Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Marcel Brelot

Étude comparée de quelques axiomatiques des fonctions harmoniques et surharmoniques

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 1 (1961-1962), exp. nº 1b, p. 13-26

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_1_A2_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 1b

8 mars 1962

ÉTUDE COMPARÉE DE QUELQUES AXIOMATIQUES DES FONCTIONS HARMONIQUES ET SURHARMONIQUES (1)

par Marcel BRELOT

1. - Si l'équation $\Delta u = 0$ est liée à la théorie classique du potentiel, on peut penser qu'à des équations de type plus général peuvent être liés des développements analogues et c'est ce qu'on a d'abord fait dans des cas particuliers. Cela conduit même à partir de familles de fonctions plus générales que les solutions de telles équations et dans des espaces plus ou moins généraux. C'est un des aspects des recherches axiomatiques actuelles en théorie du potentiel.

En 1949, TAUTZ [16] songea à étendre axiomatiquement l'intégrale de Poisson, les fonctions harmoniques et surharmoniques dans des espaces topologiques généraux, mais s'attacha surtout à la topologie euclidienne.

En 1954, DOOB [8] reprit cette idée de façon plus générale, en désirant essentiellement d'une part que la théorie s'applique à des équations du 2e ordre non seulement de type elliptique mais aussi parabolique, d'autre part étudier surtout l'allure "à la frontière" des fonctions surharmoniques généralisées au moyen de notions probabilistes (mouvement brownien généralisé). Mais il ne pouvait traiter le problème de Dirichlet pour un ouvert relativement compact de l'espace de base d'une manière analogue au cas classique et il n'était question ni de la convergence des fonctions surharmoniques décroissantes, clef de la théorie classique fine du potentiel, ni de la représentation du type Riesz-Martin. Par la suite il songea plutôt à restreindre, voire supprimer la topologie [10] en renforçant donc le caractère probabiliste de ses recherches générales.

Afin d'étendre les questions fondamentales du cas classique, j'ai été amené en 1957/58 ([4],[5],[6]) à modifier et surtout restreindre les axiomes de Doob. La nouvelle théorie ne s'applique plus à l'équation de la chaleur, mais permet des développements considérables complétés et poursuivis par Mme R.-M. HERVÉ [12] et GOWRISANKARAN [11].

D'autre part (2), H. BAUER [2] reprit récemment la question en vue d'une synthèse plus large comprenant les bases des théories précédentes. C'est un progrès

(1) Conférence reprise à la réunion annuelle de la Société mathématique du Japon [juin 1962].

(2) Signalons aussi une tentative de KAMKE [13] et un autre travail de BAUER [1].

important mais qui ne peut encore aller très loin, vu les différences essentielles entre les cas elliptique et parabolique, en particulier pour la convergence.

2. - Afin de comparer ces diverses axiomatiques, d'ailleurs sans considérer ici les interprétations et développements probabilistes parallèles, je vais d'abord comme base de comparaison, rappeler la forme que j'ai choisie ; puis j'examinerai les hypothèses initiales de DOOB et celles récentes de BAUER. Enfin je proposerai une nouvelle version, inspirée de celles de DOOB et BAUER et s'appliquant aussi à l'équation de la chaleur, mais immédiatement comparable à l'axiomatique plus restreinte de base.

3. Axiomatique I (base de comparaison) [5], [6]. - On donne un espace Ω connexe localement compact, non compact (et qui sera localement connexe d'après les hypothèses ultérieures).

Dans tout ouvert ω est donné un espace vectoriel réel de fonctions finies continues, dites harmoniques, satisfaisant aux trois axiomes suivants, de caractère local, inspirés du cas classique :

Axiome 1 (de faisceau). - Toute fonction harmonique dans un ouvert ω est harmonique dans tout ouvert partiel, et toute fonction harmonique dans un voisinage ouvert de chaque point de ω est harmonique dans ω.

Définition : ω ouvert est dit régulier s'il est relativement compact et si, quelle que soit f finie continue (réelle) sur la frontière $\partial\omega$, il existe un prolongement continu unique harmonique dans ω soit H_f^ω, admettant de plus la propriété : $H_f \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$. Alors dans ω, $H_f^\omega(x)$ admet la représentation $\int f \, d\rho_x^\omega$, $d\rho_x^\omega$ (dite mesure harmonique relative à ω et x) de total 1 quand les constantes sont harmoniques.

Axiome 2 (de résolubilité locale du problème de Dirichlet). - Il existe une base de domaines réguliers.

Axiome 3 (de convergence). - Tout ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans un domaine converge vers $+\infty$ ou vers une fonction harmonique (3).

Cela implique que dans un domaine, u harmonique $\geqslant 0$ entraîne soit $u = 0$ partout, soit $u > 0$ partout, et cela équivaut à ce que, pour tout domaine ω

(3) Ce qui, s'il y a une base dénombrable d'ouverts équivaut au même énoncé pour des suites croissantes.

régulier, la sommabilité $-d\rho_x^\omega$ est indépendante de x et, pour f sommable $-d\rho_x^\omega$, $\int f\, d\rho_x^\omega$ harmonique de x.

Pour certains développements, on a besoin de l'existence d'une base dénombrable de Ω ; je le dirai alors explicitement.

On définit les fonctions hyperharmoniques dans ω_0 ouvert comme s. c. i., $> -\infty$ et satisfaisant à $u(x) \geqslant \int u\, d\rho_x^\omega$ pour tout ouvert ω (ou seulement domaine) régulier de fermeture dans ω_0. Dans un domaine, une telle u est partout $+\infty$ ou finie sur un ensemble partout dense et dite alors surharmonique : u est hypo- ou sous-harmonique si $-u$ est hyper- ou surharmonique.

Quelques propriétés essentielles :

1° Caractère additif et local des fonctions hyper- ou surharmoniques.

2° Principe de minimum : si dans ω ouvert relativement compact, il existe h harmonique $> \varepsilon > 0$, la condition pour u hyperharmonique, $\liminf u$ en tout point-frontière $\geqslant 0$, implique $u \geqslant 0$, et cela s'étend à un ouvert quelconque en prenant la frontière dans l'espace $\overline{\Omega}$ compactifié par adjonction du point d'Alexandroff.

Si les constantes sont harmoniques, on peut prendre $h = 1$ et la limitation 0 peut être remplacée par K quelconque.

3° Si u hyperharmonique (surharmonique) dans ω_0 est remplacée dans ω régulier $\subset \overline{\omega} \subset \omega_0$ par $\int u\, d\rho_x^\omega$, on obtient une fonction hyperharmonique (resp. surharmonique).

Quelques conséquences dans ω ouvert :

1° Pour u surharmonique $\geqslant 0$, existence d'une plus grande minorante harmonique ; si c'est 0, u est dit potentiel.

Noter que dans un domaine ω, l'existence de deux fonctions harmoniques > 0 non proportionnelles entraîne celle d'un potentiel > 0.

2° Les différences de fonctions harmoniques $\geqslant 0$ forment un espace de Riesz complètement réticulé pour l'ordre naturel.

Les différences de deux fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ (ou plutôt les classes d'équivalence $[u, v]$ de couples (u, v) de telles fonctions, l'équivalence $(u, v) \sim (u_1, v_1)$ signifiant $u + v_1 = v + u_1$, et les opérations d'espace vectoriel étant évidentes) forment un espace de Riesz complètement réticulé pour l'ordre naturel et aussi l'ordre spécifique définis par $[u, v] \succ [u_1, v_1]$

signifiant $u + v_1 = v + u_1 + \text{fct} \geqslant 0$ (resp. surharmonique $\geqslant 0$).

3° Théorème de partition (Mme HERVÉ). - Pour tout ouvert ω, toute fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω est la somme de deux autres $V + V'$ où V' est harmonique dans ω, et il existe une telle décomposition (canonique) $V_1 + V_1'$ où V_1' majore spécifiquement tout V'.

Remarque. - Soit f finie continue > 0 dans Ω ; les quotients par f des fonctions harmoniques satisfont aux axiomes (avec les mêmes ouverts réguliers) et seront dits f-harmoniques. C'est particulièrement intéressant s'il existe h harmonique > 0 qu'on prendra pour f, car les fonctions h-harmoniques contiennent les constantes. Les fonctions hyper-h-harmoniques sont alors les quotients par h des fonctions hyperharmoniques.

4. Les trois grandes questions.

Le problème de Dirichlet. - Ne considérons qu'un cas particulier important : on prend un ouvert relativement compact ω et une donnée f sur la frontière $\partial\omega$.

Afin de reprendre la méthode des enveloppes de Perron-Wiener, nous avons besoin d'un principe de minimum dans ω (qui aura lieu s'il existe une fonction harmonique > 0 dans un ouvert contenant $\overline{\omega}$) et d'une approximation de f finie continue sur $\partial\omega$ par une différence de fonctions finies continues dans $\overline{\omega}$, surharmoniques dans ω. Or cela est satisfait sous l'hypothèse simple d'existence d'un potentiel > 0 dans Ω (ou dans un ouvert contenant $\overline{\omega}$). On reprend alors la théorie classique pour f finie continue, et on la prolonge de même à f quelconque en supposant une base dénombrable de Ω. Mais on ne sait rien sur l'ensemble des points "irréguliers", qui dans une bonne théorie doit être de "mesure harmonique nulle" pour chaque domaine composant de ω. Il va falloir un nouvel axiome.

Le théorème de convergence. - On supposera les axiomes 1, 2, 3, une base dénombrable et, dans le domaine d'étude qu'on prendra pour Ω, l'existence d'un potentiel > 0 (sans lequel les fonctions surharmoniques > 0 seraient harmoniques et proportionnelles).

Nous adjoindrons l'axiome D (de domination), dont l'une des formes s'exprime ainsi :

Si u est un potentiel localement borné, harmonique dans ω_0 , toute fonction surharmonique majorant u sur $\complement\omega_0$ le majore sur ω_0 .

Une forme équivalente très importante s'énonce :

Pour tout potentiel u localement borné, si la restriction à son support (complémentaire de l'ouvert maximum où u est harmonique) est finie continue, u est fini continu dans Ω .

Cet axiome entraîne le théorème-clef de convergence :

Si u_i est une famille de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$, $\inf u_i$ ne diffère de sa régularisée sur-harmonique (fonction égale en chaque point à la lim inf en ce point) que sur un ensemble polaire, c'est-à-dire tel qu'il existe un potentiel valant $+\infty$ au moins sur lui. Soulignons (d'après Mme HERVÉ) que ce théorème équivaut à D si, quel que soit x les potentiels de support x sont proportionnels. Cette proposition (hypothèse de proportionalité) si elle était vraie, simplifierait la théorie et la ferait rentrer dans le schéma général de Hunt, mais on n'a pu encore en décider.

Ce théorème de convergence, basé sur (D), permet un développement avancé de la théorie du potentiel (au point de vue des fonctions) : balayage, effilement, topologie fine. Il entraîne que l'ensemble des points irréguliers du problème de Dirichlet précédent est polaire. C'est l'extension en détail de la théorie classique.

La représentation intégrale de Martin-Riesz dans Ω . - Nous supposons Ω à base dénombrable et, dans les axiomes de base, nous renforçons (3) selon

(3') : Toute fonction harmonique dans un domaine est soit 0 , soit partout > 0 .

Les fonctions harmoniques > 0 dans ω égales à 1 en un point x sont également continues en x .

Nous supposerons l'existence d'un potentiel > 0 dans Ω , sinon l'étude globale dans Ω serait triviale. Il est alors possible d'appliquer le théorème récent de Choquet sur les éléments extrémaux [4] [7] dans l'espace déjà considéré des différences de fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ au moyen du cône (γ) des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ et de la base (β) définie par l'hyperplan correspondant à la condition $\int w \, d\rho_{y_0}^{\omega} = 1$ (ω_0 régulier). On a déjà les propriétés de treillis et la forme initiale du théorème de Choquet demandait le choix d'une topologie

(4) Une rédaction très approfondie et améliorée de CHOQUET et MEYER paraîtra dans les Annales de l'Institut Fourier, t. 13 (1963).

rendant $(\mathcal{B})$ compacte ; je l'avais fait en adjoignant un nouvel axiome, mais Mme HERVÉ, et c'est là un point important de sa thèse, y a réussi sans restriction. La métrisabilité de la base est alors facile, et on déduit de l'interprétation de tout point de $\mathcal{B}$ comme centre de gravité d'une mesure unique portée par l'ensemble des points extrémaux, en passant des fonctions à leurs valeurs en un point, la formule suivante : pour toute fonction surharmonique $u \geq 0$,

$$u(y) = \int w(y)\ d\mu(w)$$

où w parcourt la base $\mathcal{B}$, et μ est une mesure ≥ 0 sur $\mathcal{B}$ qui ne charge que l'ensemble des points extrémaux et est alors unique.

Tout élément extrémal est : soit une fonction harmonique, soit un potentiel de support ponctuel, d'où, en décomposant $\mu = \mu_1 + \mu_2$ chargeant respectivement les ensembles de ces deux types d'éléments,

$$u(y) = \int w(y)\ d\mu_1(w) + \int w(y)\ d\mu_2(w) \quad .$$

La première intégrale représente la plus grande minorante harmonique et donne dans le cas classique la représentation par MARTIN des fonctions harmoniques > 0 au moyen des fonctions dites "minimales", qui sont à un facteur près les éléments extrémaux harmoniques précédents.

La deuxième intégrale donne dans le cas classique le potentiel de Green de la décomposition de Riesz ainsi généralisée.

Dans le cas général, on pourra songer à adjoindre à Ω comme "points-frontière" les éléments extrémaux harmoniques, qui dans le cas classique correspondent à la partie utile de la frontière de Martin. C'est le point de départ de recherches actuellement développées par GOWRISANKARAN [11].

5. Exemples. - D'abord la théorie classique en espace euclidien, un peu plus généralement dans les espaces de Green et plus spécialement sur les surfaces de Riemann.

La théorie s'applique aussi aux équations du deuxième ordre de type elliptique, par exemple dans R^n , en prenant comme fonctions de base les solutions de :

$$L(u) = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0$$

($\sum a_{ij} X_i X_j$ forme quadratique définie positive) avec quelques hypothèses de régularité sur les coefficients.

Il est immédiat, que les axiomes 1, 2, 3 sont satisfaits pour les solutions d'après l'étude locale de cette équation, si $c \leqslant 0$, grâce à un principe de minimum alors bien connu.

Mme HERVÉ remarque que cette restriction n'est pas nécessaire, grâce à des résultats de GILBERG-SERRIN : en effet au voisinage d'un point, on peut trouver $f \in C^\infty$, > 0, et L' analogue à L avec un coefficient $c' < 0$, tels que $Lu = L'(fu)$. Les axiomes sont alors vrais pour les fonctions fu, donc pour les u, et on a même (3') et (D).

Mais les solutions de l'équation de la chaleur $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ ne satisfont pas aux axiomes ; il existe en effet des solutions $\geqslant 0$ dans un domaine, nulles dans une partie, > 0 ailleurs. L'axiome 3 est trop fort.

6. Axiomatique de Doob. - Après ses premiers travaux ([8], [9]), DOOB pensa qu'il y avait lieu de réduire, voire d'éliminer la topologie ; mais une étude sans topologie [10], avec des mesures abstraites, a comme cadre naturel celui des probabilités et s'écarte des préoccupations des analystes de la théorie du potentiel et des équations aux dérivées partielles.

Aussi allons-nous plutôt, sans remonter à d'anciens travaux (5) adaptant au cas parabolique certaines méthodes de l'équation de Laplace, examiner l'axiomatique initiale de Doob, d'une manière qui se prête à la comparaison avec la précédente.

On partira de l'espace Ω (localement compact) métrisable (ce qui équivaut à l'existence d'une base dénombrable d'ouverts).

L'axiome 1 est conservé, mais on ajoute que les constantes sont harmoniques. Les ouverts réguliers sont définis de la même manière à cela près qu'il faut supposer la frontière non vide.

L'axiome 2 sera affaibli : on supposera l'existence d'une base d'ouverts réguliers.

L'axiome 3 sera affaibli aussi : toute suite croissante de fonctions harmoniques dans un ouvert ω, dont la limite est finie sur un ensemble partout dense dans ω, admet une limite harmonique.

Après ces hypothèses locales, il nous faut remplacer un principe de minimum que nous n'avons plus ; DOOB suppose la propriété suivante (vraie dans l'axiomatique I) :

---

(5) STERNBERG [15] et PETROWSKY [14].

Attachons à chaque point x d'un ouvert régulier ω_0, un voisinage $\mathcal{V}_x$. On dira que $X \in \omega_0$ est atteint à partir de $x_0 \in \omega_0$ s'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n = X$ dans ω_0 tels que x_i soit sur la frontière d'un ω régulier $\subset \overline{\omega} \subset \mathcal{V}_x \subset \omega_0$ et même sur le support fermé de la mesure $d\rho^{\omega}_{x_{i-1}}$. L'axiome est que l'ensemble des points atteints à partir de x_0 dans ω_0 admet un point adhérent sur $\partial\omega_0$.

On introduira les fonctions hyperharmoniques (comme dans I) et les surharmoniques qui seront les hyperharmoniques finies sur un ensemble partout dense. Grâce au dernier axiome on voit qu'elles ont le caractère local, satisfont au principe de minimum dans les ouverts réguliers et les ouverts relativement compacts, réunions dénombrables d'ouverts réguliers emboités, et que la propriété de hyper- ou surharmonicité se conserve en remplaçant u par $\int u \, d\rho^{\omega}_{x}$ dans un ω régulier.

Les théorèmes de treillis s'étendent ainsi que celui de partition. Mais on n'a pas de développement commode sur le problème de Dirichlet, la question de convergence paraît fort différente et je ne sais ce qu'on peut faire au sujet de la représentation intégrale.

Comparaison avec la première axiomatique. - Les trois axiomes de (I) + base dénombrable + Ctes harmoniques entraînent les axiomes de Doob ; ceux-ci spécialement choisis pour les interprétations probabilistes et, dans ce cadre, pour l'étude "à la frontière" des fonctions surharmoniques, ont l'avantage de s'appliquer à l'équation de chaleur comme à celles du type elliptique.

7. Axiomatique de Bauer [2].

Ω est toujours un espace localement compact. On conserve l'axiome 1 (sans supposer les constantes harmoniques). Même définition d'ouverts réguliers et même axiome 2 que dans DOOB. On peut alors introduire les fonctions hyperharmoniques comme précédemment ainsi que la notion de fonction f-harmonique ou hyper-f-harmonique (f finie continue > 0).

BAUER adjoint d'abord un axiome non local, qui se révèle puissant, mais grâce à des démonstrations difficiles :

Axiome T. - Il existe une fonction harmonique $h > 0$ dans Ω et les fonctions hyper-h-harmoniques séparent Ω [6].

Les axiomes précédents suffisent à entraîner :

1° Tout ouvert partiel est non compact.

2° Principe de minimum pour tout ouvert relativement compact ω : c'est-à-dire

$$\liminf u(\text{hyperharmonique}) \geqslant 0 \text{ en tout point-frontière} \implies u \geqslant 0 \quad .$$

Cela implique que ω a une frontière non vide.

3° Caractère local des fonctions hyperharmoniques.

4° Le remplacement de u par $\int u \, d\rho_x^\omega$ (ω régulier) conserve l'hyperharmonicité de ω.

Axiomes de convergence. - BAUER affaiblit ceux des théories précédentes et choisit deux formes selon les applications :

Soit dans un ouvert, un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques

(K_1) Si les fonctions sont bornées supérieurement, la limite est harmonique .

(K_2) Si la limite est partout finie, elle est harmonique .

(K_1) suffit pour entraîner que les différences de fonctions harmoniques $\geqslant 0$ forment un espace de Riesz complètement réticulé (pour l'ordre naturel).

Mais même (K_2) ne suffit pas pour l'existence d'une plus grande minorante harmonique d'une fonction $\geqslant 0$ surharmonique c'est-à-dire hyperharmonique finie sur un ensemble partout dense. On ne peut donc parler de potentiel, ni de treillis pour les surharmoniques, ni de théorème de partition.

Comparaison. - L'axiomatique (I) et l'existence de deux fonctions harmoniques > 0 non proportionnelles entraînent les axiomes de Bauer, en particulier (T),

---

(6) Si $\mathcal{V}_x$ est un voisinage ouvert de x , appelons $\mathcal{V}_x$-hyperharmonique une fonction hyperharmonique dans chacun des $\mathcal{V}_x$ $(x \in \Omega)$. Alors il est équivalent dans T de supposer que les $\mathcal{V}_x$-hyper-h-harmoniques séparent Ω . Cela entraîne que les $\mathcal{V}_x$-hyper-h-harmoniques sont hyper-h-harmoniques.

et même la séparation (T^+) pour les hyper-h-harmoniques ≥ 0 .

L'axiomatique de Doob n'implique pas (T).

Le problème de Dirichlet peut grâce à (T) être abordé comme dans (I).

Prenons donc le cas d'un ouvert relativement compact ω . On peut avec (K_1) seulement, grâce au théorème d'approximation de Stone et à (T), qui entraîne la séparation pour les fonctions hyperharmoniques finies continues, faire une approximation de la donnée finie continue sur $\partial\omega$ par une différence de telles fonctions. D'où l'extension de la méthode de Perron-Wiener et l'introduction d'une mesure harmonique $d\mu_x^\omega$. Pour étudier les fonctions résolutives f , c'est-à-dire pour lesquelles les enveloppes $\underline{H}_f$, $\overline{H}_f$ sont égales et finies, on supposera la frontière métrisable ; ces f résolutives sont encore les fonctions sommables $- d\mu_x^\omega$ $(\forall \ x \in \omega)$, mais cela n'implique pas que l'enveloppe commune soit harmonique ; cette propriété devient vraie avec (K_2). Ainsi la première partie du problème de Dirichlet est traitée ; mais on ne sait rien sur les points irréguliers, sinon que les points-frontière ne sont pas tous irréguliers.

Avantages. - L'axiomatique de Bauer, caractérisée par l'axiome (T), s'applique non seulement aux équations de type elliptique mais à celle de la chaleur et sans doute à bien des équations de type parabolique. La vérification de (T) est en fait souvent facile. Le problème de Dirichlet est étudié sous des hypothèses très larges et les recherches en cours (7) de l'auteur prolongent notablement la théorie précédente, mais sans aborder les deux autres grandes questions.

8. Variante et synthèse.

Si l'on n'aime pas la forme de l'axiome (T), si l'on veut une théorie s'appliquant à l'équation de la chaleur et cumulant les avantages des théories de DOOB et BAUER, enfin de comparaison immédiate avec la théorie (I) beaucoup plus riche dont elle servirait d'introduction, on peut proposer ce qui suit :

Espace Ω localement compact, et dans chaque ouvert, espace vectoriel de fonctions "harmoniques" - mêmes axiomes 1 et 2 que dans BAUER.

Axiome 1. - Comme précédemment.

Même définition des ouverts réguliers (localement compacts à frontière non vide, etc.).

---

(7) H. BAUER [3].

Axiome 2. - Il existe une base d'ouverts réguliers (ce qui est plus faible que dans (I)).

Axiome 3. - Plus faible de façon évidente que le (3) initial : on prend une conséquence de l'axiome (3) initial et on adjoint l'axiome de convergence de Doob, mais pour ordonné filtrant, à savoir :

α. Principe local de minimum. - Dans un voisinage $\mathcal{V}_x$ de chaque point x on suppose pour tout ouvert $\omega \subset \mathcal{V}_x$ et de frontière non vide :

$$u \text{ harmonique } \to 0 \text{ à la frontière } \Longrightarrow u = 0 \quad .$$

Cela est équivalent à la condition générale

$$\liminf u \text{ à la frontière } \geqslant 0 \Longrightarrow u \geqslant 0$$

et il suffirait d'ailleurs par la suite de se restreindre au cas de ω intersection de deux ouverts réguliers (et par suite de frontière non vide).

β. Dans un ouvert, tout ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques admet une limite qui est harmonique si elle est finie sur un ensemble partout dense.

Ces axiomes locaux sont vérifiés par l'équation de la chaleur et fournissent déjà des résultats préliminaires importants :

On introduira comme précédemment les fonctions hyper- ou surharmoniques dans un ouvert ω_0 , et celles dites $\mathcal{V}_x$-hyper- ou surharmoniques c'est-à-dire hyper- ou surharmoniques dans chacun des voisinages ouverts $\mathcal{V}_x$ associés aux $x \in \omega_0$. Le remplacement d'une telle fonction v par $\int v \, d\rho_1^{\omega}$, pour ω régulier dans un voisinage assez petit d'un point, conserve la propriété d'être hyper- ou $\mathcal{V}_x$-hyper- (ou sur-) harmonique [8] (et si v est surharmonique, $\int v \, d\rho_y^{\omega}$ est harmonique).

On en déduit, pour toute fonction surharmonique (ou $\mathcal{V}_x$-surharmonique) $\geqslant 0$, l'existence d'une plus grande minorante harmonique (on considère les sous-harmoniques minorantes et leur remplacement local par l'intégrale). Si cette minorante

---

[8] Si V est la fonction modifiée, soit ω_1 un autre ouvert régulier ; on introduit sur $\partial\omega$ une fonction finie continue $\theta \leqslant v$ et sur $\partial\omega_1$ une fonction finie continue $\theta_1 \leqslant V$. On voit (grâce à l'axiome 3, α) que, pour ε fixé > 0 , on a, dans $\omega \cap \omega_1$, $H^{\omega}_{\theta+\varepsilon} \geqslant H^{\omega_1}_{\theta_1-\varepsilon}$ pour θ et θ_1 convenables, d'où $V \geqslant \int V \, d\rho_y^{\omega_1}$ dans ω_1 .

est zéro, la fonction est dite <u>potentiel</u> (resp. $\mathcal{Y}_x$-potentiel) [9].

On remarque encore que si f est finie continue >0, les quotients par f des fonctions harmoniques satisfont aux axiomes et sont dits f-harmoniques. Même introduction des fonctions hyper- ou sur-f-harmoniques.

Afin de poursuivre la théorie, on n'évitera pas une hypothèse globale par exemple :

<u>Hypothèse</u> H_ω. - Il existe dans tout ouvert relativement compact :

a. une fonction harmonique >0,

b. un potentiel (ou seulement un $\mathcal{Y}_x$-potentiel, et on notera l'hypothèse H'_ω) >0 en tout point donné à l'avance, et l'on en déduit un autre qui, en outre, n'est pas harmonique au voisinage de ce point [10].

Ce sera vrai en particulier s'il existe dans Ω une fonction harmonique >0 et un potentiel (resp. $\mathcal{Y}_x$-potentiel) >0 en tout point donné (hypothèse (H) ou (H')).

Bien <u>remarquer</u> que dans l'axiomatique (I), l'existence d'un potentiel >0 entraîne (H_ω). Or cet (H_ω) ou seulement (H'_ω) entraîne (dans l'axiomatique actuelle) dans ω relativement compact, l'axiome (T) et même (T^+) [11], d'où les conséquences de la théorie de BAUER :

---

[9] Remarquons encore, en vue de la suite, que si φ est une fonction sur $E \subset \Omega$, majorée par une v surharmonique (ou $\mathcal{Y}_x$-surharmonique) dans Ω, l'enveloppe inférieure R_φ^E des v-surharmoniques (resp. $\mathcal{Y}_x$-surharmoniques) **majorant** φ sur E admet une régularisée $\hat{R}_\varphi^E$ (lim inf en chaque point) surharmonique (ou $\mathcal{Y}_x$-surharmonique), d'ailleurs harmonique sur $\complement \bar{E}$.

[10] Si V est le premier, on considère $\hat{R}_V^\omega$ pour un voisinage du point. C'est un potentiel qui ne peut être harmonique dans un ouvert contenant $\bar{\omega}$.

[11] Soit h harmonique >0 dans ω, et considérons-y les h-fonctions (resp. $\mathcal{Y}_x$-h-fonctions). Soit $x \neq y$, les voisinages ω_1, ω_2 disjoints, $u(x) > 0$ (u potentiel). $\hat{R}_u^{\omega_1} = u_1$ est un potentiel ; s'il a la même valeur en y qu'en x, soit $u(x)$, on considère $\hat{R}_{u_1}^{\omega_2} = u_2$ et sa valeur en x. Si elle est encore $u(x)$, on forme $\hat{R}_{u_2}^{\omega_1}$, etc. Si l'on doit répéter indéfiniment l'opération, la limite de ces fonctions sera harmonique, donc nulle, ce qui est contradictoire.

Caractère local des fonctions hyper- ou surharmoniques (toute $\mathcal{V}_x$-hyperharmonique est donc hyperharmonique et $H'_\omega \Longrightarrow H_\omega$).

Principe de minimum dans tout ouvert relativement compact.

Remplacement de u (hyperharmonique ou surharmonique) par $\int u \, d\rho_x^\omega$ (ω régulier) conservant l'hyper- ou surharmonicité.

Enfin on saura donc traiter comme BAUER le problème de Dirichlet pour un ouvert relativement compact. J'ai indiqué cette variante à BAUER qui m'a alors, signalé que, dans le cas d'une base dénombrable, cette axiomatique avec l'hypothèse (H) équivaut aux axiomes 1 et 2 de Bauer, augmentés de son axiome (T^+) et de l'axiome de convergence de Doob.

Nous avons donc bien abouti, à quelques variantes de forme près, à une axiomatique simple et assez riche, s'appliquant aussi à l'équation de la chaleur, et dont des restrictions évidentes donnent la première axiomatique qui suit de près la théorie classique, restrictions dont l'introduction pourra être reculée davantage par les recherches actuelles de BAUER.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 11, 1961, p. 89-136.

[2] BAUER (Heinz). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.

[3] BAUER (Heinz). - Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (à paraître).

[4] BRELOT (Marcel). - Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts, Séminaire de théorie du potentiel [Séminaire Brelot-Choquet-Deny], t. 1, 1957, n° 6, 16 pages.

[5] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire de théorie du potentiel [Séminaire Brelot-Choquet-Deny], t. 2, 1958, n° 1, 40 pages.

[6] BRELOT (Marcel). - Lectures on potential theory. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[7] CHOQUET (Gustave). - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, n° 139, 15 pages.

[8] DOOB (J. L.). - Probability methods applied to the first boundary value problem, Proceedings of the Third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability [1954. 1955. Berkeley], Vol. 2 ; p. 49-80. - Berkeley, University of California Press, 1956.

[9] DOOB (J. L.). - Probability theory and the first boundary value problem, Illinois J. Math., t. 2, 1958, p. 19-36.

[10] DOOB (J. L.). - The first boundary value problem, Colloquium lectures of the summer meeting of the American mathematical Society, 1960.

[11] GOWRISANKARAN (Kohur). - Limites fines "à la frontière" dans la théorie axiomatique du potentiel de M. Brelot, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 450-451.

[12] HERVÉ (Mme Rose-Marie). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[13] KAMKE (Erich). - Über die erste Randwertaufgabe bei der Laplace- und der Wärmeleitungs- Differentialgleichung, Jahr. Deutsch. Math. Verein., t. 62, 1960, p. 1-33.

[14] PETROWSKY (I.). - Zür ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung, Comp. Math., t. 1, 1935, p. 383-419.

[15] STERNBERG (W.). - Über die Differentialgleichung der Wärmeleitung, Math. Annalen, t. 101, 1929, p. 394-398.

[16] TAUTZ (G.). - Zür Theorie der ersten Randwertaufgabe, Math. Nachr., t. 2, 1949, p. 279-303.