Joanne Elliott

Une application des espaces de Dirichlet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 1 (1961-1962), exp. nº 5, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_1_A6_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 5

4 mai 1962

UNE APPLICATION DES ESPACES DE DIRICHLET

par Mlle Joanne ELLIOTT

1. Introduction.

Nous esquisserons très rapidement les problèmes de théorie des probabilités qui sont au fond de cette étude.

À chaque α , $0 < \alpha \leqslant 2$, il correspond un processus stochastique $\{X(t)\ ,\ t \geqslant 0\}$ sur R^n , appelé le processus symétrique stable d'ordre α , dont les densités de transition $p_\alpha(t\ ,\ x - y)$ sont déterminées par la transformation de Fourier

$$(1.1)\qquad e^{-t|x|^\alpha} = \int_{R^n} e^{ix.\xi}\, p_\alpha(t\ ,\ \xi)\, d\xi \quad .$$

Dans le cas où $\alpha = 2$, $\{X(t/2)\ ,\ t \geqslant 0\}$ est le processus du mouvement brownien.

Chacun de ces processus détermine des semi-groupes de contraction positifs,

$$(1.2)\qquad T_t\, f(x) = \int_{R^n} p_\alpha(t\ ,\ x - y)\, f(y)\, dy$$

ou de $C_0(R^n)$ à $C_0(R^n)$, ou de $L(R^n)$ à $L(R^n)$. ($C_0(R^n)$ est l'espace des fonctions continues sur R^n , nulles à l'infini.) Le générateur infinitésimal du semi-groupe sur $C_0(R^n)$ est de la forme

$$(1.3)\qquad A_\alpha\, u(p) = K_\alpha\, \Delta \int_{R^n} \frac{u(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} = K_\alpha\, \mathrm{div} \int_{R^n} \frac{\nabla u(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} \qquad (0 < \alpha < 2)$$

au moins si u est dérivable de support compact dans R^n . Ici $|PQ|$ est la distance entre P et Q , et K_α est une constante dépendante de α . Si $\alpha = 2$, $A_2\, u = \Delta u$, si $u \in C_0(R^n)$, est deux fois dérivable. Nous citons [7] pour une discussion des semi-groupes associés aux processus stochastiques.

Associés aux processus stables d'ordre α sur R^n , il y a des processus sur des sous-ensembles de R^n . Par exemple, si E est un domaine de R^n , le processus dont ∂E , la frontière de E , est une "barrière absorbante" peut être décrit ainsi : si une trajectoire commence dans E $(X(0) \in E$ avec pr 1) , le processus est terminé quand la trajectoire sort à l'extérieur de E . Les densités de transition de ce processus associé, $p_0(t, x, y)$, déterminent aussi des semi-groupes de contraction positifs sur $C_0(\bar{E})$ et $L(E)$; le générateur infinitésimal du semi-groupe sur $C_0(\bar{E})$ est une restriction de A_α à $C_0(\bar{E})$.

Il y a beaucoup d'autres restrictions de l'opérateur A_α de (1.3) qui sont générateurs des semi-groupes de contraction positifs. Par exemple, dans le cas $\alpha = 2$, la restriction de Δ à l'ensemble de fonctions u telles que $au + b\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur E ($\frac{\partial u}{\partial n}$ = dérivée normale), avec a et b fonctions données, positives et suffisamment régulières sur ∂E , engendre aussi des semi-groupes de contraction positifs. Dans cet article nous étudierons des analogues à la condition $au + b\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ pour $\alpha < 2$.

Par le théorème de Hille-Yosida, nous pouvons réduire l'étude des semi-groupes de contraction à une étude des résolvantes :

$$(1.4)\qquad R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x)\, dt \quad .$$

Ce théorème dit qu'un opérateur linéaire A sur un espace de Banach X est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction de X à X si, pour chaque $\lambda > 0$, et chaque $f \in X$, il existe un élément $R_\lambda f \in X$ tel que

$$(1.5)\qquad \lambda R_\lambda f - AR_\lambda f = f$$

$$(1.6)\qquad \lambda \|R_\lambda f\| \leq \|f\|$$

$$(1.7)\qquad \lambda R_\lambda f \to f \quad \text{quand} \quad \lambda \to \infty \quad .$$

Les opérateurs R_λ sont liés au semi-groupe T_t par (1.4).

Les espaces de Dirichlet, introduits dans [1] et [2] par A. BEURLING et J. DENY, donnent une méthode très commode pour l'investigation de ces semi-groupes.

2. Le cas de la barrière absorbante.

Dans cette section, nous considérons les solutions u de

$$(2.1)\qquad \lambda u(P) - \Delta \int_E \frac{u(Q)\, dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} = f(P)$$

pour $0 < \alpha < 2$, $\lambda \geqslant 0$, $f \in C_0(E)$, dans un domaine $E \subset R^n$ sous la condition $u(P) = 0$ sur ∂E . Pour simplifier l'exposition, nous supposons que

1° la frontière ∂E de E est assez régulière avec une normale partout ;

2° $n \geqslant 2$.

Les théorèmes sont valables aussi dans le cas où $n = 1$, mais il faut modifier beaucoup de démonstrations. Nous avons supprimé la constante multiplicative dans l'opérateur de (2.1), par une normalisation triviale.

Sauf pour une constante, l'opérateur dans (2.1) est un potentiel fractionnaire d'ordre $-\alpha$. O. FROSTMAN [4], [5] et M. RIESZ [11] ont étudié la "fonction de Green" associée à cet opérateur et à E , c'est-à-dire la fonction $G_\alpha(P, Q)$ telle que

$$(2.2) \qquad u(P) = \int_E G_\alpha(P, Q) f(Q)\, dQ$$

est une solution de (2.1) pour $\lambda = 0$. (Ils ont traité G_α par la méthode de balayage et on ne trouve pas une mention explicite d'équation (2.1) dans ces oeuvres.) Dans [11], RIESZ a donné une formule explicite pour la fonction de Green dans le cas où E est une sphère dans R^n . Les articles [3], [8], [9], [10] et [12] concernent le processus de la barrière absorbante, ou des problèmes liés pour $n = 1$; pour $n > 1$, nous citons [6].

Les espaces de Dirichlet nous donnent une méthode assez rapide et convenable d'obtenir des propriétés importantes des solutions de (2.1) et nous donnons ici ces résultats, bien que quelques-uns soient connus, cf. [6], [11]. Nous ferons des références fréquentes à l'article [2] de BEURLING et DENY, que nous appellerons B.-D. dans la suite.

Les deux définitions suivantes se trouvent dans la section première de B.-D.

DÉFINITION 2.1. - Une <u>contraction normale</u> du plan complexe C est une application de C dans lui-même qui conserve l'origine et qui n'augmente pas les distances : $|TZ - TZ'| \leqslant |Z - Z'|$ pour tout couple $Z , Z' \in C$.

DÉFINITION 2.2. - Étant donnés un espace X localement compact et une mesure de Radon positive ξ partout dense sur X (les ouverts non-vides ont une mesure > 0), on appelle <u>espace de Dirichlet</u> relativement à X et ξ tout espace hilbertien complet $D = D(X, \xi)$ dont les éléments sont des fonctions u à valeurs complexes localement sommables pour ξ , les trois axiomes suivants étant vérifiés :

I : Pour tout compact $K \subset X$, il existe un nombre fini $A(K)$ tel que

$$\int_K |u| \leq A(K)\ \|u\| \quad ;$$

II : Si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs complexes et à support compact, alors $\mathcal{C} \cap D$ est dense dans $\mathcal{C}$ et dans D.

III : Si T est une contraction normale du plan complexe, alors $u \in D$ implique $Tu \in D$ et $\|Tu\| \leq \|u\|$.

Nous définirons maintenant un espace de Dirichlet réel qui est lié à notre opérateur (1.3). Une application de la formule de Green, dont nous omettrons les détails, donne la relation :

$$(2.3) \quad - \int_E v(P)\ \{\Delta \int_E \frac{u(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}}\}\ dP$$

$$= \int_E v(P)\ u(P)\ m(P)\ dP + \frac{C_\alpha}{2} \int_E \int_E \frac{[v(P) - v(Q)][u(P) - u(Q)]}{|PQ|^{n+\alpha}}\ dP\ dQ = (u\ ,\ v)$$

où $C_\alpha = \alpha(n + \alpha - 2)$, $0 < \alpha < 2$,

$$(2.4) \qquad m(P) = C_\alpha \int_{CE} \frac{dQ}{|PQ|^{n+\alpha}} = - \int_{\partial E} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|PQ|^{n+\alpha-2}}\ dS_Q \quad ,$$

et u, v sont indéfiniment dérivables à support compact dans E. Dans (2.4), n est la normale extérieure et DS_Q est l'élément de surface sur ∂E. Pour $\alpha < 1$, $m \in L(E)$, mais ce n'est pas le cas pour $\alpha \geq 1$. En tout cas, il existe un nombre c tel que $m(P) > c > 0$ dans E.

Les fonctions de $C_0(E)$ indéfiniment dérivables de support compact dans E, forment un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire $(u\ ,\ v)$ défini par (2.3). Nous complétons cet espace à un espace hilbertien, et il n'est pas difficile de montrer que cet espace est un espace de Dirichlet. Dans la suite nous dénoterons cet espace par D_α^0.

Propriétés des potentiels dans D_α^0. — La définition suivante se trouve dans la section 2 de B.-D.

DÉFINITION 2.3. — Un élément u_μ dans un espace de Dirichlet D est appelé potentiel s'il existe une mesure de Radon μ sur E, telle que

$$(u_\mu\, , v) = \int_E v \, d\mu \tag{2.5}$$

pour toute $v \in \mathcal{C} \cap D$. Si μ est positive, on dit que u_μ est un potentiel pur. Dans notre cas, (2.5) implique que

$$- \Delta \int_E \frac{u_\mu(Q)\, dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} = \mu \tag{2.6}$$

au sens des distributions.

LEMME 2.1 (Lemme 2 dans B.-D.). - Les potentiels purs sont positifs.

Dans notre cas, si f est une fonction telle que $\int_E f^2/m < \infty$, alors pour chaque $v \in D_\alpha^0$,

$$|\int_E vf|^2 \leq \|u\|^2 . \{\int_E f^2/m\} \quad . \tag{2.7}$$

Donc, il existe un potentiel $u_f \in D_\alpha^0$ associé à f , tel que (2.5) est valable pour chaque $v \in D_\alpha^0$. Cette condition sur f est satisfaite par les fonctions bornées mesurables sur $\overline{E}$, par les éléments de $L_2(E)$, et par toute fonction de la forme Φm où $\Phi \in D_\alpha^0$.

Si $0 < \alpha < 1$, alors la fonction m de (2.4) est dans $L(E)$ et $u_m \equiv 1$ est le potentiel pur associé à m . Dans ce cas, pour chaque potentiel u_f associé à une fonction $f \in L(E)$, nous avons

$$\int_E u_f\, m = \int_E f \quad . \tag{2.8}$$

Nous démontrons maintenant que dans le cas $\alpha \geq 1$, u_f est intégrable par rapport à m et que (2.8) est valable.

LEMME 2.2. - Pour chaque α , $0 < \alpha < 2$, tout potentiel u_f associé à une fonction $f \in L(E)$ est intégrable par rapport à la fonction m de (2.4) et satisfait (2.8).

Démonstration. - Il suffit de démontrer le lemme pour $f \geq 0$. Par le théorème 1 de B.-D., à chaque ouvert S , tel que $\overline{S} \subset E$, il correspond un "potentiel d'équilibre" u_S satisfaisant :

(i) $u_S \equiv 1$ p. p. sur S ;

(ii) $0 \leq u_S \leq 1$ p. p. sur E ;

(iii) la mesure m_S associée à u_S est positive et portée par $\overline{S}$. En effet, dans notre cas nous avons pour $P \in S$

$$(2.9) \quad -\Delta \int_E \frac{u_S(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} = m(P) + C_\alpha \int_{E-S} \frac{1-u_S(Q)}{|PQ|^{n+\alpha}}\, dQ \geq m(P) \quad .$$

Il en résulte que

$$(2.10) \qquad \int_S u_f\, m \leq \int_E u_f\, dm_S = \int_E u_S\, f \leq \int_E f \quad ,$$

pour chaque ouvert S, tel que $\overline{S} \subset E$. Donc, $u_f\, m \in L(E)$. Nous avons alors

$$(2.11) \qquad \int_E u_f\, m = \int_{CE} \Delta \int_E \frac{u_f(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}}\, dP$$

$$= -\int_{\partial E} \frac{\partial}{\partial n} \int_E \frac{u_f(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}}\, dS_P = \int_E f \quad .$$

LEMME 2.3. - Si $f \in L(E)$ et $|f| \leq m$, et s'il existe un potentiel u_f associé à f, alors $|u_f| \leq 1$ p. p. sur E.

<u>Démonstration</u>. - (Nécessaire seulement pour $\alpha \geq 1$.) Nous pouvons supposer que $f \geq 0$, parce que $|u_f| \leq u_{|f|}$. Pour chaque $g \geq 0$, bornée et mesurable sur $\overline{E}$,

$$(2.12) \qquad \int_E u_f\, g = \int_E f u_g \leq \int_E u_g\, m = \int_E g \quad .$$

Cela implique $u_f \leq 1$ p. p.

COROLLAIRE 2.1. - Si $f \in B(\overline{E})$, l'espace de fonctions bornées et mesurables sur $\overline{E}$, alors il correspond un potentiel $u_f \in B(\overline{E}) \cap D_\alpha^0$ et

$$(2.13) \qquad \|u_f\|_B \leq \|f\|_B \cdot [\min_{P \in E} m(P)]^{-1} \quad .$$

LEMME 2.4. - Si $f \in B(\overline{E})$, alors u_f est équivalent à un élément de $C_0(\overline{E})$, l'espace des fonctions continues sur $\overline{E}$, nulles sur ∂E.

<u>Démonstration</u>. - Nous pouvons supposer que $f \geq 0$. Nous avons

$$(2.14) \qquad - \Delta \int_E \frac{u_f(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} = f(P)\ , \qquad (P \in E)$$

$$= - C_\alpha \int_E \frac{u_f(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha}}\ , \qquad (P \in CE)$$

$$= \overline{f}(P) \qquad .$$

Puisque $u_f\ m \in L(E)$, nous avons $\overline{f} \in L(CE)$. En effet, $- \Delta \int_E u_f \circ |PQ|^{2-\alpha-n}\ dQ$, considérée comme distribution sur R^n , est une fonction intégrable sur R^n . Alors, si nous prolongeons u_f à une fonction $\overline{u}_f$ nulle dans CE , nous avons

$$(2.15) \qquad \overline{u}_f(P) = J_\alpha \int_E \frac{f(Q)\ dQ}{|PQ|^{n-\alpha}} - J_\alpha \int_{CE} \frac{|\overline{f}(Q)|\ dQ}{|PQ|^{n-\alpha}} \qquad \text{p. p.}$$

où

$$(2.16) \qquad J_\alpha = \frac{\sin(\pi\alpha/2)}{4\pi^{n+1}}\ \Gamma\left(\frac{n+\alpha-2}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) > 0 \qquad .$$

Notons que $\overline{f} < 0$, parce que $u_f \geqslant 0$. Le théorème est une conséquence facile de (2.15), mais nous omettrons les détails.

<u>Le noyau de Green</u>. - Le lemme précédent et le corollaire 2.1 montrent que l'application $f \to u_f$ est une application linéaire, bornée, et positive de $B(\overline{E})$ à $C_0(\overline{E})$. Alors, il existe un noyau $G_\alpha(P\ ,\ Q)$ symétrique, positif tel que

$$(2.17) \qquad u_f(P) = \int_E G_\alpha(P\ ,\ Q)\ f(Q)\ dQ$$

et

$$(2.18) \qquad \|u_f\|^2_{D^0_\alpha} = \int_E \int_E G_\alpha(P\ ,\ Q)\ f(P)\ f(Q)\ dP\ dQ \qquad .$$

Les deux lemmes suivants sont facilement établis, et nous omettrons les démonstrations.

LEMME 2.5. - Si m est définie par (2.4), alors

$$(2.19) \qquad \int_E G_\alpha(P\ ,\ Q)\ m(Q)\ dQ \equiv 1 \qquad (P \in E) \qquad .$$

Si $f(Q)\ G_\alpha(P\ ,\ Q)$ est intégrable sur E pour chaque $P \in E$, alors $-\overline{A}_\alpha G_\alpha f = f$, où $G_\alpha f = u_f$ et

$$\overline{A}_\alpha u = \Delta \int_E \frac{u(Q)\ dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} \quad . \tag{2.20}$$

LEMME 2.6. - Si $f = \Phi m$ où $\Phi \in B(\overline{E})$, alors $G_\alpha f$ est continue sur E (mais pas en général sur $\overline{E}$) et

$$\lim_{P\to P_0} G_\alpha f(P) = \operatorname{ess}\lim_{P\to P_0} \Phi(P) \tag{2.21}$$

à chaque $P_0 \in \partial E$ telle que la limite sur la droite de (2.21) existe.

COROLLAIRE 2.2.

a. Si $u \in B(CE)$, la fonction

$$f(P) = C_\alpha \int_{CE} \frac{u(Q)\ DQ}{|PQ|^{n+\alpha}} \tag{2.22}$$

satisfait :

(i) $G_\alpha f$ est continue sur E ;

(ii) $\lim_{P\to P_0} G_\alpha f(P) = \operatorname{ess}\lim_{P\to P_0} u(P)$ pour chaque $P_0 \in \partial E$ telle que la limite sur la droite existe.

b. Si E est convexe, alors

$$-\partial/\partial n_Q\ |PQ|^{-n-\alpha+2} = -u(Q)\cdot[\nabla_T\ |TP|^{-n-\alpha+2}]_{T=Q}$$

est $\geqslant 0$ pour $Q \in \partial E$, $P \in E$; si $u \in B(\partial E)$, la fonction

$$g(P) = -\int_{\partial E} u(Q)\ \frac{\partial}{\partial n_Q}\ |PQ|^{-n-\alpha+2}\ dS_Q \tag{2.23}$$

satisfait :

(iii) $G_\alpha g$ est continue sur E ;

(iv) $\lim_{P\to P_0} G_\alpha g(P) = u(P_0)$ à chaque point de continuité P_0 de $u(P)$ sur ∂E .

LEMME 2.7. - Le noyau G_α satisfait

$$(2.24) \qquad G_\alpha(P, Q) = J_\alpha |PQ|^{\alpha-n} - C_\alpha J_\alpha \int_E G_\alpha(Q, R) \left[\int_{CE} \frac{dT}{|PT|^{n-\alpha} \cdot |TR|^{n+\alpha}}\right] dR$$

où $P, Q \in E$ et J_α est donné par (2.16). Pour chaque P, $G_\alpha(P, Q)$ est continue pour $Q \in E$, $Q \neq P$, et $\lim_{Q \to Q_0} G_\alpha(P, Q) = 0$ pour chaque $Q_0 \in \partial E$.

Démonstration. - Il résulte du corollaire 2.2 (a) que, pour chaque $P \in E$, l'intégrale sur la droite définit une fonction continue sur $\overline{E}$ qui tend vers $|PQ_0|^{\alpha-n}$ quand $Q \to Q_0 \in \partial E$. L'identité dans (2.24) suit de la représentation (2.15) de $u_f = G_\alpha f$ quand f est bornée et mesurable.

Les semi-groupes associés à $\overline{A}_\alpha$. - Nous employerons ici les deux lemmes suivants (lemmes 3 et 4 dans B.-D.) :

LEMME 2.8. - Étant donnés un espace de Dirichlet $D(X)$ et une fonction $f \in L_2(E)$ ou $\in D$, alors pour chaque nombre $\lambda > 0$, il existe un élément unique $S_\lambda f \in D$ qui rend minimum la fonctionelle quadratique

$$(2.25) \qquad F(u) = \lambda \|u\|_D^2 + \int_X |u - f|^2 \quad ;$$

$u = S_\lambda f$ est le seul élément de D tel que $u - f \in L_2$ et

$$(2.26) \qquad \lambda(u, v) + \int_X (u - f)\, v = 0 \quad .$$

pour chaque $v \in L_2 \cap D$.

LEMME 2.9. - Pour chaque $\lambda > 0$, l'opérateur $R_\lambda = \lambda^{-1} S_{1/\lambda}$, défini sur D, a les propriétés suivantes :

(i) R_λ est linéaire, positif, hermitien et borné dans D et dans $L_2(X)$, avec $\lambda\|R_\lambda\| \leq 1$; $f \in D$ et $\|R_\lambda f\| = \|f\|$ impliquent $f = 0$.

$$\text{(ii)} \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda = I, \qquad \lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda = 0$$

fortement dans D et dans L_2. Ici I est l'opérateur d'identité.

(iii) Si T est une contraction normale telle que $Tf = f$, alors $T\{\lambda R_\lambda f\} = \lambda R_\lambda f$. Si donc, $0 \leq f \leq 1$, il en sera de même de $\lambda R_\lambda f$.

Nous démontrons dans le théorème suivant que les opérateurs R_λ nous donnent aussi des résolvantes dans $C_0(\overline{E})$ et $L(\overline{E})$.

THÉORÈME 2.1. – Si $f \in C_0(\overline{E})$ ou $\in L(E)$, alors pour chaque $\lambda > 0$, il existe un élément $R_\lambda^0 f \in C_0(\overline{E}) \cap D$ ou dans $L(E)$ tel que

a. $$\lambda R_\lambda^0 f - \overline{A}_\alpha R_\lambda^0 f = f$$

où $\overline{A}_\alpha$ est donné par (2.20) ;

b. $\|\lambda R_\lambda^0 f\| \leq \|f\|$ soit dans $C_0(\overline{E})$, soit dans $L(E)$;

c. $\lambda R_\lambda^0 \to I$ fortement dans $C_0(\overline{E})$ et dans $L(E)$;

d. $$0 \leq f \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \lambda R_\lambda^0 f \leq 1$$

si $f \in C_0(\overline{E})$, $R_\lambda^0 f$ coïncide avec $R_\lambda f$ du lemme 2.9 ; si $f \in L(E)$, $R_\lambda^0 f$ est un prolongement de R_λ de D_α^0 à $L(E)$.

<u>Démonstration.</u>

1. Le cas $C_0(\overline{E})$. – Nous démontrons que l'élément $R_\lambda f$ défini dans le lemme 2.9 satisfait les conditions (a) – (d). La propriété (a) suit de (2.26), et la propriété (d) du lemme 2.9 (iii). Donc, si $f \in C_0(\overline{E})$, $R_\lambda f$ est le potentiel de la fonction bornée $f - \lambda R_\lambda f$ et par le lemme 2.4 est un élément de $C_0(\overline{E})$, (après une modification possible sur un ensemble de mesure nulle). La propriété (b) est une conséquence de (d). L'image $R_\lambda^0(C_0(\overline{E}))$ est indépendant de λ et égale à l'image $G_\alpha(C_0(\overline{E}))$, parce que

$$R_\lambda - G_\alpha + \lambda G_\alpha R_\lambda = 0 \quad . \tag{2.27}$$

L'image $G_0(C_0(\overline{E}))$ est dense dans $C_0(\overline{E})$ parce que toute fonction indéfiniment dérivable de support compact dans E est dans cette image. Donc (a) et (b) impliquent (c).

2. Le cas $L(E)$. – Dans ce cas nous démontrons qu'il est possible de prolonger l'opérateur R_λ^0 du cas 1 à $L(E)$, et que le prolongement satisfait (a) – (d) dans l'espace $L(E)$.

Pour $f \in C_0(\overline{E})$ nous pouvons représenter $R_\lambda^0 f$ par un noyau $G_\alpha(P, Q ; \lambda)$, c'est-à-dire

$$(2.28) \qquad R_\lambda^0 f(P) = \int_E G_\alpha(P , Q ; \lambda) f(Q) dQ \quad .$$

Si $\{T_t\}$ est le semi-groupe de (1.2), nous dénotons par $\wp_\alpha(P - Q ; \lambda)$ les noyaux des résolvantes du semi-groupe $\{T_{t/K_\alpha}\}$ ou K_α est la constante dans (1.3). Nous pouvons démontrer par une méthode semblable à celle du lemme 2.7 que

$$(2.29) \quad G_\alpha(P , Q ; \lambda) = \wp_\alpha(P - Q ; \lambda) - C_\alpha \int_E G_\alpha(Q , R ; \lambda) \left[\int_{CE} \frac{\wp_\alpha(T - P ; \lambda) dT}{|RT|^{n+\alpha}} \right] dR$$

pour $P , Q \in E$. Donc

$$(2.30) \qquad G_\alpha(P , Q ; \lambda) \leq \wp_\alpha(P - Q ; \lambda)$$

et il en résulte que si $f \in L(E)$, la fonction définie par l'intégrale sur la droite de (2.28) est aussi dans $L(E)$. Donc, nous pouvons prolonger R_λ^0 par (2.28) à un opérateur de $L(E)$ à $L(E)$. La condition (b) est une conséquence de (2.30) puisque $\wp_\alpha(P - Q ; \lambda)$ est le noyau d'un semi-groupe de contraction sur $L(R^n)$. De l'équation (2.28) et du lemme 2.5 il résulte que (a) est valable aussi quand $f \in L(E)$. L'image de $R_\lambda^0(L(E))$ est dense dans $L(E)$, donc (a) et (b) impliquent (c).

Employant le théorème de Hille-Yosida, nous obtenons :

COROLLAIRE 2.3. - Les opérateurs R_λ^0 du théorème 2.1 sont les résolvantes des semi-groupes de contraction positifs de $C_0(\overline{E})$ à $C_0(\overline{E})$ ou de $L(E)$ à $L(E)$; les générateurs infinitésimaux de ces semi-groupes sont des restrictions de l'opérateur $\overline{A}_\alpha$ de (2.20).

3. Autres conditions aux limites.

Dans cette section, nous considérons l'opérateur

$$(3.1) \qquad B_\alpha u = \operatorname{div} \int_E \frac{\nabla u(Q) dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} \qquad (0 < \alpha < 2) \quad .$$

Cet opérateur coïncide avec $\overline{A}_\alpha$ (de (2.20)) quand $u = 0$ sur ∂E ; en effet

$$B_\alpha u(P) = \Delta \int_E \frac{u(Q)\, dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} - \int_{\partial E} u(Q) \frac{\partial}{\partial n} |PQ|^{2-\alpha-n} dS_Q \quad . \tag{3.2}$$

Nous supposons dans cette section que E est un domaine convexe. Cette restriction est nécessaire, comme nous verrons plus tard, pour l'application des espaces de Dirichlet à l'opérateur (3.1).

Les solutions de $B_\alpha u = 0$. – Étant donnée une fonction v mesurable et bornée sur ∂E, il résulte du corollaire 2.2 (b) et du lemme 2.5 que la fonction u définie par

$$u(P) = - \int_E G_\alpha(P, Q') \left[\int_{\partial E} v(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} |QQ'|^{-n-\alpha+2} dS_Q\right] dQ' \tag{3.3}$$

satisfait à

$$- \Delta \int_E \frac{u(Q)\, dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} = - \int_{\partial E} v(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} |PQ|^{-n-\alpha+2} dS_Q \tag{3.4}$$

et prend les valeurs $u(Q) = v(Q)$ sur ∂E aux points de continuité de v. Donc, si v est continue p. p. sur ∂E, nous avons $B_\alpha u = 0$.

Cela nous donne l'analogie suivante de l'intégrale de Poisson :

LEMME 3.1. – Si E est convexe, et si v est bornée, mesurable sur ∂E, continue p. p. sur ∂E, alors la seule solution u de $B_\alpha u = 0$, telle que

(i) $u \in B(\overline{E})$;

(ii) u est continue sur E ;

(iii) $\lim_{P \to P_0} u(P) = v(P_0)$ aux points P_0 de continuité de v sur ∂E est donnée par

$$u(P) = \int_{\partial E} v(Q)\, K_\alpha(P, Q)\, dS_Q \tag{3.5}$$

où

$$K_\alpha(P, Q) = - \int_E G(P, Q') \frac{\partial}{\partial n_Q} |QQ'|^{-n-\alpha+2} dQ' \tag{3.6}$$

pour $Q \in \partial E$, $P \in E$; de plus

$$(3.7) \qquad \int_{\partial E} K_\alpha(P, Q)\, dS_Q \equiv 1 \; ; \qquad K_\alpha(P, Q) \geq 0 \quad .$$

Si v est continue sur ∂E, alors $u \in C(\overline{E})$.

La propriété sur la gauche de (3.7) résulte de (2.19) ; le noyau K_α est positif parce que E convexe implique que

$$(3.8) \qquad -\frac{\partial}{\partial n_Q} |QQ'|^{-n-\alpha+2} \geq 0 \qquad Q \in \partial E \, , \quad Q' \in E$$

comme nous avons remarqué dans le corollaire 2.2 (b). Nous ne donnons pas ici la démonstration où u est unique sous les conditions (i) - (iii). L'expression dans (3.6) joue le même rôle pour $0 < \alpha < 2$, que l'opposée de la dérivée normale de la fonction de Green dans le cas $\alpha = 2$.

Espaces de Dirichlet associés à B_α. - Il sera commode d'écrire B_α sous la forme

$$(3.9) \qquad B_\alpha u = \Delta I_\alpha u$$

où

$$(3.10) \qquad I_\alpha = \int_E \frac{u(Q)\, dQ}{|PQ|^{n+\alpha-2}} - \frac{1}{D_\alpha} \int_{\partial E} u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} |PQ|^{-n-\alpha+4}\, dS_Q$$

avec $D_\alpha = (2 - \alpha)(4 - n - \alpha)$.

Si u et v sont dérivables sur $\overline{E}$, une application de la formule de Green montre que

$$(3.11) \quad -\int_E v\, B_\alpha u + \int_{\partial E} v \frac{\partial}{\partial n} I_\alpha u + \int_{\partial E} v(P) \left\{ \int_{\partial E} [u(P) - u(Q)]\, \mu(P, Q)\, dS_Q \right\} dS_P$$

$$= - \int_{\partial E} \int_E [u(P) - u(Q)][v(P) - v(Q)] \frac{\partial}{\partial n_P} |PQ|^{-n-\alpha+2}\, dQ\, dS_P$$

$$+ \frac{C_\alpha}{2} \int_E \int_E \frac{[u(P) - u(Q)][v(P) - v(Q)]}{|PQ|^{n+\alpha}}\, dP\, dQ = (u, v)_1 \qquad ,$$

où $C_\alpha = \alpha(n + \alpha - 2)$ et

$$(3.12) \quad \mu(P, Q) = \frac{1}{2 - \alpha} \frac{n_P \cdot n_Q}{|PQ|^{n+\alpha-2}} + \frac{n + \alpha - 2}{2 - \alpha} \frac{(n_P \cdot \overrightarrow{QP})(n_Q \cdot \overrightarrow{PQ})}{|PQ|^{n+\alpha}} \qquad .$$

Ici $\vec{PQ}$ est le vecteur dirigé de P à Q avec longueur $|PQ|$. Nous pouvons simplifier l'expression sur la gauche ; en effet

$$(3.13) \quad \frac{\partial}{\partial n} I_\alpha u(P) + \int_{\partial E} [u(P) - u(Q)] \mu(P, Q) \, dS_Q$$

$$= n_P \cdot \int_E [u(P) - u(Q)] \nabla_Q |PQ|^{-n-\alpha+2} dQ \qquad ,$$

∇_Q étant le gradient par rapport à Q . Les calculs dans (3.11) et (3.13) sont élémentaires, mais un peu longs, et nous ne donnons par le détail ici.

Pour la simplicité nous traiterons ici le cas où $\alpha < 1$. Dans ce cas, si $u \in B(\overline{E})$, ∇I_α existe et est continu sur E , et les intégrales dans (3.13) convergent. Dans le cas $\alpha \geqslant 1$, les résultats de cette section sont un peu différents, mais les méthodes sont semblables.

D'abord, nous expliquerons brièvement le but de notre travail dans la suite. Nous voulons montrer que, pour chaque $\lambda > 0$ et chaque $f \in B(\overline{E})$, il existe une solution bornée $u_\lambda = S_\lambda f$ de

$$(3.14) \qquad u_\lambda - \lambda B_\alpha u_\lambda = f$$

sous la condition à limite

$$(3.15) \quad L_\alpha u_\lambda(P) = n_P \cdot \int_E [u_\lambda(P) - u_\lambda(Q)] \nabla_Q |PQ|^{-n-\alpha+2} dQ$$

$$+ a(P) u_\lambda(P) + \int_{\partial E} [u_\lambda(P) - u_\lambda(Q)] b(P, Q) \, dS_Q = 0$$

pour $P \in \partial E$, où $a(P)$, $b(P, Q)$ sont fonctions données pour $P, Q \in \partial E$, telles que $a(P) > c > 0$, $b(P, Q) = b(Q, P) \geqslant 0$. (Il faut mettre des conditions plus précises sur a et b , mais pour le moment nous les laissons de côté.) La première expression sur la droite de (3.15) jouera le même rôle ici que la dérivée normale dans le cas $\alpha = 2$. En effet, si $u_\lambda = 0$ sur ∂E , cette intégrale est la même que celle que nous avons eue dans (3.6), sauf pour le signe. Dans (3.6) nous avons l'analogie de l'opposée de la dérivée normale. Pour résoudre ce problème, nous définirons un espace de Dirichlet D_α avec le produit scalaire

$$(3.16)\quad (u\,,\,v) = (u\,,\,v)_1 + \int_{\partial E} u(P)\; v(P)\; a(P)\; dS_P$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\partial E} \int_{\partial E} [u(P) - u(Q)][v(P) - v(Q)]\; b(P\,,\,Q)\; dS_P\, dS_Q$$

où $(u\,,\,v)_1$ est donné par (3.11). Remarquons que la convexité de E est employée ici pour la condition $(u\,,\,u)_1 \geqslant 0$; c'est-à-dire, il faut employer (3.8). Ensuite, nous appliquerons le lemme 2.8 pour conclure l'existence d'un élément $u_\lambda \in D_\alpha$, pour chaque $\lambda > 0$, tel que (2.26) est valable pour $u = u_\lambda$. Nous démontrons que cela implique

$$(3.17)\quad - \lambda \int_E v\, B_\alpha\, u_\lambda + \lambda \int_{\partial E} v(P)\{n_P . \int_E [u_\lambda(P) - u_\lambda(Q)]\; \nabla_Q |PQ|^{-n-\alpha+2}\, dQ\}\; dS_P$$

$$+ \lambda \int_{\partial E} v\, u_\lambda\; a + \lambda \int_{\partial E} v(P)\{\int_{\partial E} [u_\lambda(P) - u_\lambda(Q)]\; b(P\,,\,Q)\; dS_Q\}\; dS_P$$

$$+ \int_E v(u_\lambda - f) = 0$$

pour $v \in D_\alpha$. Si nous prenons $v = 0$ sur ∂E, (3.17) nous donne

$$- \lambda\, B_\alpha\, u_\lambda + u_\lambda = f \qquad ;$$

donc, il faut que les termes sur la frontière s'annulent, donnant la condition à limite $L_\alpha\, u_\lambda = 0$ dans (3.15). (La description ici est un peu simplifiée, car nous ne démontrons pas (3.17) directement.) Enfin, nous démontrons que $R_\lambda = \lambda^{-1}\, S_{1/\lambda}$ sont les résolvantes des semi-groupes de contraction.

Maintenant nous définissons plus précisément notre espace de Dirichlet. Nous mettrons les conditions suivantes sur a et b :

(3.18) : $a(P)$ est intégrable sur ∂E et il existe un nombre $c > 0$ tel que $a(P) > c > 0$ sur ∂E.

(3.19) $b(P\,,\,Q)$ est intégrable sur $\partial E \times \partial E$ et $b(P\,,\,Q) = b(Q\,,\,P) \geqslant 0$.

Les fonctions dérivables sur $\overline{E}$ forment un espace pré-hilbertien avec le produit scalaire (3.16). Nous complétons cet espace en un espace hilbertien D_α, et on peut démontrer que D_α est un espace de Dirichlet. Nous ne donnerons pas la démonstration ici. La condition $a(P) > c > 0$ est employée en vérifiant l'axiome I de la définition 2.2.

<u>Les semi-groupes associés à</u> B_α . - Nous pouvons maintenant appliquer le lemme 2.8. Nous ne démontrons pas (3.17) directement, mais pour chaque v dérivable sur $\overline{E}$, nous avons pour l'élément u_λ qui rend minimum (2.25),

$$(3.20)\quad -\lambda\int_E u_\lambda B_\alpha v + \lambda\int_{\partial E} u_\lambda L_\alpha v + \int_E v(u_\lambda - f) = 0 \qquad ,$$

où L_α est donné par (3.15).

Nous pouvons écrire (3.20) sous la forme

$$(3.21)\quad -\lambda\int_E \Delta v\, I_\alpha u_\lambda + \lambda\int_{\partial E}\frac{\partial v}{\partial n} I_\alpha u_\lambda + \lambda\int_{\partial E} v\, u_\lambda\, a$$

$$+\lambda\int_{\partial E} v(P)\{\int_{\partial E}[u_\lambda(P) - u_\lambda(Q)][b(P\,,\,Q) + \mu(P\,,\,Q)]\, dS_Q\}\, dS_P$$

$$+\int_E v(u_\lambda - f) = 0 \qquad ,$$

où I_α est donné par (3.10) et $\mu(P\,,\,Q)$ par (3.12), et v est deux fois dérivable sur $\overline{E}$.

Si nous prenons dans (3.21) les fonctions v indéfiniment dérivables de support compact dans E, alors $v = \frac{\partial v}{\partial u} = 0$ sur ∂E, et nous voyons que $-\lambda\,\Delta I_\alpha u_\lambda = -\lambda B_\alpha u_\lambda = -u_\lambda + f$ p. p. dans E. (Nous pouvons modifier u_λ sur un ensemble de mesure nulle dans E, afin que cette relation soit valable partout.)

Si $f \in B(\overline{E})$, alors $u_\lambda \in B(\overline{E})$ par le lemme 2.9 (iii). Donc la dérivée normale $\frac{\partial}{\partial n} I_\alpha$ existe ; nous pouvons appliquer la formule de Green à la première intégrale dans (3.21) et employer l'identité (3.13) pour conclure que pour chaque v indéfiniment dérivable sur $\overline{E}$,

$$(3.22)\qquad \int_{\partial E} v\, L_\alpha u_\lambda = 0 \qquad ,$$

où L_α est donné par (3.15). Cela nous donne la condition limite $L_\alpha = 0$ de (3.15).

Alors, nous avons :

THÉORÈME 3.1. - A chaque $\lambda > 0$, et chaque $f \in B(\overline{E})$, il correspond un élément $R_\lambda f \in D_\alpha$, tel que

a. $$\lambda R_\lambda f - B_\alpha R_\lambda f = f \quad ;$$

b. $$L_\alpha R_\lambda f = 0$$

où L_α est donné par (3.15) sous les conditions (3.18) et (3.19) sur a et b ;

c. $$\lambda \| R_\lambda f \|_B \leq \| f \|_B \quad .$$

COROLLAIRE 3.1. – Employant la notation du théorème 3.1, l'image $R_\lambda(B(\overline{E}))$ est indépendante de λ ; les opérateurs R_λ sont les résolvantes d'un semi-groupe de contraction sur l'espace X_α = fermeture de $R_\lambda(B(\overline{E}))$ dans $B(\overline{E})$. Le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est la restriction de B_α à l'image $R_\lambda(X_\alpha)$.

Nous pouvons démontrer d'autres propriétés de R_λ, mais nous n'avons pas l'espace ici pour ces développements. Nous nous contentons de remarquer que R_λ peut être exprimé par un noyau :

(3.23) $$R_\lambda f(P) = \int_E H_\alpha(P , Q ; \lambda) f(Q) dQ$$

où H_α satisfait

(3.24) $$H_\alpha(P , Q ; \lambda) = G_\alpha(P , Q ; \lambda)$$
$$- \int_E G_\alpha(P , R ; \lambda) \{ \int_{\partial E} H_\alpha(T , Q ; \lambda) \frac{\partial}{\partial n_T} |RT|^{-n-\alpha+2} dS_T \} dR$$

et $G_\alpha(P , Q ; \lambda)$ est le noyau de (2.28). Il résulte de (3.24) et du corollaire 2.2 (b) que $R_\lambda f(P)$ est continue dans E.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEURLING (A.) and DENY (J.). - Espaces de Dirichlet, I : Le cas élémentaire, Acta Math., t. 99, 1958, p. 203-224.

[2] BEURLING (A.) and DENY (J.). - Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. of U. S. A., t. 45, 1959, p. 208-215.

[3] ELLIOTT (Joanne). - The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators, Trans. Amer. math. Soc., t. 76, 1954, p. 300-331.

[4] FROSTMAN (Otto). - Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles, Comm. Sém. math. Univ. Lund, t. 3, 1935, p. 1-115.

[5] FROSTMAN (Otto). - Sur le balayage des masses, Acta, Scient. math., Szeged, t. 9. 1938-1940, p. 43-51 ; et Comm. Sém. math. Univ. Lund, t. 4, 1939, 9 pages.

[6] GETOOR (R. K.). - First passage times for symmetric stable processes in space, Trans. Amer. math. Soc., t. 101, 1961, p. 75-90.

[7] HILLE (E.) and PHILLIPS (R. S.). - Functional analysis and semi-groups. - Providence, American mathematical Society, 1957 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., 31).

[8] KAC (Mark). - On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proceedings of the second Berkeley symposium on mathematical statistics and probability [1950. Berkeley] ; p. 189-215. - - Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951.

[9] KAC (M.) and POLLARD (H.). - The distribution of the maximum of partial sums of independent random variables, Canad. J. Math., t. 2, 1950, p. 375-384.

[10] RAY (Daniel). - Stable processes with an absorbing barrier, Trans. Amer. math. Soc., t. 89, 1958, p. 16-24.

[11] RIESZ (Marcel). - Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels, Acta, Scient. math., Szeged, t. 9, 1938-1940, p. 1-42.

[12] WIDOM (Harold). - Stable processes and integral equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 98, 1961, p. 430-450.