a encore

$$E_\mu[\varphi] = \int \varphi \, dP_\mu = \int \mu(dx) \; E_x[\varphi] \quad .$$

Si $\varphi = 1_A$ où $A \in F^*$, cela résulte de la définition de F^* , puisque, pour tout μ , il existe A_1 et $A_2 \in F$ tels que

$$P_x(A_1) \leq P_x(A) \leq P_x(A_2)$$

et

$$\int [P_x(A_2) - P_x(A_1)] \; \mu(dx) = \int P_x(A_2 \backslash A_1) \; \mu(dx) = P_\mu(A_2 \backslash A_1) = 0 \quad .$$

D'où le résultat pour φ F^*-mesurable bornée par application du lemme 0.2.

<u>Remarque</u> 2. - Soit X un processus de Markov à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$. Pour tout $\Gamma \in \mathcal{B}^*$, $[X_t \in \Gamma] \in F_t^*$. Donc, en prolongeant la fonction

de transition de X à $\mathcal{B}^*$, et, compte tenu de la proposition 1.3, X est aussi un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{B}^*)$. On remarquera que les tribus F_t^* et F^* restent inchangées par ce passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^*$.

Remarque 3. - Soit $\mathcal{M}^*$ la tribu sur Ω définie par

" $A \in \mathcal{M}^*$ " $\Longleftrightarrow$ "Pour tout $x \in E$, il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $P_x(A_2 \setminus A_1) = 0$ ". On a $\mathcal{M}^* \supset F^*$, et pour tout $x \in E$, P_x se prolonge de façon unique en une probabilité sur $\mathcal{M}^*$. On peut donc toujours supposer que $\mathcal{M} \supset F^*$. C'est ce que nous ferons dans la suite. En outre, lorsque $\mathcal{M} = F^*$, nous ne mentionnerons pas $\mathcal{M}$.

c. La propriété de Markov. - Soient $A \in F^*$ un sous-ensemble de Ω, et φ une application de A dans R F^*-mesurable et bornée. On notera $E_\mu[\varphi]$ l'intégrale $\int_A \varphi \, dP_\mu$ (μ mesure bornée sur $(E, \mathcal{B})$).

PROPOSITION 1.3. - Soient μ une répartition initiale, et $t \in R_+$.

1. Pour tout $A \in F^*$, $A \subset [\zeta > 0]$, on a

$$P_\mu[\theta_t^{-1}(A) \mid F_t^*] = P_{X_t}(A) \qquad P_\mu \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t] \quad (^{11}) \quad .$$

2. Pour toute application φ de $[\zeta > 0]$ dans R, F^*-mesurable et bornée, on a

$$E_\mu[\varphi \circ \theta_t \mid F_t^*] = E_{X_t}[\varphi] \qquad P_\mu \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t] \quad .$$

(2) résulte de (1) par application du lemme 0.2.

Pour montrer (1), il suffit de montrer en vertu du lemme 0.1, et de la définition des tribus définitives, que

$$\text{(h)} \qquad P_\mu \, \theta^{-1}(A) \cap B = \int_B P_{X_t}(A) \, dP_\mu$$

pour A de la forme

$$\bigcap_{i=1}^{m} [X_{u_i} \in \Gamma_i]$$

et B de la forme

(11) $P_{X_t}(A)$ désignant l'application $\omega \to P_{X_t(\omega)}(A)$ de $[\zeta > t]$ dans $[0, 1]$.

$$\bigcap_{j=1}^{n} [X_{t_j} \in \Delta_j]$$

où $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t$, ce qui résulte de la proposition 1.2.

5. Un théorème d'existence.

Nous admettrons ici le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. - Soient E un espace localement compact à base dénombrable et $\{P_t\}$ un semi-groupe fortement continu et sous-markovien de transformations de $C_0(E)$. Si $\{P_t(x , \Gamma)\}$ désigne la fonction de transition sur l'espace E , mesurable $(E , \mathcal{B}_E)$ (12) associée à $\{P_t\}$, il existe un processus de Markov stationnaire

$$X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , (P_x) , (\theta_t)\} ,$$

à valeurs dans $(E , \mathcal{B}_E)$, admettant $\{P_t(x , \Gamma)\}$ comme fonction de transition et tel que pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \to X_t(\omega)$ est continue à droite et a une limite à gauche en tout point.

En outre, si $\{P_t\}$ est markovien, on peut choisir X tel que $\zeta(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega$ (processus non interrompu).

Pour une démonstration de ce théorème dans le cas où $\{P_t\}$ est markovien, cf. [3], exposé n° 5, page 4.

D'après la proposition 1.1, on peut toujours supposer que X est canonique.

Chapitre 2. - Sous-processus stationnaire d'un processus de Markov stationnaire.

1. Définition d'un sous-processus.

Intuitivement, on obtient un sous-processus d'un processus de Markov $X = (\Omega , \zeta , \ldots)$ en raccourcissant la durée de vie ζ de X . De façon précise :

DÉFINITION 2.1. - Soit $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathfrak{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$. On appelle sous-processus stationnaire du processus X , tout couple $(\hat{X} , \gamma)$ où

(12) $\mathcal{B}_E$ désignant la tribu borélienne de E .

$\hat{X} = \{\hat{\Omega}\ ,\ \hat{\zeta}\ ,\ (\hat{X}_t)\ ,\ \hat{\mathcal{M}}\ ,\ (\hat{P}_x)\ ,\ (\hat{\theta}_t)\}$ est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesuré $(E\ ,\ \mathcal{B}^*)$ [13], et γ une application de $\hat{\Omega}$ dans Ω telle que les relations suivantes soient satisfaites :

(SM_1) $\hat{\zeta}(\hat{\omega}) \leqslant \zeta(\gamma(\hat{\omega}))$ pour tout $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$.

(SM_2) $\hat{X}_t(\hat{\omega}) = X_t(\gamma(\hat{\omega}))$ pour tout $t \in R_+$ et $\hat{\omega} \in [\hat{\zeta} > t]$.

(SM_3) Pour tout $u\ ,\ t \in R_+$, et $A \in F$ tel que $A \subset [\zeta > 0]$,

$$\hat{\theta}_t^{-1}(\gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > u]) = \gamma^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [\hat{\zeta} > t + u] \quad .$$

(SM_4) $\gamma^{-1}(\mathcal{M}) \subset \hat{\mathcal{M}}$, et $\hat{P}_x(\gamma^{-1}(A)) = P_x(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$.

(SM_5) Pour tout $t \in R_+$, il existe une application M_t de Ω dans $[0\ ,\ 1]$, nulle hors de $[\zeta > t]$, F_t^*-mesurable sur $[\zeta > t]$, et telle que

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})] = M_t \circ \gamma$$

$\hat{P}_x$ presque sûrement sur Ω , pour tout $x \in E$.

Remarque. - Indépendamment de l'axiome (SM_5), puisque pour chaque $t\ ,\ x$, $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})]$ est une classe de fonctions $\gamma^{-1}(\mathcal{M})$-mesurables sur $\hat{\Omega}$ et à valeurs dans $[0\ ,\ 1]$, il existe une application M_t^x de Ω dans $[0\ ,\ 1]$, $\mathcal{M}$-mesurable et telle que $M_t^x \circ \gamma$ appartienne à la classe $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})]$ (ce que l'on note aussi

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})] = M_t^x \circ \gamma$$

P_x presque sûrement).

On a alors

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t] \cap \gamma^{-1}(A) = \int_{\gamma^{-1}(A)} M_t^x \circ \gamma \ d\hat{P}_x = \int_A M_t^x \, dP_x$$

pour tout $A \in \mathcal{M}$, d'après (SM_4) .

En particulier, si on prend $A = [\zeta \leqslant t]$; d'après (SM_1),

---

[13] Où $\mathcal{B}^*$ désigne la tribu des ensembles universellement mesurables (cf. chapitre 0, n° 3) par rapport à $(E\ ,\ \mathcal{B})$.

$$\gamma^{-1}([\zeta \leqslant t]) \subset [\hat{\zeta} \leqslant t] \quad ,$$

donc

$$\int_{[\zeta \leqslant t]} M_t^x \, dP_x = 0 \quad .$$

Ceci montre, puisque M_t^x est une fonction positive, que $M_t^x = 0$ P_x presque sûrement sur $[\zeta \leqslant t]$, ce qui introduit l'axiome (SM_5).

2. Exemples.

Exemple 1. - Soient $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , F^* , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire, et T une application de Ω dans $[0 , +\infty]$ telle que :

(TE_1) $0 \leqslant T(\omega) \leqslant \zeta(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

(TE_2) Pour tout $t \in R_+$ et $\omega \in [T > t]$, $T(\theta_t(\omega)) = T(\omega) - t$.

(TE_3) $[T > t] \in F_t^*$ pour tout $t \in R_+$.

Pour tout $t \in R_+$, soient $\hat{X}_t$ la restriction de X_t et $\hat{\theta}_t$ la restriction de θ_t à l'ensemble $[T > t]$.

Alors $\hat{X} = \{\Omega , T , (\hat{X}_t) , F^* , P_x , (\hat{\theta}_t)\}$ est un sous-processus du processus X (prendre pour γ l'application identique de Ω , et $M_t = 1_{[T>t]}$ pour tout $t \in R_+$). Voir ci-dessous chapitre 3, n° 2, exemple 1, et n° 3, applications du théorème 3.2.

Exemple 2. - Sous-processus canonique.

Soit $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathfrak{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire.

Posons

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times \overline{R_+} = \Omega \times [0 , +\infty] \quad ,$$

$$\tilde{\zeta}(\omega , \lambda) = \inf(\zeta(\omega) , \lambda) \quad \text{pour tout} \quad (\omega , \lambda) \in \tilde{\Omega} \quad ,$$

$$\tilde{X}_t(\omega , \lambda) = X_t(\omega)$$

$$\tilde{\theta}_t(\omega , \lambda) = (\theta_t(\omega) , \lambda - t)$$

pour tout $t \in R_+$ et $(\omega , \lambda) \in [\tilde{\zeta} > t]$.

$$\tilde{\gamma}(\omega\ ,\ \lambda) = \omega \quad \text{pour tout} \quad (\omega\ ,\ \lambda) \in \tilde{\Omega} \qquad ;$$

et désignons par $\tilde{\mathcal{M}}$ la tribu sur $\tilde{\Omega}$ engendrée par les ensembles $[\tilde{X}_t \in \Gamma]$, $t \in R_+$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, et par $\tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{M})$. Cette tribu $\tilde{\mathcal{M}}$ est engendrée par les ensembles de la forme $A \cap [\zeta > t] \times]t\ ,\ +\infty[$ ou $A \times [0\ ,\ +\infty[$, $A \in \mathcal{M}$, qui forment un π-système.

Les termes $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\zeta}$, $(\tilde{X}_t)$, $\tilde{\mathcal{M}}$, $(\tilde{\theta}_t)$ satisfont aux axiomes (M_1), (M_2), (M_3) des processus de Markov (chapitre 2, § 2), aux axiomes (SM_1), (SM_2), (SM_3) des sous-processus, ainsi qu'à la relation $\gamma^{-1}(\mathcal{M}) \subset \tilde{\mathcal{M}}$.

Vérifions par exemple (SM_3) : soit $A = [X_s \in \Gamma]$. On a

$$\gamma^{-1}(A) = [X_s \in \Gamma] \times [0\ ,\ +\infty[$$

et

$$[\tilde{\zeta} > u] = [\zeta > u] \times]u\ ,\ +\infty[\qquad ,$$

donc

$$\gamma^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u] = [X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u] \times]u\ ,\ +\infty[= \bigcup_{v>u} [X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u] \times \{v\}\ .$$

D'où

$$\tilde{\theta}_t^{-1}(\gamma^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u]) = \bigcup_{v>u} \tilde{\theta}_t^{-1}([X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u] \times \{v\}) \qquad ,$$

mais

$$\tilde{\theta}_t^{-1}\ B \times \{v\} = \theta_t^{-1}(B) \times \{v + t\} \qquad ,$$

donc

$$\tilde{\theta}_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u]) = \bigcup_{v>u} \theta_t^{-1}([X_s \in \Gamma] \cap [\zeta > u]) \times \{t + v\}$$

$$= \theta_t^{-1}(A) \cap [\zeta > t + u] \times]u + t\ ,\ +\infty[$$

$$= \tilde{\gamma}^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [\tilde{\zeta} > t + u] \qquad .$$

On en déduit alors (SM_3), puisque l'ensemble des $A \in F$, $A \subset [\zeta > 0]$ tels que

$$\tilde{\theta}_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [\tilde{\zeta} > u]) = \gamma^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [\tilde{\zeta} > t + u]$$

est une tribu sur $[\zeta > 0]$.

On dira alors qu'un sous-processus $\tilde{X}$ de X est canonique s'il est de la forme :

$$\tilde{X} = \{\tilde{\Omega} , \tilde{\zeta} , (\tilde{X}_t) , \tilde{\mathfrak{M}} , \tilde{P}_x , (\tilde{\theta}_t)\}$$

(où $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\zeta}$, $(\tilde{X}_t)$, $\tilde{\mathfrak{M}}$ et $(\tilde{\theta}_t)$ sont les termes définis ci-dessus), et on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. - Tout sous-processus stationnaire d'un processus de Markov stationnaire est subordonné à un processus canonique.

Soit $(\hat{X} , \gamma)$ un sous-processus du processus X .

Définissons l'application $\overline{\gamma}$ de $\hat{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}$ en posant

$$\overline{\gamma}(\hat{\omega}) = (\gamma(\hat{\omega}) , \hat{\zeta}(\hat{\omega}))$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\overline{\gamma}"'] & \Omega \\
 & \tilde{\Omega} \arrow[u, "\tilde{\gamma}"']
\end{tikzcd}$$

on vérifie alors que :

$$\tilde{\zeta}(\overline{\gamma}(\hat{\omega})) = \hat{\zeta}(\hat{\omega}) \qquad \hat{\omega} \in \hat{\Omega}$$

$$\tilde{X}_t(\overline{\gamma}(\hat{\omega})) = \hat{X}_t(\hat{\omega}) \qquad t \in R_+ , \quad \hat{\omega} \in [\hat{\zeta} > t]$$

$$\overline{\gamma}^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}}) \subset \hat{\mathfrak{M}} \qquad .$$

Ce qui nous permet de prendre pour $\tilde{P}_x$ la mesure sur $\tilde{\mathfrak{M}}$ image de $\hat{P}_x$ par $\overline{\gamma}$. On vérifie alors que le terme

$$\tilde{X} = \{\tilde{\Omega} , \tilde{\zeta} , (\tilde{X}_t) , \tilde{\mathfrak{M}} , (\tilde{P}_x) , (\tilde{\theta}_t)\}$$

définit un processus de Markov stationnaire (et, par conséquent, un sous-processus canonique de X).

D'où le résultat, puisque $\hat{X}$ est subordonné à $\tilde{X}$ par $\bar{\gamma}$ d'après la définition de $\bar{\gamma}$.

3. Propriétés de la famille $(M_t)_{t\geq 0}$ introduite par l'axiome (SM_5).

La proposition 2.2 ci-dessous est une conséquence directe des axiomes (SM_5) et (SM_4) :

PROPOSITION 2.2. - Soient $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, et $(\hat{X} , \gamma)$ un sous-processus de X.

1. Pour tout $t \in R_+$, $x \in E$ et $A \in \mathcal{M}$, on a

$$\hat{P}_x([\hat{\zeta} > t] \cap \bar{\gamma}^1(A)) = \int_A M_t \, dP_x \quad .$$

2. Pour tout $t \in R_+$, $x \in E$ et $\varphi : \Omega \to R$ $\mathcal{M}$-mesurable bornée, on a :

$$\int_{[\hat{\zeta}>t]} \varphi \circ \gamma \, d\hat{P}_x = \int \varphi \, M_t \, dP_x \quad .$$

COROLLAIRE.

1. $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t] = E_x[M_t]$, $\quad t \in R_+$, $x \in E$.

2. Pour tout $t \in R_+$, $x \in E$ et $\Gamma \in \mathcal{B}^*$,

$$\hat{P}_t(x , \Gamma) = \hat{P}_x[\hat{X}_t \in \Gamma] = E_x[1_{[X_t \in \Gamma]} \times M_t] = \int_{[X_t \in \Gamma]} M_t \, dP_x \quad .$$

3. Pour tout $t \in R_+$, $x \in E$ et $f \in G(E , \mathcal{B})$,

$$\hat{P}_t f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t] \leqslant E_x[f \circ X_t] = P_t f(x) \quad ,$$

où $(\hat{P}_t)$ désigne le semi-groupe de transformation de $G(E , \mathcal{B}^*)$ associé à la fonction de transition de $\hat{X}$.

La proposition 2.3 ci-dessous montre que la famille $(M_t)_{t\geq 0}$ définit le sous-processus $\hat{X}$ à une équivalence près, ou exactement si $\hat{X}$ est canonique.

PROPOSITION 2.3. - Soient $(\hat{X}, \hat{\gamma})$ et $(\overline{X}, \overline{\gamma})$ deux sous-processus d'un processus X ; $(\hat{M}_t)_{t\geq 0}$ et $(\overline{M}_t)_{t\geq 0}$ des familles correspondantes de fonctions introduites par l'axiome (SM_5).

Pour que $\hat{X}$ et $\overline{X}$ soient équivalents, il faut et il suffit que $\hat{M}_t = \overline{M}_t$ P_x presque sûrement pour tout $x \in E$.

La condition est suffisante, car

$$\hat{P}_x[\hat{X}_t \in \Gamma] = \hat{P}_x[\hat{\zeta} > t] \cap \hat{\gamma}^{-1}([X_t \in \Gamma]) = \int_{[X_t \in \Gamma]} \hat{M}_t \, dP_x \quad .$$

Pour montrer qu'elle est nécessaire, montrons que, si $\hat{X}$ et $\overline{X}$ sont équivalents, alors

$$\int_A \hat{M}_t \, dP_x = \int_A \overline{M}_t \, dP_x \quad \text{pour tout } A \in F_t^* \quad .$$

Soit d'abord

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} [X_{t_i} \in \Gamma_i] \quad \text{où} \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_n \leqslant t$$

on a :

$$\int_A \hat{M}_t \, dP_x = \int_{\hat{\gamma}^{-1}(A)} \hat{M}_t \circ \hat{\gamma} \, d\hat{P}_x \qquad \text{d'après } (SM_4)$$

$$= \hat{P}_x([\hat{\zeta} > t] \cap \hat{\gamma}^{-1}(A)) \qquad \text{d'après } (SM_5)$$

$$= \hat{P}_x \bigcap_{i=1}^{n} [\hat{X}_{t_i} \in \Gamma_i] \qquad \text{d'après } (SM_1) \text{ et } (SM_2)$$

et de même

$$\int_A \overline{M}_t \, dP_x = \overline{P}_x \bigcap_{i=1}^{n} [\overline{X}_{t_i} \in \Gamma_i] \quad .$$

La proposition 1.2 montre alors que, si $\hat{X}$ et $\overline{X}$ sont équivalents,

$$\overline{P}_x \bigcap_i [\overline{X}_{t_i} \in \Gamma_i] = \hat{P}_x \bigcap_i [\hat{X}_{t_i} \in \Gamma_i]$$

d'où

$$\int_A \hat{M}_t \, dP_x = \int_A \overline{M}_t \, dP_x \quad .$$

On en déduit que

$$\int_A \hat{M}_t \, dP_x = \int_A \overline{M}_t \, dP_x \qquad \text{pour tout} \quad A \in F_t$$

d'après le lemme 0.1 donc pour tout $A \in F_t^*$. Il en résulte que

$$\hat{M}_t = \overline{M}_t \quad P_x \text{ p. s. sur } [\zeta > t] \qquad ,$$

puisque $\hat{M}_t$ et $\overline{M}_t$ sont F_t^*-mesurables sur $[\zeta > t]$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - <u>Si deux sous-processus canoniques</u> $\hat{X}$ <u>et</u> $\overline{X}$ <u>d'un processus</u> X <u>sont équivalents, ils coïncident.</u>

L'ensemble des $B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ tels que

(1) $$\hat{P}_x(B) = \overline{P}_x(B)$$

est un λ-système. Comme $\widetilde{\mathcal{M}}$ est engendré par le π-système $\mathcal{N}$ formé des ensembles $A \cap [\zeta > t] \times]t , + \infty)$ et $A \times (0 , + \infty) = \widetilde{\gamma}^{-1}(A)$, il suffit, d'après le lemme 0.1, de vérifier (1) pour tout $B \in \mathcal{N}$.

Si $B = \widetilde{\gamma}^{-1}(A)$, $\hat{P}_x(B) = \overline{P}_x(B)$ d'après (SM_4).

Si $B = A \cap [\zeta > t] \times]t , + \infty)$, $B = \widetilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [\widetilde{\zeta} > t]$ donc

$$\hat{P}_x(B) = \int_A \hat{M}_t \, dP_x \quad \text{et} \quad \overline{P}_x(B) = \int_A \overline{M}_t \, dP_x \qquad ,$$

d'où le résultat d'après la proposition 2.3.

COROLLAIRE 2. - <u>Soient</u> X <u>un processus de Markov stationnaire, et</u> $\hat{X}$ <u>un sous-processus de</u> X. <u>Si</u> (M_t) <u>et</u> (M'_t) <u>sont deux familles de fonctions satisfaisant à l'axiome</u> (SM_5) <u>relativement à</u> $\hat{X}$, <u>alors pour tout</u> $t \in R_+$ <u>et</u> $x \in E$,

$$M_t = M'_t \quad P_x \text{ presque sûrement} \qquad .$$

Le théorème 2.1 ci-dessous donne les propriétés fondamentales de la famille $(M_t)_{t \geq 0}$.

THÉORÈME 2.1. - <u>Soient</u> $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ <u>un processus de Markov stationnaire, et</u> $(\hat{X} , \gamma)$ <u>un sous-processus de</u> X.

<u>La famille</u> $(M_t)_{t\geq 0}$ <u>d'applications de</u> Ω <u>dans</u> $[0\,,\,1]$ <u>introduites par l'axiome</u> (SM_5) <u>possède les propriétés suivantes</u> :

1° <u>Pour tout</u> s, t <u>et</u> $x \in E$,

$M_{s+t} = M_s \cdot (M_t \circ \theta_s)$ P_x <u>presque sûrement sur</u> $[\zeta > s + t]$.

2° <u>Pour tout</u> $x \in E$, <u>et toute suite</u> (t_n) <u>décroissant vers</u> $t \in R_+$,

$$\lim_{t_n \downarrow t} M_{t_n} = M_t \quad P_x \text{ presque sûrement sur } \Omega \quad .$$

COROLLAIRE.

a. <u>Pour tout</u> $x \in E$ <u>et</u> $t \in R_+$,

$$0 \leqslant M_t \leqslant 1 \quad .$$

b. <u>Pour tout</u> $x \in E$, s, $t \in R_+$,

$$M_{s+t} \leqslant M_s \quad P_x \text{ presque sûrement} \quad .$$

Le corollaire résulte de la définition de M_t pour (a) et du 1° pour (b).

Montrons le 2° : Soit (t_n) une suite décroissant vers t ; la suite d'ensembles $[\hat{\zeta} > t_n]$ croît vers $[\hat{\zeta} > t]$:

$$[\hat{\zeta} > t] = \bigcup_n [\hat{\zeta} > t_n] \quad ;$$

donc, si $A \in \mathcal{M}$,

$$\lim_{n\infty} \hat{P}_x\, \gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > t_n] = \hat{P}_x \gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > t] \quad .$$

D'où

$$\lim_{n\infty} \int_A M_{t_n}\, dP_x = \int_A M_t\, dP_x \quad .$$

D'où

$$\lim_{n\infty} M_{t_n} = M_t \quad P_x \text{ presque sûrement} \quad ,$$

puisque M_{t_n} et M_t sont $\mathcal{M}$-mesurables ([14]).

Montrons enfin le 1°. Pour cela montrons d'abord que, si $A \in F_s$, $B \in F_t$, et $D = A \cap \theta_s^{-1}(B)$, on a :

$$(1) \qquad P_x^1(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = E_x[1_D \times M_s \times M_t \circ \theta_s]$$

où 1_D désigne la fonction caractéristique de D .

Le 1° en résultera ; en effet, d'une part, les ensembles $A \cap \theta_s^{-1}(B)$, $A \in F_s$, $B \in F_t$, forment un π-système qui contient les ensembles

$$\bigcap_{i=1}^{n} [X_{t_i} \in \Gamma_i] , \qquad 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq s + t , \ \Gamma_i \in \mathcal{B} ,$$

donc engendre F_{t+s} ; d'autre part les ensembles $D \in \mathcal{M}$ tels que (1) soit vérifiée forment un λ-système.

Il en résulte donc d'après le lemme 0.1 que (1) est vérifiée pour tout $D \in F_{s+t}$, donc pour tout $D \in F^*_{s+t}$. Comme par ailleurs, on a d'après (SM_5)

$$\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = \int_D M_{s+t} \, dP_x \qquad ,$$

on a

$$\int_D M_{s+t} \, dP_x = \int_D M_s \times M_t \circ \theta_s \, dP_x$$

d'où, puisque M_{s+t} et $M_s \times M_t \circ \theta_s$ sont F^*_{s+t}-mesurables,

$$M_{s+t} = M_s \times M_t \circ \theta_s \quad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t + s] \qquad .$$

Soient donc $A \in F_s$, $B \in F_t$ et $D = A \cap \theta_s^{-1}(B)$.

Remarquons d'abord que $\gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > s] \in \hat{F}_s$. En effet, l'ensemble des $A \in F_s$ qui satisfont cette relation est une tribu, et contient les ensembles $[X_u \in \Gamma]$, $u \leq s$, $\Gamma \in \mathcal{B}$. On a alors

$$\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t] = \gamma^{-1}(A) \cap [\hat{\zeta} > s] \cap \gamma^{-1}(\theta_s^{-1}(B)) \cap [\hat{\zeta} > s + t] \qquad ;$$

([14]) Rappelons (cf. chapitre 1, n° 4, remarque 3) que $\mathcal{M} \supset F^*$.

mais, d'après (SM_3),

$$\gamma^{-1}(\theta_s^{-1}(B)) \cap [\hat{\zeta} > s + t] = \hat{\theta}_s^{-1}(\gamma^{-1}(B) \cap [\hat{\zeta} > t]) \quad ;$$

d'où, en utilisant la propriété de Markov (proposition 1.3) pour le processus $\hat{X}$, on obtient :

$$\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = \int_{\gamma^{-1}(A)\cap[\hat{\zeta}>s]} \hat{P}_{\hat{X}_s}(\gamma^{-1}(B) \cap [\hat{\zeta} > t])\, d\hat{P}_x \quad .$$

Par ailleurs

$$\hat{P}_y(\gamma^{-1}(B) \cap [\hat{\zeta} > t]) = \int_B M_t \, dP_y = E_y[1_B . M_t] \quad ,$$

d'après la proposition 2.2.

Donc, de nouveau d'après la proposition 2.2,

$$\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) = \int_A M_s \times E_{X_s}[1_B . M_t] \, dP_x \quad ,$$

et, en appliquant encore la propriété de Markov,

$$\begin{aligned}
\hat{P}_x(\gamma^{-1}(D) \cap [\hat{\zeta} > s + t]) &= \int_A M_s \times (1_B . M_t) \circ \theta_s \, dP_x \\
&= \int_{A\cap\theta_s^{-1}(B)} M_s \times M_t \circ \theta_s \, dP_x \\
&= \int_D M_s \times M_t \circ \theta_s \, dP_x = E_x[1_D \times M_s \times M_t \circ \theta_s] \quad .
\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Chapitre 3. - Fonctionnelles multiplicatives de Markov.

1. Définition.

Les propriétés 1° et 2° de la famille $(M_t)_{t\geq 0}$ (théorème 2.1) introduisent la définition suivante.

DÉFINITION 3.1. - Soit $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathfrak{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire. On appelle fonctionnelle multiplicative de Markov du processus X toute famille $(M_t)_{t\geq 0}$ d'applications de Ω dans R telle que :

(FM_1) Pour tout $t \in R_+$, $0 \leq M_t \leq 1$, et $M_t(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in [\zeta \leq t]$.

(FM_2) Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \to M_t(\omega)$ de R_+ dans $[0 , 1]$ est continue à droite et décroissante.

(FM_3) Pour tout $t \in R_+$, la restriction de M_t à $[\zeta > t]$ est F_t^*-mesurable.

(FM_4) Pour tout $s , t \in R_+$, et $x \in E$,

$$M_{s+t} = M_s \times M_t \circ \theta_s \qquad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > s + t] \quad .$$

Remarque. - L'axiome (FM_4) peut aussi s'énoncer ainsi :

Pour tout s , t et $x \in R$,

$$P_x([M_{t+s} \neq M_s \times M_t \circ \theta_s] \cap [\zeta > t + s]) = 0$$

et alors on a aussi

$$P_\mu([M_{t+s} \neq M_s \times M_t \circ \theta_s] \cap [\zeta > t + s]) = 0$$

pour toute répartition initiale μ .

DÉFINITION 3.2. - On dit que deux fonctionnelles multiplicatives (M_t) et (M'_t) du processus X sont équivalentes, si $P_x([M_t \neq M'_t]) = 0$ pour tout $t \in R_+$ et $x \in E$.

2. Exemples.

Exemple 1. - Soient $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathfrak{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire, et T une application de Ω dans $[0 , + \infty]$ telle que

(TE_1) $0 \leq T(\omega) \leq \zeta(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

(TE_2) Pour $t \in R_+$ et $\omega \in [T > t]$,

$$T(\theta_t(\omega)) = T(\omega) - t \quad .$$

(TE_3) $[T > t] \in F^*_t$ pour tout $t \in R_+$.

Si on pose $M_t = 1_{[T>t]}$, $(M_t)_{t\geq 0}$ est une fonctionnelle multiplicative du processus X . On a même dans ce cas :

(FM'_4) $M_{s+t}(\omega) = M_s(\omega) \times M_t(\theta_s(\omega))$ pour tout s , t et $\omega \in [\zeta > t + s]$ ([15]).

(FM'_4) résulte en effet de la relation $[T > s + t] = [T > s] \cap [T \circ \theta_s > t]$, qui résulte elle-même de (TE_2).

<u>En particulier</u> : Soient X le processus introduit dans le théorème 1.1, Γ un sous-ensemble de E et $T = T_\Gamma$ le temps d'entrée dans l'ensemble Γ ; on a :

$$T_\Gamma(\omega) = \inf\{t \mid \omega \in [X_t \in \Gamma]\} \text{ s'il existe } t < \zeta(\omega) \text{ tel que } X_t(\omega) \in \Gamma \quad ,$$

et

$$T_\Gamma(\omega) = \zeta(\omega) \quad \text{si} \quad X_t(\omega) \notin \Gamma \quad \text{pour tout} \quad t < \zeta(\omega) \quad ;$$

et T_Γ satisfait aux relations (TE_1) et (TE_2). Si Γ est un ensemble borélien dans E , on peut montrer ([16]) que l'on a aussi $[T_\Gamma > t] \in F^*_t$ pour tout $t \in R_+$. Si $M_t = 1_{[T_\Gamma>t]}$, pour tout $t \in R_+$, (M_t) est donc une fonctionnelle multiplicative du processus X .

<u>Exemple</u> 2. - Soient X un processus de Markov et $(M_t)_{t\geq 0}$ une fonctionnelle multiplicative du processus X satisfaisant (FM'_4) (exemple 1). Posons, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$T_1(\omega) = \inf\{t \mid t \geq 0 \text{ et } M_t(\omega) = 0\} \text{ , s'il existe } t < \zeta(\omega) \text{ tel que } M_t(\omega) = 0 \text{ ,}$$

et

$$T_1(\omega) = \zeta(\omega) \quad \text{si} \quad M_t(\omega) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad t < \zeta(\omega) \quad .$$

La fonction T_1 ainsi définie satisfait (TE_1), (TE_2) (à cause de (FM'_4)) et (TE_3) (à cause de la relation $[T_1 > t] = [M_t > 0]$). Il lui correspond donc une fonctionnelle multiplicative $N_t = 1_{[T_1>t]}$.

Si M_t est elle-même obtenue à partir d'une fonction T (exemple 1), alors $M_t = N_t$ pour tout $t \in R_+$.

([15]) Toute fonctionnelle multiplicative vérifiant (FM'_4) est dite parfaite.
([16]) Cf. par exemple [3], exposé n° 5, p. 9.

Exemple 3 (Fonctionnelles multiplicatives de type intégral).

Soit X un processus de Markov à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, tel que, pour tout $t \in R_+$, l'application $(u , \omega) \to X_u(\omega)$ de $[0 , t[\times [\zeta > t]$ dans $\mathcal{B}$ soit mesurable lorsque $[0 , t[$ est muni de sa tribu borélienne, et $[\zeta > t]$ de la tribu F_t^* , et soit h une fonction positive de $G(E , \mathcal{B}^*)$. Posons :

$$M_t(\omega) = \exp(- \int_0^t h(X_u(\omega))\, du \quad \text{si} \quad \omega \in [\zeta > t] \quad ,$$

et

$$M_t(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \notin [\zeta > t] \quad .$$

$(M_t)_{t \geq 0}$ est une fonctionnelle multiplicative du processus X satisfaisant $(FM_4^!)$.

Cas particulier : $h = \lambda = Cte$ donne la fonctionnelle $M_t = \exp(- \lambda t)\, 1_{[\zeta > t]}$.

3. Fonctionnelles multiplicatives de Markov et sous-processus.

A tout sous-processus correspond une fonctionnelle multiplicative :

THÉORÈME 3.1. - Soient $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, et $(\hat{X} , \gamma)$, $\hat{X} = \{\hat{\Omega} , \hat{\zeta} , (\hat{X}_t) , \hat{\mathcal{M}} , (\hat{P}_x) , (\hat{\theta}_t)\}$, un sous-processus de X .

Alors, il existe une fonctionnelle multiplicative $(N_t)_{t \geq 0}$ du processus X , et une seule, à une équivalence près, telle que :

Pour tout $t \in R_+$, $x \in E$, $\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathcal{M})] = N_t \circ \gamma$ $\hat{P}_x$ presque sûrement.

- L'unicité, à une équivalence près, résulte du corollaire 2 de la proposition 2.3, et de la définition 3.2.

- Pour montrer l'existence de $(N_t)_{t \geq 0}$, partons de la famille $(M_t)_{t \geq 0}$ de fonctions qui existe d'après (SM_5).

D'après le théorème 2.1, le problème est de "régulariser" (M_t) pour rendre l'application $t \to M_t(\omega)$ continue à droite et décroissante pour tout ω , et pas seulement P_x presque sûrement.

Pour tout $p , q \in R_+$, soit

$$A_{p,q} = [M_{p+q} \neq M_p \times M_q \circ \theta_p] \cap [\zeta > p + q] \quad .$$

D'après le théorème 2.1, 1°, $P_x(A_{p,q}) = 0$ pour tout $x \in E$, donc $P_\mu(A_{p,q}) = 0$ pour toute répartition **initiale** μ . Soit

$$A = \bigcup_{p,q \in Q_+} A_{p,q} \quad (\ Q_+ \text{ désignant l'ensemble des rationnels positifs}) \quad .$$

On a alors

$$P_\mu(A) = 0 \ , \text{ pour tout } \mu \quad ,$$

$$M_{p+q}(\omega) = M_p(\omega)\ M_q(\theta_p(\omega)) \quad \text{pour tout } p , q \in Q_+$$

et

$$\omega \in [\zeta > p + q] \cap \complement A \quad .$$

Il en résulte que, pour $\omega \notin A$, l'application $p \to M_p(\omega)$ de Q_+ dans $[0 , 1]$ est décroissante.

Posons alors

$$N_t(\omega) = \lim_{p \downarrow t, p \in Q_+} M_p(\omega) \quad \text{pour } \omega \notin A$$

$$N_t(\omega) = 1_{[\zeta > t]}(\omega) \quad \text{pour } \omega \in A \quad .$$

N_t est F^*-mesurable, et, d'après le théorème 2.1, 2°,

$$P_x[N_t \neq M_t] = 0$$

pour tout $t \in R_+$ et $x \in E$, donc

$$P_\mu[N_t \neq M_t] = 0$$

pour tout μ . Il en résulte que N_t est F_t^*-mesurable sur $[\zeta > t]$ pour tout t , donc que $(N_t)_{t \geq 0}$ vérifie (FM_3). Il est clair que $(N_t)_{t \geq 0}$ vérifie (FM_1) et (FM_2).

Enfin, pour montrer que $(N_t)_{t \geq 0}$ vérifie (FM_4), il suffit de montrer que, s , t et x étant fixés,

$$P_x(\theta_s^{-1}[N_t \neq M_t]) = 0 \quad .$$

Or, d'après la propriété de Markov appliquée au processus X ,

$$[P_x(\theta_s^{-1}[N_t \neq M_t]) = E_x[P_{X_s}[N_t \neq M_t]] = 0$$

C. Q. F. D.

Inversement, à toute fonctionnelle multiplicative correspond un sous-processus.

THÉORÈME 3.2. - <u>Soient</u> X <u>un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable</u> $(E , \mathcal{B})$, <u>et</u> $(M_t)_{t\geq 0}$ <u>une fonctionnelle multiplicative du processus</u> X .

<u>Alors, il existe un sous-processus canonique</u> $(\tilde{X} , \gamma)$ <u>de</u> X <u>et un seul, tel que : pour tout</u> $t \in R_+$ <u>et</u> $x \in E$:

(1) $$\tilde{P}_x[\tilde{\zeta} > t \mid \tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{M})] = M_t \circ \gamma \qquad \tilde{P}_x \text{ presque sûrement} \quad ;$$

<u>et la fonction de transition</u> $\tilde{P}_t(x , \Gamma)$ <u>de</u> $\tilde{X}$ <u>est donnée par</u>

$$\tilde{P}_t(x , \Gamma) = E_x[1_\Gamma \circ X_t . M_t] = \int_{[X_t \in \Gamma]} M_t \, dP_x \quad .$$

- L'unicité résulte de la proposition 2.3 et de son corollaire 1.

- Pour montrer l'existence, ([17]) nous avons à construire pour chaque $x \in E$, une probabilité $\tilde{P}_x$ sur $\tilde{\mathcal{M}}$ (cf. chapitre 2, n° 1) telle que :

1. $$\tilde{X} = \{\tilde{\Omega} , \tilde{\zeta} , (\tilde{X}_t) , \tilde{\mathcal{M}} , (\tilde{P}_x) , (\tilde{\theta}_t)\} \text{ est un processus de Markov} \quad .$$

2. $$\tilde{P}_x(\tilde{\gamma}^{-1}(B)) = P_x(B) \ , \ \forall \ B \in \mathcal{M} \quad (SM_4) \quad .$$

3. $$\tilde{P}_x(\tilde{\gamma}^{-1}(B) \cap [\tilde{\zeta} > t]) = \int_B M_t \, dP_x \ , \ \forall \ B \in \mathcal{M} \quad \text{(relation (1))} \quad .$$

Supposons le problème résolu.

(3) s'écrit encore

(1') $$\tilde{P}_x(B \cap [\zeta > t] \times]t , +\infty)) = \int 1_{B \cap [\zeta > t]} \times M_t \, dP_x \quad .$$

D'autre part, les axiomes (FM_1) et (FM_2) impliquent l'existence, pour chaque

([17]) Cf. en appendice une autre démonstration de l'existence.

$\omega \in \Omega$, d'une probabilité $\Gamma \to \alpha(\omega , \Gamma)$ sur $([0 , +\infty] , \mathcal{B}_{[0,+\infty]})$ [18] telle que

$$\alpha(\omega ,]t , +\infty]) = M_t(\omega) , \quad t \in R_+ \quad .$$

(1') s'écrit alors

$$\widetilde{P}_x(B \cap [\zeta > t] \times]t , +\infty]) = \int 1_{B\cap[\zeta>t]}(\omega)\ \alpha(\omega ,]t , +\infty])\ dP_x(\omega) \quad ;$$

mais si, pour tout $A \subset \Omega \times [0 , +\infty] = \widetilde{\Omega}$, et $\omega \in \Omega$, on pose

$$A^\omega = \{\lambda \mid \lambda \in [0 , +\infty] \text{ et } (\omega , \lambda) \in A\} \quad ,$$

pour $A = B \cap [\zeta > t] \times]t , +\infty]$, on a :

$$1_{A^\omega} = 1_{B\cap[\zeta>t]}(\omega)\ 1_{]t,+\infty]}$$

donc

(1") $$\widetilde{P}_x(A) = \int \alpha(\omega , A^\omega)\ dP_x(\omega) \quad .$$

La relation (1") va nous permettre inversement de construire $\widetilde{P}_x$:

Pour tout $A \subset \widetilde{\Omega}$, $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0,+\infty]}$, $A^\omega \in \mathcal{B}_{[0,+\infty]}$, et la fonction $\omega \to \alpha(\omega , A^\omega)$ est $\mathcal{M}$-mesurable (en vertu du lemme 0.1). Posons

$$\widetilde{P}_x(A) = \int \alpha(\omega , A^\omega)\ dP_x(\omega)$$

pour tout $x \in E$ et $A \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0,+\infty]}$; $\widetilde{P}_x(A)$ est une probabilité sur $\mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0,+\infty]}$, donc aussi sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ qui est contenu dans $\mathcal{M} \times \mathcal{B}_{[0,+\infty]}$. D'après ce qui a déjà été vu, la relation (1') est satisfaite pour tout $B \in \mathcal{M}$, donc aussi 3, et 2 résulte de ce que, si $A = B \times [0 , +\infty] = \widetilde{\gamma}^{-1}(B)$; $(B \in \mathcal{M})$,

$$\alpha(\omega , A^\omega) = 1_B(\omega) \quad .$$

Il reste à montrer que $\widetilde{X}$ est un processus de Markov, c'est-à-dire que les axiomes (M_4) et (M_5) sont satisfaits :

α. Pour tout t , x et $\Gamma \in \mathcal{B}$, soit

---

[18] $\mathcal{B}_{[0,+\infty]}$ désignant la tribu borélienne de $[0 , +\infty]$.

$$\tilde{P}_t(x\ ,\ \Gamma)\ =\ \tilde{P}_x[\tilde{X}_t \in \Gamma]$$

d'après la relation 1', où $B = [X_t \in \Gamma]$,

$$\tilde{P}_t(x\ ,\ \Gamma)\ = E_x[1_{[X_t \in \Gamma]} \times M_t] = E_x[1_\Gamma \circ X_t \times M_t] \quad .$$

Il résulte alors du théorème 4.1 [19] que $\{\tilde{P}_t(x\ ,\ \Gamma)\}$ est une fonction de transition sous-markovienne sur $(E\ ,\ \mathcal{B}^*)$; (M_4) est donc satisfait.

β. Montrons enfin que

$$\tilde{P}_x[\tilde{X}_t \in \Gamma \mid \tilde{F}_s] = \tilde{P}_{t-s}(\tilde{X}_s\ ,\ \Gamma)$$

si $s \leqslant t$, $\Gamma \in \mathcal{B}$, $x \in E$; c'est-à-dire

$$\tilde{P}_x([\tilde{X}_t \in \Gamma] \cap A)\ =\ \int_A \tilde{P}_{t-s}(\tilde{X}_s\ ,\ \Gamma)\ d\tilde{P}_x \quad \text{pour tout} \quad A \in \tilde{F}_s \quad .$$

D'une part, tout $A \in \tilde{F}_s$ est de la forme $\tilde{\gamma}^{-1}(B) \cap [\tilde{\zeta} > s]$, où $B \in F_s$; d'autre part,

$$\tilde{P}_x([\tilde{X}_t \in \Gamma] \cap [\tilde{\zeta} > s] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(B)) = \tilde{P}_x([\tilde{\zeta} > t] \cap \tilde{\gamma}^{-1}[X_t \in \Gamma] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(B))$$

$$= \int_{[X_t \in \Gamma] \cap B} M_t\ dP_x$$

d'après la proposition 2.2 ;

$$= \int_B 1_{[X_t \in \Gamma]}\ M_s \times M_{t-s} \circ \theta_s\ dP_x$$

$$= \int 1_B \times M_s \times 1_\Gamma \circ X_{t-s} \circ \theta_s \times M_{t-s} \circ \theta_s\ dP_x$$

$$= E_x[1_B \times M_s \times E_{X_s}[1_\Gamma \circ X_{t-s} \cdot M_{t-s}]]$$

d'après la propriété de Markov (proposition 1.3).

Enfin,

$$E_y[1_\Gamma \circ X_{t-s} \times M_{t-s}] = \tilde{P}_y[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma] \quad ,$$

---

[19] La démonstration de ce théorème, donnée au chapitre 4, est indépendante des résultats de ce numéro.

encore d'après la proposition 2.2.

Il en résulte que, si $A = \tilde{\gamma}^{-1}(B) \cap [\tilde{\zeta} > s]$, $B \in F_s$,

$$\tilde{P}_x([\tilde{X}_t \in \Gamma] \cap A) = \int 1_B\, M_s\, \hat{P}_{X_s}[\hat{X}_{t-s} \in \Gamma]\, dP_x$$

$$= \int_A \tilde{P}_{\tilde{X}_s}[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma]\, dP_x \qquad ,$$

toujours d'après la proposition 2.2 ; d'où le résultat, puisque

$$\tilde{P}_{t-s}(\tilde{X}_s , \Gamma) = \tilde{P}_{\tilde{X}_s}[\tilde{X}_{t-s} \in \Gamma] \qquad .$$

DÉFINITION 3.2. - <u>Soient</u> X <u>un processus de Markov stationnaire</u>, $(\hat{X} , \gamma)$ <u>un sous-processus de</u> X , <u>et</u> $(M_t)_{t\geq 0}$ <u>une fonctionnelle multiplicative de</u> X . <u>On dit que la fonctionnelle multiplicative</u> $(M_t)_{t\geq 0}$ <u>est associée au sous-processus</u> $(\hat{X} , \gamma)$ <u>si, pour tout</u> $t \in R_+$ <u>et</u> $x \in E$,

$$\hat{P}_x[\hat{\zeta} > t \mid \gamma^{-1}(\mathfrak{M})] = M_t \circ \gamma \quad \hat{P}_x \text{ presque sûrement} \qquad .$$

Il résulte alors des théorèmes 3.1, 3.2 et de la proposition 2.3 (chapitre 2) qu'il existe une application biunivoque de l'ensemble des classes de sous-processus équivalents d'un processus X , sur l'ensemble des classes de fonctionnelles multiplicatives équivalentes de X . Cette application fait correspondre à toute classe de sous-processus équivalent, la classe des fonctionnelles multiplicatives associées.

<u>Application</u> : <u>Construction de sous-processus d'un processus donné</u>. - A chacun des exemples de fonctionnelle multiplicative donné au n° 2 ci-dessus, le théorème 3.2 permet d'associer un sous-processus du processus donné.

En particulier, si on reprend l'exemple 1, le sous-processus introduit par le théorème 3.2 est identique au sous-processus canonique associé (proposition 2.1) au sous-processus construit dans l'exemple 1 du n° 2 du chapitre 2.

Chapitre 4. - Semi-groupes subordonnés.

1. Définition et exemples.

L'objet du présent chapitre est l'étude des fonctions de transition des sous-processus d'un processus de Markov donné.

Le corollaire de la proposition 2.2 introduit la définition suivante :

DÉFINITION 4.1. - Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et $\{P_t\}$ un semi-groupe de transformations linéaires positives contractantes de $G(E, \mathcal{B})$.

On appelle semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$, tout semi-groupe $\{Q_t\}$ de transformations linéaires de $G(E, \mathcal{B}^*)$ (20) telles que :

(SB) Pour tout $f \in G(E, \mathcal{B}^*)$, $f \geqslant 0$, tout $x \in E$ et tout $t \in R_+$, $0 \leqslant Q_t\, f(x) \leqslant P_t\, f(x)$.

(CD) Pour tout $x \in E$, la fonction $t \to Q_t\, 1(x)$ est continue à droite.

D'après (SB), pour tout $t \in R_+$, Q_t est une transformation positive contractante $(\|Q_t\, f\| \leqslant \|f\|,\ f \in G)$ de $G(E, \mathcal{B}^*)$.

Exemple 1. - Soient $\lambda > 0$, et $Q_t\, f(x) = \exp(-\lambda t)\, P_t\, f(x)$ pour $t \in R_+$, $x \in E$. $\{Q_t\}$ est un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$.

Exemple 2. - Soient X un processus de Markov stationnaire sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, et $\{P_t\}$ le semi-groupe associé à sa fonction de transition.

On a $P_t\, 1(x) = P_x[\zeta > t]$, donc $\{P_t\}$ satisfait l'axiome (CD) ; $\{P_t\}$ est donc subordonné à lui-même.

Si $(\hat{X}, \gamma)$ est un sous-processus de X, et si $\{Q_t\}$ est le semi-groupe de transformations de $G(E, \mathcal{B}^*)$ associé à la fonction de transition de $\hat{X}$, $\{Q_t\}$ est un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$ (corollaire de la proposition 2.2).

Exemple 3. - Cf. ci-dessous le théorème 4.1.

---

(20) Où $\mathcal{B}^*$ désigne la tribu des ensembles universellement mesurables (cf. chapitre 0, n° 3) par rapport à $(E, \mathcal{B})$.

2. Semi-groupes subordonnés et fonctionnelles multiplicatives.

THÉORÈME 4.1. - *Soient* X *un processus de Markov stationnaire sur l'espace mesurable* $(E , \mathcal{B})$, $\{P_t\}$ *le semi-groupe associé à sa fonction de transition, et* $\{M_t\}_{t \geq 0}$ *une fonctionnelle multiplicative du processus* X .

Alors, si on pose

$$Q_t\, f(x) = E_x[f \circ X_t . M_t]$$

pour tout $x \in E$, $t \in R_+$ *et* $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$, $\{Q_t\}$ *est un semi-groupe subordonné à* $\{P_t\}$, *qui est dit* associé *à la fonctionnelle* $(M_t)_{t \geq 0}$.

Cette proposition résulte évidemment du théorème 3.2 et de l'exemple 2 ci-dessus.

Donnons une démonstration directe. D'abord, pour tout $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$, $Q_t\, f \in G(E , \mathcal{B}^*)$ (chapitre 1, n° 4 b, remarque 1).

Montrons ensuite la relation $Q_{t+s} = Q_t \circ Q_s$: soit $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$, et $x \in E$

$$Q_{t+s}\, f(x) = E_x[f \circ X_{t+s} \times M_{t+s}] = \int_{[\zeta > t+s]} f \circ X_{t+s} \times M_{t+s}\, dP_x \quad .$$

Soit $\varphi : \Omega \to R$ l'application définie par

$$\varphi(\omega) = f(X_s(\omega)) \quad \text{si} \quad \omega \in [\zeta > s] \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \omega \notin [\zeta > s] \quad .$$

On a

$$\varphi \circ \theta_t(\omega) = f(X_{t+s}(\omega)) \quad \text{si} \quad \omega \in \theta_t^{-1}[\zeta > s] = [\zeta > t + s] \quad ,$$

et

$$\varphi \circ \theta_t(\omega) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad .$$

Donc

$$\varphi \circ \theta_t\, 1_{[\zeta > t]} = f \circ X_{t+s} \times 1_{[\zeta > t+s]} \quad .$$

On a donc

$$Q_{t+s}\, f(x) = \int_{[\zeta > t]} \varphi \circ \theta_t \times M_t \times M_s \circ \theta_t\, dP_x \quad ;$$

d'où, d'après la propriété de Markov (proposition 1.3),

$$Q_{t+s} f(x) = \int_{[\zeta>t]} M_t \times E_{X_t}[\varphi\, M_s]\, dP_x = \int_{[\zeta>t]} M_t \times E_{X_t}[f \circ X_s \times M_s]\, dP_x$$

$$= \int_{[\zeta>t]} M_t \times Q_s f \circ X_t \, dP_x = Q_t Q_s f(x) \quad .$$

Si $f \geqslant 0$, $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$, la relation $0 \leqslant Q_t f(x) \leqslant P_t f(x)$ résulte de ce que $0 \leqslant M_t \leqslant 1$. Enfin la continuité à droite de $t \to Q_t 1(x)$ résulte de celle de $t \to M_t(\omega)$ (pour tout $\omega \in \Omega$) et du théorème de Lebesgue.

PROPOSITION 4.1. - Pour que deux fonctionnelles multiplicatives (M_t) et (N_t) d'un processus X soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles aient même semi-groupe associé.

Soient $\hat{X}$ est un sous-processus de X tel que (M_t) est la fonctionnelle multiplicative associée à $\hat{X}$ (chapitre 3, théorème 3.2 et définition 3.2), et $\{Q_t\}$ le semi-groupe associé à la fonction de transition de $\hat{X}$. On a (théorème 3.2) :

$$Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t M_t] \quad (f \in G(E , \mathcal{B}^*)) \quad .$$

Autrement dit, $\{Q_t\}$ est le semi-groupe associé à (M_t) . La proposition résulte alors de la proposition 2.3 du chapitre 2.

On peut aussi la démontrer à l'aide du lemme suivant et du lemme 0.2.

LEMME 4.1. - Soient X un processus de Markov stationnaire $(M_t)_{t\geqslant 0}$ une fonctionnelle multiplicative de X , et $t_0 \in R_+$. Pour tout $h : \Omega \to R$, bornée et $F^*_{t_0}$-mesurable sur $[\zeta > t_0]$, tout $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$, $s \in R_+$ et $x \in E$, on a

$$E_x[h \times M_{t_0+s} \times f \circ X_{t_0+s}] = E_x[h \times M_{t_0} \times Q_s f \circ X_{t_0}]$$

où $\{Q_s\}$ désigne le semi-groupe associé à (M_t) .

Le théorème 4.1 admet la réciproque suivante (21) :

THÉORÈME 4.2. - Soient E un espace topologique admettant une base dénombrable d'ouverts (22), et $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B}_E)$ et tel que :

(21) Cf. [2], théorème 2.2, page 18.

(22) Cf. remarque 1 ci-dessous.

1. Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \to X_t(\omega)$ est continue à droite (autrement dit, X a ses trajectoires continues à droite).

2. Si $\{P_t(x , \Gamma)\}$ est la fonction de transition de X , on a $P_0(x , E\setminus\{x\}) = 0$, pour tout $x \in E$.

Alors, si $\{Q_t\}$ est un semi-groupe de transformations de $G(E , \mathcal{B}^*)$ (*) subordonné à $\{P_t\}$ (où $\{P_t\}$ est le semi-groupe associé à la fonction de transition de X), il existe une fonctionnelle multiplicative de Markov $(M_t)_{t\geq 0}$ du processus X telle que

$$Q_t f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t] \text{ pour tout } t \in R_+ , \ x \in E \text{ et } f \in G(E , \mathcal{B}^*)$$

(autrement dit, telle que le semi-groupe $\{Q_t\}$ soit associé à (M_t)).

Pour montrer le théorème 4.2, nous établirons les résultats partiels suivants :

α. LEMME 4.1. - Pour tout $t \in R_+$, et tout $x \in E$, il existe une version $q_t(x , y)$ de la densité de la mesure $Q_t(x , dy)$ par rapport à la mesure $P_t(x , dy)$, telle que l'application $(x , y) \to q_t(x , y)$ est $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$-mesurable, et $0 \leq q_t(x , y) \leq 1$ pour tout t .

En effet, rangeons les ouverts d'une base dénombrable de la topologie de E en une suite (O_n) , et construisons par récurrence une suite (P_n) de partitions de E , $P_n = (A_n^K)_{K\in I_n}$, telle que $P_0 = \{\emptyset , E\}$, et que P_{n+1} soit la partition engendrée par les ensembles de P_n , et les ensembles O_{n+1} et $E\setminus O_{n+1}$. Pour tout n , t , x , y , soit

$$q_t^n(x , y) = Q_t(x , A_n(y))/P_t(x , A_n(y))$$

où $A_n(y)$ est l'ensemble de P_n qui contient y , si $P_t(x , A_n(y)) \neq 0$, et où $q_t^n(x , y) = 0$ si $P_t(x , A_n(y)) = 0$. D'une part, l'application

$(x , y) \to q_t^n(x , y)$ est $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$-mesurable. D'autre part, si, pour tout n , F_n désigne la tribu sur E engendrée par P_n , pour tout t , n , la suite de fonctions $y \to q_t^n(x , y)$ $(n \in N)$ est pour la mesure $P_t(x , dy)$, une martingale par rapport aux tribus (F_n) (ces propriétés sont faciles à vérifier).

Il résulte alors du lemme 0.4, que pour tout t , x , la suite de fonctions $y \to q_t^n(x , y)$ converge presque partout (pour la mesure $P_t(x , dy)$) vers une version de la densité cherchée ; or, l'ensemble des (x , y) tels que la suite

(*) On désignera dans la suite de ce numéro par $\mathcal{B}$ la tribu borélienne $\mathcal{B}_E$ de E .

$(q_t^n(x\ ,\ y))_{n\in N}$ converge est $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$-mesurable ; il suffit alors de définir $q_t(x\ ,\ y)$ par $\lim\limits_{n\infty} q_t^n(x\ ,\ y)$ lorsque cette limite existe, et par 0 ailleurs, pour obtenir une version de la densité cherchée.

On vérifie enfin que l'on a

$$Q_t(x\ ,\ O_n) = \int_{O_n} P_t(x\ ,\ dy)\ q_t(x\ ,\ y)$$

pour tout $n \in N$, $x \in E$, et $t \in R_+$; d'où le lemme 4.1.

Remarques.

a. Le raisonnement précédent demeure valable si on suppose seulement qu'il existe un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}_E$ tel que $\mathcal{B}_E$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. L'existence de la densité mesurable $q_t(x\ ,\ y)$ subsiste donc sous cette hypothèse.

b. L'hypothèse de l'existence d'une base dénombrable d'ouverts n'intervient dans la démonstration du théorème 4.2 que pour démontrer, comme ci-dessus, le lemme 4.1.

c. Il résulte de (a) et (b) que : la conclusion du théorème 4.2 subsiste si l'on remplace l'hypothèse de l'existence d'une base dénombrable pour la topologie de E , par l'une des deux hypothèses suivantes :

- Il existe un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}_E$ tel que $\mathcal{B}_E$ est la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

- Pour tout t , et tout $x \in E$, il existe pour la mesure $Q_t(x\ ,\ dy)$ une densité $q_t(x\ ,\ y)$, $(\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}^*)$-mesurable.

β. Soient $t \in R_+$, $t > 0$, et U une partie finie de $[0\ ,\ t[$ contenant 0 .

Désignons par

F_t^U la tribu sur $[\zeta > t]$ engendrée par les ensembles $[X_u \in \Gamma]$, $u \in U \cup \{t\}$, $\Gamma \in \mathcal{B}$,

F_t^{U*} la tribu sur $[\zeta > t]$ définie par : " $A \in F_t^{U*}$ " $\Longleftrightarrow$ "pour toute répartition initiale μ , il existe $A_1 \in F_t^U$ tel que $A \backslash A_1 \in F^*$, $A_1 \backslash A \in F^*$ et $P_\mu(A\backslash A_1) = P_\mu(A_1\backslash A) = 0$ ",

M_t^U , l'application de $[\zeta > t]$ dans $[0\ ,\ \infty]$ définie par :

$$M_t^U(\omega) = \prod_{i=0}^{n} q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i}(\omega)\ ,\ X_{t_{i+1}}(\omega)) \quad \text{pour tout} \quad \omega \in [\zeta > t] \qquad ,$$

où $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t$ et où $t_0 , t_1 , \dots , t_n$ est une suite strictement croissante telle que $U = \{t_i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

LEMME 4.2. – F_t^U , F_t^{U*} et M_t^U ont les propriétés suivantes :

a. $U \subset V \implies F_t^{U*} \subset F_t^{V*}$, et $F_t^{U*} \subset F_t^*$.

b. Si (U_n) est une suite croissante de parties finies de $[0 , t[$ contenant 0 et telle que $D = \bigcup_n U_n$ est dense dans $[0 , t[$, alors $\bigcup_n F_t^{U_n}$ engendre la tribu F_t .

c. Pour tout $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$, et $x \in E$,

$$Q_t\, f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t^U] \quad .$$

d. Si $U \subset V$ pour tout $x \in E$,

$$E_x[M_t^V | F_t^{U*}] = M_t^U \quad P_x \text{ presque partout sur } [\zeta > t] \ .$$

(a) résulte immédiatement des définitions.

(b) est une conséquence de la continuité à droite des trajectoires, car, si Γ est un ouvert de E , et si $s \in [0 , t[$,

$$[X_s \in \Gamma] = \bigcup_m \bigcap_{\substack{r \in D \\ s \leqslant r < s + \frac{1}{m}}} [X_r \in \Gamma] \quad .$$

(c) résulte de

$$Q_t\, f(x) = Q_{t_1} \circ Q_{t_2 - t_1} \circ \cdots \circ Q_{t - t_n}\, f(x)$$

et du corollaire de la proposition 1.2 du chapitre 1.

Il suffit de montrer (d), dans le cas où $U = \{t_0 , t_1 , \dots , t_n\}$ et $V = \{t_0 , \dots , t_i , s , t_{i+1} , \dots , t_n\}$, c'est-à-dire, (chapitre 0, n° 4, relation (γ)) de montrer que :

$$E_x[q_{s-t_i}(X_{t_i} , X_s)\; q_{t_{i+1}-s}(X_s , X_{t_{i+1}}) \mid F_t^{U*}] = q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i} , X_{t_{i+1}})$$

P_x presque partout sur $[\zeta > t]$, ou encore, que

$$\int_{\bigcap_{j=1}^{n+1}[X_{t_j}\in\Gamma_j]} q_{s-t_i}(X_{t_i}, X_s)\, q_{t_{i+1}-s}(X_s, X_{t_{i+1}})\, dP_x = \int_{\bigcap_{j=1}^{n+1}[X_{t_j}\in\Gamma_j]} q_{t_{i+1}-t_i}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})\, dP_x$$

où $\Gamma_j \in \mathcal{B}$, $0 \leqslant j \leqslant n$ et $t_{n+1} = t$, ou enfin, compte tenu du corollaire de la proposition 1.2, que

$$\int P_{s-t_i}(z , dz_1) \int_{\Gamma_{i+1}} P_{t_{i+1}-s}(z_1 , dz_2)\, q_{s-t_i}(z , z_1)\, q_{t_{i+1}-s}(z_1 , z_2)$$

$$= \int_{\Gamma_{i+1}} P_{t_{i+1}-t_i}(z , dy)\, q_{t_{i+1}-t_i}(z , y) \quad \text{pour tout} \quad z \in E \quad ,$$

relation qui résulte immédiatement de ce que

$$Q_{s-t_i} \circ Q_{t_{i+1}-s} = Q_{t_{i+1}-t_i} \quad .$$

Le lemme 4.2 est démontré.

Si (U_n) est alors une suite croissante de parties finies de $[0 , t[$, contenant 0 , (d) entraîne que, pour tout $x \in E$, $(M_t^{U_n})_{n\in N}$ est une martingale pour la mesure P_x par rapport aux tribus $(F_t^{U_n *})$; et il résulte du lemme 0.4 (chapitre 0, n° 5) que, pour toute suite croissante (U_n) de parties finies de $[0 , t[$ contenant 0 , il existe une application M_t de Ω dans $[0 , 1]$ nulle hors de $[\zeta > t]$, F_t^*-mesurable sur $[\zeta > t]$, et telle que, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\infty} M_t^{U_n}(\omega) = M_t(\omega) \qquad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t] \quad .$$

γ. LEMME 4.3. - Si (U_n) et $(\overline{U}_n)$ sont deux suites croissantes de parties finies de $[0 , t[$ contenant 0 telles que $D = \bigcup_n U_n$ et $\overline{D} = \bigcup_n \overline{U}_n$ sont denses dans $[0 , t[$, alors les fonctions M_t et $\overline{M}_t$ correspondantes sont égales P_x presque partout pour tout $x \in E$. Il suffit de le montrer si $D \subset \overline{D}$ et $U_n \subset \overline{U}_n$ pour tout n . On a alors (lemme 4.2, (d)) :

$$E_x[M_t^{\overline{U}_p} | F_t^{U_n *}] = M_t^{U_n} = E_x[M_t^{U_p} | F_t^{U_n *}]$$

pour tout x et $p \geqslant n$; donc, en passant à la limite en p ,

$$E_x[\overline{M}_t | F_t^{U_n^*}] = E_x[M_t | F_t^{U_n^*}] \qquad P_x \text{ presque sûrement pour tout } n \quad ;$$

ou encore,

$$\int_A (\overline{M}_t - M_t)\, dP_x = 0 \quad \text{pour tout} \quad A \in \bigcup_n F_t^{U_n} \quad .$$

D'où

$$\int_A (\overline{M}_t - M_t)\, dP_x = 0 \quad \text{pour tout} \quad A \in F_t^*$$

d'après le lemme 4.2 (b) ; d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant établir le lemme suivant :

LEMME 4.4. - Il existe une famille $(M_t^0)_{t\geq 0}$ d'applications de Ω dans R_+ telles que :

1. $0 \leq M_t^0 \leq 1$; $M_t^0(\omega) = 0$ pour $\omega \in [\zeta \leq t]$; M_t^0 est F_t^*-mesurable sur $[\zeta > t]$.

2. $Q_t\, f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t^0]$ pour tout $t \in R_+$, $x \in E$ et $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$.

3. Pour tout $x \in E$, $t > 0$, $s \geq 0$

$$M_{t+s}^0 = M_s^0 \times M_t^0 \circ \theta_s \qquad P_x \text{ presque sûrement sur } [\zeta > t + s] \quad .$$

Pour $t > 0$, définissons M_t^0 comme précédemment, au moyen d'une suite (U_n) croissante de parties finies de $[0 , t[$ contenant 0 et telle que $\bigcup_n U_n = D$ est dense dans $[0 , t[$. (Suite dont le choix n'importe pas d'après le lemme 4.3.) Et posons

$$M_0^0(\omega) = q_0(X_0(\omega) , X_0(\omega)) \quad \text{pour} \quad \omega \in [\zeta > 0] \quad ,$$

et

$$M_0^0(\omega) = 0 \quad \text{pour} \quad \omega \notin [\zeta > 0] \quad .$$

Pour $t > 0$, (1) et (2) résultent du lemme 4.2, et $Q_0\, f(x) = E_x[f \circ X_0 \times M_0^0]$ résulte de la relation

$$Q_0\, f(x) = \int P_0(x , dy)\, q_0(x , y)\, f(y) = \int q_0(x , X_0)\, f \circ X_0\, dP_x \quad ,$$

$$= \int q_0(X_0 , X_0)\, f \circ X_0\, dP_x \quad ,$$

compte tenu de l'hypothèse selon laquelle

$$P_0(x , E\setminus\{x\}) = P_x[X_0 \neq x] = 0 \quad .$$

Montrons d'abord (3) dans le cas où $t > 0$ et $s > 0$.

Soient D la réunion de l'ensemble des rationnels de $[0 , t + s[$ et de l'ensemble des $s + r$, où r est un rationnel de $[0 , t[$, et (U_n) une suite croissante de parties finies de D contenant 0 et s et telle que $\bigcup_n U_n = D$.

On a, d'après la définition de $M_{t+s}^{U_n}$:

$$M_{t+s}^{U_n}(\omega) = M_s^{U_n\cap[0,s[}(\omega) \times M_t^{U_n\cap[s,s+t[-s}(\theta_s(\omega))$$

pour tout $\omega \in [\zeta > t + s]$, et $n \in N$. D'où le résultat, d'après le lemme 4.3, en passant à la limite en n.

Si maintenant, $s = 0$, il suffit de montrer, puisque $0 \leqslant M_0 \leqslant 1$, que

$$E_x[M_t^0] = E_x[M_0^0\ M_t^0]$$

ou encore que

$$E_x[M_t^U] = E_x[M_0^0\ M_t^U] \quad \text{pour tout } U \quad .$$

Or, si $U = \{t_0 , t_1 , \dots , t_n\}$, cette relation résulte de la relation

$$Q_t^1(x) = Q_0 \circ Q_{t_1} \circ Q_{t_2-t_1} \circ \dots \circ Q'_{t-t_n} 1(x) = Q_{t_1} \circ \dots \circ Q_{t-t_n} 1(x)$$

et de l'hypothèse selon laquelle $P_0(x , E\setminus\{x\}) = 1$. Le lemme 4.4 est établi.

δ. Il reste à régulariser la famille $(M_t^0)_{t\geqslant 0}$, pour obtenir une fonctionnelle multiplicative, par un procédé analogue à celui déjà utilisé dans la démonstration du théorème 3.1.

Pour tout $p , q \in R_+$, $p > 0$, $q > 0$, soit

$$A_{p,q} = [M_{p+q}^0 \neq M_p^0 \times M_q^0 \circ \theta_q] \cap [\zeta > p + q] \quad .$$

Pour tout $x \in E$, $P_x(A_{p,q}) = 0$, d'après le lemme 4.4, (2), donc $P_\mu(A_{p,q}) = 0$

pour toute répartition initiale μ .

Soit

$$A = \bigcup_{p,q \in Q_+^*} A_{p,q} \qquad (Q_+^* \text{ désignant l'ensemble des rationnels } > 0) .$$

On a $P_\mu(A) = 0$ pour toute répartition initiale μ , et

$$M^0_{p+q}(\omega) = M^0_p(\omega) \; M^0_q(\theta_p(\omega))$$

pour tous p , $q \in Q_+$ et $\omega \in [\zeta > p + q] \cap \complement A$. Il résulte que, pour $\omega \notin A$, l'application $p \to M_p(\omega)$ de Q_+^* dans $[0 , 1]$ est décroissante.

Posons alors, pour tout $t \in R_+$:

$$M_t(\omega) = \lim_{p \downarrow t, p \in Q_+} M^0_p(\omega) \quad \text{pour} \quad \omega \notin A$$

$$M_t(\omega) = 1_{[\zeta > t]}(\omega) \quad \text{pour} \quad \omega \in A \qquad .$$

La famille $(M_t)_{t \geq 0}$ ainsi définie satisfait aux axiomes (FM_1) et (FM_2), et, pour tout t , M_t est F^*-mesurable. Montrons que, pour tout t et $x \in E$, $M_t = M^0_t$ P_x presque sûrement. Il en résultera que, pour tout t , $M_t = M^0_t$ P_μ presque sûrement pour toute répartition initiale μ , donc, compte tenu du lemme 4.4, que $(M_t)_{t \geq 0}$ satisfait aussi à (FM_3), et que $Q_+ f(x) = E_x[f \circ X_t \times M_t]$ pour tout $t \in R_+$, $x \in E$, et $f \in G(E , \mathcal{B}^*)$.

On a d'abord, pour tout $x \in E$, $M_t \leq M^0_t$ P_x presque sûrement, puisque, d'après le lemme 4.4, (3), $M^0_p \leq M^0_t$ P_x presque sûrement pour tout $p \geq t$, $p \in Q_+$.

Il suffit donc de montrer que $E_x[M^0_t] = E_x[M_t]$. Or $E_x[M^0_t] = Q_t \, 1(x)$ d'après le lemme 4.4, (2), et

$$E_x[M_t] = \lim_{\substack{p \downarrow t \\ p \in Q_+}} E_x[M^0_p] = \lim_{\substack{p \downarrow t \\ p \in Q_+}} Q_p \, 1(x) = Q_t \, 1(x)$$

d'après l'hypothèse de continuité à droite de l'application $t \to Q_t \, 1(x)$.

Il reste à montrer que (M_t) satisfait à (FM_4) ; d'après le lemme 4.4, (3), et ce qui précède, on a $M_{t+s} = M_s \times M_t \circ \theta_s$ P_x presque sûrement sur $[\zeta > t + s]$.

pour $t > 0$ et $s \geq 0$; et, en faisant tendre t vers 0 par valeurs rationnelles dans cette relation, on obtient, puisque (FM_2) est satisfaite, que $M_s = M_s \times M_0 \circ \theta_s$ P_x presque sûrement sur $[\zeta > s]$.

$(M_t)_{t \geq 0}$ satisfait donc (FM_4), et le théorème 4.2 est démontré.

Appendice 1. - Sur les temps terminaux (cf. [2], page 23).

Nous allons donner ci-dessous une autre démonstration du théorème 3.2, dans le cas où la fonctionnelle multiplicative $(M_t)_{t \geq 0}$ est parfaite.

Soient $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathcal{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, et $(M_t)_{t \geq 0}$ une fonctionnelle multiplicative parfaite ([23]) du processus X.

Pour tout t, ω, soit $A_t(\omega) = -\operatorname{Log} M_t(\omega)$ (en posant $-\operatorname{Log}(0) = +\infty$). $(A_t)_{t \geq 0}$ est une famille d'applications de Ω dans $\overline{R}_+ = [0 , +\infty]$ ayant les propriétés suivantes :

(FA_1) Pour tout $t \in R_+$, $0 \leq A_t \leq +\infty$, et $A_t(\omega) = +\infty$ pour tout $\omega \in [\zeta \leq t]$.

(FA_2) Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \to A_t(\omega)$ de R_+ dans $\overline{R}_+$ est continue à droite et croissante.

(FA_3) Pour tout $t \in R_+$, la restriction de A_t à $[\zeta > t]$ est F_t^*-mesurable.

(FA_4') Pour tout $s , t \in R_+$,

$$A_{s+t}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\theta_s(\omega)) \quad \text{peur tout} \quad \omega \in [\zeta > s]$$

(toute famille $(A_t)_{t \geq 0}$, vérifiant les relations (FA_1), (FA_2), (FA_3) et (FA_4'), est appelée une fonctionnelle additive parfaite du processus de Markov X ; cf. à ce sujet [2], page 57).

Comme au chapitre 2 (n° 2, exemple 2), posons

$$\tilde{\Omega} = \Omega \times [0 , +\infty] \text{ et } \tilde{\gamma}(\omega , \lambda) = \omega \text{, pour tout } (\omega , \lambda) \in \tilde{\Omega} \quad ;$$

posons aussi

$$R(\omega , \lambda) = \inf\{t \mid t \geq 0 \text{ et } \lambda \leq A_t(\omega)\} \text{ pour tout } (\omega , \lambda) \in \tilde{\Omega} \quad ,$$

([23]) Cf. chapitre 3, n° 2, exemple 1.

$\hat{X}_t(\omega , \lambda) = X_t(\omega)$ et $\hat{\theta}_t(\omega , \lambda) = (\theta_t(\omega) , \lambda - A_t(\omega))$ pour tout

$(\omega , \lambda) \in [R > t]$

et

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathcal{B}_{(0,+\infty)} \quad ,$$

où $\mathcal{B}_{(0,+\infty)}$ est la tribu borélienne de $(0 , +\infty)$. Comme R satisfait la relation :

$$R(\omega , \lambda) > t \iff \lambda > A_t(\omega) \quad ,$$

$\hat{\theta}_t$ applique $\tilde{\Omega}$ dans $\tilde{\Omega}$ (plus précisément, $[R > t]$ dans $[R > 0]$).

Nous allons construire un sous-processus $(\hat{X} , \tilde{\gamma})$ du processus X , de la forme

$$\hat{X} = \{\tilde{\Omega} , R , (\hat{X}_t) , \hat{\mathcal{M}} , \hat{P}_x , (\hat{\theta}_t)\}$$

tel que, pour tout $x \in E$,

(1) $\qquad \hat{P}_x[R > t \mid \tilde{\gamma}^{-1}(\mathcal{M})] = M_t \circ \tilde{\gamma} \qquad \hat{P}_x$ presque sûrement .

α. Les termes $\tilde{\Omega}$, R , $(\hat{X}_t)$, $(\hat{\theta}_t)$ satisfont aux relations (SM_1), (SM_2) , (SM_3) , ainsi qu'aux relations (M_1) , (M_2) , (M_3).

Vérifions par exemple (SM_3) : soit

$$A = [X_s \in \Gamma] \quad ;$$

$$\tilde{\gamma}^{-1}(A) = [X_s \in \Gamma] \times (0 , +\infty) \quad ,$$

d'où

$$(\omega , \lambda) \in \hat{\theta}_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [R > u]) \iff \begin{cases} \lambda > A_t(\omega) , \quad \theta_t(\omega) \in [X_s \in \Gamma] \\ \text{et } \lambda - A_t(\omega) > A_u(\theta_t(\omega)) \end{cases} \quad ;$$

mais, d'après (FA_4') ,

$$A_{t+u}(\omega) = A_t(\omega) + A_u(\theta_t(\omega))$$

si $\lambda > A_t(\omega)$ (d'où il résulte, d'après (FA_1), que $\zeta(\omega) > t$), donc

$$(\omega , \lambda) \in \hat{\theta}_t^{-1}(\tilde{\gamma}^{-1}(A) \cap [R > u]) \iff \begin{cases} \lambda > A_t(\omega) , & \theta_t(\omega) \in A \\ \text{et} \quad \lambda - A_t(\omega) > A_{t+u}(\omega) - A_t(\omega) \end{cases}$$

$$\iff \lambda > A_t(\omega) , \quad \theta_t(\omega) \in A \quad \text{et} \quad \lambda > A_{t+u}(\omega)$$

$$\iff (\omega , \lambda) \in \tilde{\gamma}^{-1}(\theta_t^{-1}(A)) \cap [R > t + u] \quad ,$$

d'où (SM_3).

β. Soit α la mesure sur $[0 , + \infty)$ définie par

$$\alpha(D) = \int_0^{+\infty} 1_D(t) \, e^{-t} \, dt \quad \text{pour tout } D \in \mathcal{B}_{[0,+\infty)} \quad ;$$

α est une probabilité sur $\mathcal{B}_{[0,+\infty)}$.

Pour tout $x \in E$, soit $\hat{P}_x = P_x \otimes \alpha$; $\hat{P}_x$ est une probabilité sur l'espace mesurable $(\tilde{\Omega} , \hat{\mathcal{M}})$.

- a. On a d'abord, pour tout $A \in \mathcal{M}$,

$$\hat{P}_x[R > t] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A) = \int_A M_t \, dP_x = \int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} M_t \circ \tilde{\gamma} \, d\hat{P}_x$$

$$\hat{P}_x[R > t] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A) = \iint_{\Omega \times [0,+\infty)} 1_A(\omega) \, 1_{[R>t]}(\omega , \lambda) \, P_x(d\omega) \, \alpha(d\lambda)$$

$$= \int_A P_x(d\omega) \int_{[0,+\infty)} 1_{]A_t(\omega),+\infty)}(\lambda) \, \alpha(d\lambda)$$

d'après la relation $R(\omega , \lambda) > t \iff \lambda > A_t(\omega)$

$$= \int_A P_x(d\omega) \int_{A_t(\omega)}^{+\infty} e^{-t} \, dt = \int_A e^{-A_t(\omega)} \, P_x(d\omega)$$

$$= \int_A M_t \, dP_x = \int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} M_t \circ \tilde{\gamma} \, d\hat{P}_x \quad .$$

- b. On a ensuite,

$$\hat{P}_x[\hat{X}_{s+u} \in \Gamma \mid \hat{F}^*_s] = \hat{P}_{\hat{X}_s}[\hat{X}_u \in \Gamma] \qquad P_x \text{ presque sûrement} \quad .$$

En effet, remarquons d'abord que tout $\hat{A} \in \hat{F}_s$ est de la forme $[R > s] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A)$, où $A \in F_s$.

(Il suffit de le vérifier, pour les $\hat{A}$ de la forme $\bigcap_{i=1}^{n} [\hat{X}_{s_i} \in \Gamma_i]$, où $0 \leqslant s_1 \leqslant \dots \leqslant s_n = s$, $\Gamma_i \in \mathcal{B}$, $\forall$ i .)

Il suffit donc de montrer que :

$$\hat{P}_s([\hat{X}_{s+u} \in \Gamma] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A)) = \int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} \hat{P}_{\hat{X}_s}[\hat{X}_u \in \Gamma] \, d\hat{P}_x \quad \text{pour tout } A \in F_s \quad .$$

Or, d'après (a), on a d'une part :

$$\hat{P}_x([\hat{X}_{s+u} \in \Gamma] \cap \tilde{\gamma}^{-1}(A)) = \hat{P}_x[R > s+u] \cap \tilde{\gamma}^{-1}([X_{s+u} \in \Gamma] \cap A)$$

$$= \int_A 1_\Gamma \circ X_{s+u} \times M_{s+u} \, dP_x$$

$$= \int_A 1_\Gamma \circ X_u \circ \theta_s \times M_s \times M_u \circ \theta_s \, dP_x$$

et, d'après la propriété de Markov (chapitre 1, n° 4, proposition 1.3),

$$= \int_A M_s \times E_{X_s}[1_\Gamma \circ X_u \times M_u] \, dP_x$$

d'autre part :

$$\hat{P}_y[\hat{X}_u \in \Gamma] = E_y[1_\Gamma \circ X_u \times M_u]$$

d'où,

$$\int_{\tilde{\gamma}^{-1}(A)} \hat{P}_{\hat{X}_s}[\hat{X}_u \in \Gamma] \, d\hat{P}_x = \int_A M_s \times E_{X_s}[1_\Gamma \circ X_u \times M_u] \, dP_x$$

(toujours d'après (a)), d'où (b).

- c. Il résulte alors de (a) et (b), que, si on pose $\hat{X} = \{\hat{\Omega} , R , (\hat{X}_+) , \hat{\mathfrak{M}} , (\hat{P}_\cdot) , (\hat{\theta}_+)\}$, $(\hat{X} , \tilde{\gamma})$ est un sous-processus de X

satisfaisant la relation (1). On en déduit le théorème 3.2, compte tenu de la proposition 2.1 (chapitre 2, n° 2).

Appendice 2. - Construction d'un processus non interrompu à partir d'un processus interrompu, par "adjonction d'un point à l'infini".

a. Soit $(E , \mathcal{B})$ un espace mesurable ; soit δ un objet tel que $\delta \notin E$, et $\hat{E} = E \cup \{\delta\}$, et soit $\hat{\mathcal{B}}$ la tribu sur $\hat{E}$ engendrée par $\mathcal{B}$

$$[\text{c'est-à-dire } \hat{\mathcal{B}} = \{A \cup \{\delta\} \mid A \in \mathcal{B}\} \cup \mathcal{B}] \quad ;$$

$(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ est appelé l'espace mesurable obtenu à partir de $(E , \mathcal{B})$ par adjonction du point à l'infini δ .

Toute mesure μ sur $(E , \mathcal{B})$, telle que $\mu(E) \leq 1$, se prolonge en une probabilité $\hat{\mu}$ sur $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ en posant

$$\hat{\mu}(A \cup \{\delta\}) = \mu(A) + 1 - \mu(E) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B} \quad .$$

L'application qui à tout $f \in G(E , \mathcal{B})$ associe le prolongement $\hat{f}$ de f à $\hat{E}$, tel que $\hat{f}(\delta) = 0$, est un isomorphisme de l'espace de Banach $G(E , \mathcal{B})$ dans l'espace de Banach $G(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$.

Toute transformation linéaire contractante P de $G(E , \mathcal{B})$ se prolonge en une transformation linéaire contractante $\hat{P}$ de $G(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ telle que $\hat{P}1_{\hat{E}} = 1_{\hat{E}}$, en posant, pour tout $f \in G(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$,

$$\hat{P}f = \widehat{P[(f - f(\delta)) | E]} + f(\delta) \qquad (^{24}) \quad .$$

Si, pour tout $x \in E$, $\Gamma \to P1_\Gamma(x)$ est une mesure sur $(E , \mathcal{B})$; alors, pour tout $x \in E$, $\Gamma \to \hat{P}1_\Gamma(x)$ est le prolongement à $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ de la mesure $\Gamma \to P1_\Gamma(x)$, et $\hat{P}1_\Gamma(\delta) = 1_\Gamma(\delta)$ pour tout $\Gamma \in \hat{\mathcal{B}}$.

En particulier, tout semi-groupe $\{P_t\}$ sous-markovien sur $G(E , \mathcal{B})$, se prolonge en un semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$ markovien sur $G(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$. De même pour les fonctions de transition correspondantes.

---

[24] Où $g|E$ désigne la restriction à E de la fonction g sur $\hat{E}$.

b. Soient $X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \mathfrak{M} , (P_x) , (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E , \mathcal{B})$, $\{P_t(x , \Gamma)\}$ sa fonction de transition, et $\{P_t\}$ le semi-groupe associé.

Introduisons les termes suivants :

- Pour tout $t \in R_+$, soient $\hat{X}_t$ l'application de Ω dans $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ définie par

$$\hat{X}_t(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{si} \quad \zeta(\omega) > t \text{ , et } \hat{X}_t(\omega) = \delta \quad \text{si} \quad t \geqslant \zeta(\omega) \quad ,$$

et $\hat{\theta}_t$ l'application de Ω dans Ω définie par :

$$\hat{\theta}_t(\omega) = \theta_t(\omega) \quad \text{si} \quad \zeta(\omega) > t \text{ , et } \hat{\theta}_t(\omega) = \omega_0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant \zeta(\omega)$$

où ω_0 est un élément fixé de $[\zeta = 0]$.

(Si $[\zeta = 0] = \emptyset$, il suffit de considérer $\hat{\Omega} = \Omega \cup \{\omega_0\}$ et de prolonger de ζ à $\hat{\Omega}$, par $\zeta(\omega_0) = 0$.)

- Soit $\hat{\mathfrak{M}}$ la tribu sur Ω engendrée par les ensembles $[\zeta > 0] \cap A$ où $A \in \mathfrak{M}$;

- Pour tout $x \in E$, soient $\hat{P}_x$ la restriction de P_x à $\hat{\mathfrak{M}}$, et $\hat{P}_\delta$ la probabilité sur $\hat{\mathfrak{M}}$ définie par

$$\hat{P}_\delta[\zeta > 0] = 0 \quad \text{et} \quad \hat{P}_\delta[\zeta = 0] = 1$$

($[\zeta = 0] \neq \emptyset$, puisque $\omega_0 \in [\zeta = 0]$).

Alors, $\hat{X} = \{\Omega , (\hat{X}_t) , \hat{\mathfrak{M}} , (\hat{P}_z)_{z \in \hat{E}} , (\hat{\theta}_t)\}$ (25) est un processus de Markov stationnaire non interrompu à valeurs dans l'espace mesurable $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$, vérifiant les relations suivantes :

$$(M_1') \qquad [\hat{X}_t \in E] = [\zeta > t] \quad \text{pour tout} \quad t \in R_+$$

$$(M_4') \qquad \hat{P}_\delta[\hat{X}_0 \in E] = 0 \qquad ;$$

et, si $\{\hat{P}_t\}$ est le semi-groupe associé à la fonction de transition de $\hat{X}$, $\{\hat{P}_t\}$ est le prolongement à $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ du semi-groupe $\{P_t\}$ (cf. (a)).

---

(25) Ou $\hat{X} = \{\hat{\Omega} , (\hat{X}_t) , \hat{\mathfrak{M}} , (\hat{P}_z)_{z \in \hat{E}} , (\hat{\theta}_t)\}$, si ω_0 a dû être ajouté.

Inversement, soit $Y = \{\Omega , (Y_t) , \pi , (Q_z) , (\sigma_t)\}$ un processus de Markov stationnaire non interrompu à valeurs dans l'espace mesurable $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$, tel qu'il existe une application ζ de Ω dans $R_+ = [0 , +\infty]$ vérifiant (M_1), (M_1') et (M_4'). Alors si, pour tout t , X_t désigne la restriction de Y_t à $[\zeta > t]$, et θ_t la restriction de σ_t à $[\zeta > t]$,

$$X = \{\Omega , \zeta , (X_t) , \pi , (Q_x)_{x \in E} , (\theta_t)\}$$

est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans $(E , \mathcal{B})$, et Y est équivalent à $\hat{X}$ (vérifications sans difficultés).

On voit ainsi que la donnée d'un processus de Markov stationnaire non interrompu à valeurs dans $(\hat{E} , \hat{\mathcal{B}})$ pour lequel il existe une fonction ζ vérifiant (M_1), (M_1') et (M_4') est équivalente à la donnée d'un processus à valeurs dans $(E , \mathcal{B})$, admettant ζ comme durée de vie. (Cf. à ce sujet, [1], pages 49 et 68.)

Remarques.

1. La relation $\hat{P}_\delta[\hat{X}_0 \in E] = 0$ s'écrit encore $\hat{P}_0(\delta , E) = 0$ (où $\hat{P}_t(z , \Gamma)$ est la fonction de transition de $\hat{X}$) .

2. Si E est un espace topologique, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_E$, et si Y a ses trajectoires continues à droite, la condition "il existe une fonction ζ telle que (M_1) et (M_1') soient vérifiées" équivaut à :

(M_1'') Pour tout $t \in R_+$, $[X_t = \delta] \subset \bigcap_{u \geq t} [X_u = \delta]$ (*) .

En effet, supposons ces conditions satisfaites, et posons

$\zeta(\omega) = \inf\{t \mid t \in R_+ \text{ et } Y_t(\omega) = \delta\}$, si cet ensemble est $\neq \emptyset$

et

$$\zeta(\omega) = +\infty \text{ s'il est vide} .$$

La fonction ζ ainsi définie vérifie (M_1) et (M_1').

(*) Autrement dit : toute trajectoire qui atteint le point δ y reste.

Appendice 3. - Remarques sur la démonstration du théorème 4.2.

En vertu de l'appendice 2, on peut se ramener au cas où $\{P_t\}$ et $\{Q_t\}$ sont des semi-groupes markoviens sur $(E, \mathcal{B}_E)$ [26].

Soient donc $X = \{\Omega, (X_t), (P_x), (\theta_t)\}$ un processus de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, $\{P_t\}$ le semi-groupe markovien associé à la fonction de transition de X, et $\{Q_t\}$ un semi-groupe markovien subordonné à $\{P_t\}$ [27].

Pour toute partie finie U de R_+, soit Φ_U l'application $\omega \to (X_u(\omega))_{u\in U}$ de Ω dans E^U, et soit F^U la tribu sur Ω engendrée par les $[X_u \in \Gamma]$, $u \in U$, $\Gamma \in \mathcal{B}$; on a

$$F^U = \Phi_U^{-1}(\mathcal{B}^U) \quad ,$$

où $(E^U, \mathcal{B}^U)$ désigne l'espace mesurable produit $(E, \mathcal{B})^U$.

Pour toute répartition initiale μ sur $(E, \mathcal{B})$, les relations suivantes définissent des probabilités sur $(E^U, \mathcal{B}^U)$:

$$p_\mu^U(\Delta) = \int \mu(dx) \int P_{t_0}(x, dx_0) \int \cdots \int P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)\, 1_\Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

$$q_\mu^U(\Delta) = \int \mu(dx) \int Q_{t_0}(x, dx_0) \int \cdots \int Q_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)\, 1_\Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

où $U = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ et $\Delta \in \mathcal{B}^U$.

Et, en posant :

$$P_\mu^U(\Phi_U^{-1}(\Delta)) = p_\mu^U(\Delta) \quad , \qquad Q_\mu^U(\Phi_U^{-1}(\Delta)) = q_\mu^U(\Delta)$$

pour tout $\Delta \in \mathcal{B}^U$, on définit des probabilités P_μ^U et Q_μ^U sur $F^U = \Phi_U^{-1}(\mathcal{B}^U)$; et on a

$$Q_\mu^U(A) \leq P_\mu^U(A) \quad \text{pour tout } A \in F^U \quad .$$

D'après la proposition 1.2 (chapitre 1, n° 4), P_μ^U coïncide avec P_μ sur F^U, pour tout U.

---

[26] Avec les notations du théorème 4.2.

[27] Supposons, pour simplifier les notations, que $(E, \mathcal{B}) = (E, \mathcal{B}^*)$.

μ étant fixé, la famille $(\Omega , F^U , Q^U_\mu)_U$, où U décrit l'ensemble des parties finies de R_+, est une famille projective de probabilités. Il résulte alors de la relation $Q^U_\mu(A) \leqslant P^U_\mu(A)$ que, si, pour tout $A \in \bigcup_U F^U$, on pose

$$Q_\mu(A) = Q^U_\mu(A) \quad ,$$

où U est tel que $A \in F^U$, Q_μ est une probabilité sur le clan $\bigcup_U F^U$.

Cette probabilité se prolonge en une probabilité sur F (tribu engendrée par $\bigcup_U F^U$), que nous désignerons encore par Q_μ. On a alors

$$Q_\mu(A) \leqslant P_\mu(A) \text{ , pour tout } A \in F \text{ et tout } \mu$$

et

$$Y = \{\Omega , (X_t) , (Q_x) , (\theta_t)\}$$

est un processus de Markov stationnaire à valeurs dans $(E , \mathcal{B})$ et admettant $\{Q_t(x , \Gamma)\}$ comme fonction de transition. De la relation $Q_\mu(A) \leqslant P_\mu(A)$ pour tout $A \in F_t$, on déduit, d'après le théorème de Radon-Nikodym, l'existence d'une fonction $M_{\mu,t} : \Omega \to [0 , 1]$, F_t-mesurable et telle que

$$Q_\mu(A) = \int_A M_{\mu,t} \, dP_\mu \quad \text{pour tout } A \in F_t$$

(on notera $M_{x,t}$ la fonction $M_{\varepsilon_x,t}$).

Pour montrer l'existence d'une fonctionnelle multiplicative du processus X associée à $\{Q_t\}$, il suffit de montrer que pour tout $t \in R_+$, il existe une fonction $M^0_t : \Omega \to [0 , 1]$, F^*_t-mesurable et telle que

$$P_x[M_{x,t} \neq M^0_t] = 0 \quad \text{pour tout } x \in E \quad .$$

En effet, pour une telle famille $(M^0_t)_{t \geqslant 0}$ nous allons montrer que, pour tout $x \in E$, $M^0_{t+s} = M^0_s \times M^0_t \circ \theta_s$ P_x presque sûrement, d'où on déduira l'existence d'une fonctionnelle multiplicative $(M_t)_{t \geqslant 0}$ telle que

$$P_x[M_t \neq M^0_t] = 0 \quad \text{pour tout } x \in E \quad ,$$

par le procédé déjà employé dans la démonstration du théorème 3.1 (chapitre 3, n° 3).

Pour montrer que $M^0_{t+s} = M^0_s \times M^0_t \circ \theta_s$, il suffit de montrer que

$$\int_{A\cap\theta_s^{-1}(B)} M^0_s \times M^0_t \circ \theta_s \, dP_x = \int_{A\cap\theta_s^{-1}(B)} M^0_{t+s} \, dP_x \quad \text{pour tout} \quad A \in F_s \text{ , et } B \in F_t \text{ ;}$$

or

$$\int_{A\cap\theta_s^{-1}(B)} M^0_s \times M^0_t \circ \theta_s \, dP_x = \int 1_A \times M^0_s \times (M^0_t . 1_B) \circ \theta_s \, dP_x$$

$$= \int 1_A \, M^0_s \times E_{X_s}[1_B . M^0_t] \, dP_x$$

d'après la propriété de Markov appliquée au processus X ;

$$= \int 1_A \, M^0_s \times Q_{X_s}(B) \, dP_x = \int_A Q_{X_s}(B) \, dQ_x \quad ,$$

d'où, d'après la propriété de Markov appliquée au processus Y ,

$$= Q_x(A \cap \theta_s^{-1}(B) = \int_{A\cap\theta_s^{-1}(B)} M^0_{t+s} \, dP_x \quad .$$

C. Q. F. D.

Pour construire une telle famille $(M^0_t)_{t\geq 0}$, on peut essayer de considérer les fonctions $(M^1_t)_{t\geq 0}$ définies par

$$M^1_t(\omega) = M_{X_0(\omega), t}(\omega) \quad \text{pour tout} \quad t \quad \text{et} \quad \omega \quad ,$$

qui sont telles que, pour tout x ,

$$P_x[M^1_t \neq M_{x,t}] = 0 \quad ;$$

M^1_t sera F^*_t-mesurable, en particulier, si $x ; \omega \to M_{x,t}(\omega)$ est une fonction $(\mathcal{B} \times F^*_t)$-mesurable.

On est donc ramené à la recherche de telles densités, fonctions mesurables du couple (x , ω) .

Le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 4.2, en (β), permet d'obtenir une telle densité.

On remarquera que la fonction M_t^U (cf. β, démonstration du théorème 4.2), est une version de la densité de Q_x par rapport à P_x, ces probabilités étant restreintes à la tribu F_t^{U*}. On a, en conséquence, P_x presque sûrement

$$E_x[M_{x,t} | F_t^{U*}] = M_t^U \quad ,$$

ce qui rend clair le fait que, si (U_n) est une suite croissante, $(M_t^{U_n})$ est une martingale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DYNKIN (E. B.). - Theory of Markov processes. Translated from the Russian. - Oxford, London, New York, Paris, Pergamon Press, 1960.

[2] MEYER (Paul-André). - Fonctionnelles multiplicatives et additives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 125-230 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[3] Séminaire Brelot : Théorie du Potentiel, t. 3, 1958/59. - Paris, Secrétariat mathématique, 1960.