Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Marcel Brelot

Intégrabilité uniforme quelques applications à la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 6, nº 1 (1961-1962), exp. nº 1a, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1961-1962__6_1_A1_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
6e année, 1962, n° 1a

8 février 1962

INTÉGRABILITÉ UNIFORME
QUELQUES APPLICATIONS À LA THÉORIE DU POTENTIEL [1]

par Marcel BRELOT

1. - Cette notion bien connue des probabilistes a été depuis quelques années utilisée par J. L. DOOB ([6] à [9]) de façon très heureuse en théorie du potentiel. Je vais en rappeler des propriétés essentielles, puis j'en donnerai des applications sous des formes voisines de celles de DOOB ; c'est particulièrement intéressant pour les espaces de Green et la frontière de Martin, et cela me conduira à traiter une question analogue avec d'autres frontières.

2. - Considérons une famille de mesures abstraites (de Daniell) $\mu_i \geqslant 0$ dans des espaces abstraits respectifs X_i. Supposons les constantes mesurables-μ_i, et $\{\mu(X_i)\}$ borné. La famille de fonctions réelles f_i intégrables-μ_i dans X_i est dite uniformément intégrable si, en posant

$$A_{a,i} = \{ x \in X_i \ , \ \ |f_i| \geqslant a \} \quad ,$$

$$\int_{A_{a,i}} |f_i| \, d\mu_i \to 0 \quad \text{uniformément en } i \qquad (a \to +\infty) \quad .$$

α. On démontre facilement que cette propriété équivaut aux conditions simultanées

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_i \int_{X_i} |f_i| \, d\mu_i < \infty \\ \\ \int_e |f_i| \, d\mu_i \quad \text{est arbitrairement petit avec} \quad \mu_i(e) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (e \quad \text{mesurable-}\mu_i) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire est $< \varepsilon$ donné dès que $\mu_i(e) < \eta$ convenable.

Cela résulte aussitôt des inégalités immédiates :

$$(\alpha') \quad \int_e |f_i| \, d\mu_i \leqslant \int_{e \cap A_{a,i}} |f_i| \, d\mu_i + a \int_{\complement A_i \cap e} d\mu_i \quad \text{en particulier pour} \quad e = X_i \ .$$

---

[1] Cet exposé, dont on abrège ici l'introduction sur l'intégrabilité uniforme (car son étude a été par la suite très développée par COURRÈGE dans le "Séminaire d'initiation à l'Analyse" de CHOQUET, 1962), a été repris dans d'autres conférences, et est complété dans cette rédaction par des extensions mentionnées dans le texte.

On en déduit les conditions (α) lorsque $\{f_i\}$ est uniformément intégrable

$$(\alpha'') \qquad \int_{A_{a,i}} |f_i| \, d\mu_i \geqslant a \, \mu_i(A_{a,i}) \quad .$$

La première condition (α) entraîne que $\mu_i(A_{a,i}) \to 0$ avec $1/a$ et la seconde fournit l'intégrabilité uniforme.

β. La définition équivaut aussi à l'existence d'une fonction borélienne réelle $\varphi(x) \geqslant 0$ infinie pour $x = +\infty$ telle que

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{x} \to +\infty & x \text{ fini } \to +\infty \\ \sup \int \varphi(|f_i|) \, d\mu_i < \infty & . \end{cases}$$

On peut même alors trouver une φ croissante et convexe.

Nous aurons surtout besoin de la suffisance pour $\varphi = x^2$, ce qui est immédiat. Car si $\int f_i^2 \, d\mu_i \leqslant K$, on a

$$\left(\int_e |f_i| \, d\mu_i \right)^2 \leqslant \int_e f_i^2 \, d\mu_i \cdot \mu_i(e) \leqslant K \, \mu_i(e)$$

d'où les conditions (α).

Remarque. - Sans avoir besoin d'approfondir ici la question, signalons encore pour la situer que si μ_i , X_i sont fixes et $\{f_i\}$ une suite f_n , la L_1-convergence de f_n pour la mesure considérée équivaut à la conjonction de la convergence en mesure et de l'intégrabilité uniforme.

3. Rappel d'axiomatiques. - Prenons d'abord l'axiomatique inspirée par DOOB [6] des fonctions harmoniques et surharmoniques, sous la forme développée dans [3].

Nous considérons un espace fondamental Ω , convexe, non compact, mais localement compact, et dans chaque ouvert ω un espace vectoriel de fonctions réelles finies continues, dites harmoniques, satisfaisant aux trois axiomes suivants (de caractère local) :

Axiome 1. - Toute fonction harmonique dans ω est harmonique dans ω' ouvert $\subset \omega$, et toute fonction localement harmonique dans ω est harmonique dans ω .

Axiome 2. - Il existe une base d'ouverts connexes réguliers.

On dit que ω est régulier, si $\overline{\omega}$ est compact, et si toute fonction finie, continue sur $\partial\omega$, se prolonge continûment dans $\overline{\omega}$ selon une fonction harmonique dans ω, de façon unique, et si ce prolongement est en chaque point x croissant avec f. On le note $H_f^{\omega}(x)$, et il est de la forme $\int f \, d\rho_x^{\omega}$, $d\rho_x^{\omega}$ étant une mesure $\geqslant 0$ sur $\partial\omega$ dite mesure harmonique.

Axiome 3. - Un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques dans un domaine ω a une limite harmonique ou partout $+\infty$ dans ω.

On appelle hyperharmonique dans ω toute fonction réelle u s. c. i. $> -\infty$ dans ω satisfaisant à

$$u(y) \geqslant \int u(x) \, d\rho_y^{\omega'}(x)$$

pour tout ouvert régulier $\omega' \subset \overline{\omega} \subset \omega$ ($-u$ est dite hypoharmonique). Dans chaque domaine composant, une telle fonction vaut $+\infty$ ou bien est finie sur un ensemble partout dense et alors est dite surharmonique dans ω.

Toute fonction v surharmonique $\geqslant 0$ dans ω admet une plus grande minorante harmonique ; si elle est nulle, v est dite un potentiel.

Dans tout ouvert ω où existe une fonction harmonique $> \varepsilon > 0$, si une fonction hyperharmonique admet en tout point-frontière dans $\overline{\Omega}$ (obtenu par adjonction du point d'Alexandroff) une lim inf $\geqslant 0$, elle est $\geqslant 0$ (principe de minimum).

C'est vrai de tout ouvert relativement compact s'il existe dans Ω un potentiel > 0.

Un problème général de Dirichlet. - Soit dans Ω un ensemble Φ de filtres $\mathfrak{F}$ sans point adhérent dans Ω tels que, pour toute fonction hyperharmonique v,

$$\liminf_{\mathfrak{F}} v \geqslant 0 \quad \text{quel que soit} \quad \mathfrak{F} \in \Phi \quad \text{implique} \quad v \geqslant 0 \quad .$$

Soit une fonction réelle $f(\mathfrak{F})$ sur Φ. On considère les fonctions hyperharmoniques v satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} v \quad \text{est bornée inférieurement} \\ \liminf_{\mathfrak{F}} v \geqslant f(\mathfrak{F}) \quad \text{quel que soit} \quad \mathfrak{F} \in \Phi \end{cases} \quad .$$

Alors l'enveloppe inférieure $\overline{\mathcal{H}}_f$ des v est $+\infty$, $-\infty$ ou harmonique.

On introduit aussi

$$\underline{\mathcal{H}}_f = - \overline{\mathcal{H}}_{-f} \quad ;$$

on a

$$\underline{\mathcal{H}}_f \leq \overline{\mathcal{H}}_f \quad .$$

Lorsqu'il y a égalité avec une fonction finie, donc harmonique, notée $\mathcal{H}_f$, on dit que f est résolutive, et $\mathcal{H}_f$ est appelée solution.

Cas particulier. - Supposons l'existence d'un potentiel >0 dans Ω. Considérons comme espace fondamental un domaine quelconque Ω' relativement compact, et comme filtres $\mathcal{F}_x$ ceux des traces ~~des voisinages~~ des points-frontière x de Ω'. Ils satisfont à la condition précédente, et toute fonction f de $\mathcal{F}_x$, continue de x sur $\partial\Omega'$, est résolutive. La solution $H_f(y)$ peut alors s'écrire $\int f(x)\, d\mu_y(x)$ où $d\mu_y$ est une mesure de Radon ≥ 0 sur $\partial\Omega'$.

On peut plus généralement considérer un ouvert Ω'' relativement compact, une fonction f finie continue sur $\partial\Omega''$ et la solution dans chaque composante connexe au sens précédent. Elle peut être définie directement dans Ω'' au moyen de fonctions hyperharmoniques dans Ω'' , de lim inf $\geq f$ à la frontière. L'enveloppe inférieure est la solution $H_f^{\Omega''}$ précédente qui s'écrit $\int f(x)\, d\mu_y(x)$: $d\mu_y$ est dite mesure harmonique relative au point y .

Lorsque les constantes sont harmoniques, cette mesure a une norme $\int d\mu_y = 1$. Nous appellerons (A) l'axiomatique précédente, y compris l'hypothèse du potentiel >0 et des constantes harmoniques.

4. Extension (E) (2). - Nous allons même considérer des hypothèses plus générales extraites des recherches ultérieures de H. BAUER [1]. Prenons Ω seulement localement compact, et conservons l'axiome 1 . Appelons régulier tout ouvert relativement compact de frontière non vide possédant la même propriété que plus haut. L'axiome 2 sera affaibli en supposant qu'il existe une base d'ouverts réguliers. On peut alors introduire les fonctions hyperharmoniques comme plus haut. L'axiome 3 sera affaibli en supposant que, sur un ouvert, un ordonné filtrant croissant de fonctions harmoniques bornées supérieurement dans leur ensemble converge vers une fonction harmonique.

---

(2) Les conditions, plus larges, introduites dans cette rédaction, s'appliquent alors au théorème 1 que DOOB a donné dans des conditions également générales, mais assez différentes [6].

On suppose encore les constantes harmoniques et comme hypothèse non locale, que les fonctions hyperharmoniques séparent Ω (ce qui a lieu dans la théorie A). On peut alors introduire comme plus haut $\underline{\mathcal{H}}_f$, $\overline{\mathcal{H}}_f$ qui seront d'ailleurs harmoniques lorsque f est borné. Si Ω'' est un ouvert relativement compact, il a une frontière et le principe du minimum est valable ; on peut introduire l'enveloppe inférieure $\overline{H}_f^{\Omega''}$ des fonctions hyperharmoniques de $\liminf \geqslant f > -\infty$ à la frontière $\partial\Omega''$. On a encore

$$\underline{H}_f^{\Omega''} = - \overline{H}_{-f}^{\Omega''} \leqslant \overline{H}_f^{\Omega''} \qquad ;$$

il y a égalité si f est finie continue. Cette enveloppe commune s'écrit alors $H_f^{\Omega''}(y)$ ou $\int f \, d\mu_y^{\Omega''}$ ($d\mu_y^{\Omega''}$ mesure harmonique, $\int d\mu_y = 1$). On montre que si v est hyperharmonique, $v(y) \geqslant \int v \, d\mu_y^{\Omega''}$, et cette intégrale décroît quand Ω'' croît (selon l'ordre d'inclusion).

5. Applications. - On considère dans l'espace Ω avec les axiomatiques (A) ou (E) , les ouverts relativement compacts $\Omega_i \ni x_0$ et la mesure harmonique $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ relative à x_0 fixé. On va interpréter pour u harmonique dans Ω la condition d'intégrabilité uniforme de la famille des traces de u sur $\partial\Omega_i$ pour les mesures $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ sur $\partial\Omega_i$ (ou de la seule fonction u pour les mesures dans Ω définies par la restriction $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ sur $\partial\Omega_i$ et la restriction zéro sur le complémentaire). Cette condition équivaut d'ailleurs à celle relative à une sous-famille de Ω_i formée d'ouverts emboités de réunion Ω (on utilise la propriété β du n° 2 et le fait que $\varphi(|u|)$ est hypoharmonique si φ est convexe croissante).

Remarque. - Avec l'axiomatique (A) la condition d'intégrabilité uniforme entraîne que u est différence de deux fonctions harmoniques $\geqslant 0$. Il suffit de voir que

$$u(y) = \int u(x| \, d\mu_y^{\Omega_i} = \int u^+ \, d\mu_y^{\Omega_i} - \int u^- \, d\mu_y^{\Omega_i} \qquad .$$

Les deux dernières intégrales sont des fonctions harmoniques croissantes selon l'ordonné filtrant des Ω_i et les limites au point x_0 sont finies.

THÉORÈME 1 (DOOB). - La condition d'intégrabilité uniforme pour u harmonique et les mesures $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ équivaut à l'existence pour tout $\varepsilon > 0$ de

u_2 hyperharmonique bornée inférieurement

u_1 hypoharmonique bornée supérieurement

satisfaisant à

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \ , \qquad u_2(x_0) - u_1(x_0) < \varepsilon \quad .$$

Supposons la condition $v_a = \sup(u\ ,\ -a)$ $(a > 0)$ est hypoharmonique et $\int v_a \, d\mu_y^{\Omega_i}$, harmonique dans Ω_i , tend en croissant (selon l'ordonné filtrant des Ω_i , a étant fixé) vers une fonction hyperharmonique V_a dans Ω , $V_a \geqslant -a$ $V_a \geqslant u$. Comme $\int v_a \, d\mu_{x_0}^{\Omega_i} - \int u \, d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ est arbitrairement petit pour a assez grand indépendamment de i , $V_a(x_0)$ est arbitrairément voisin de $u(x_0)$ pour a convenable (V_a est d'ailleurs harmonique dans l'axiomatique A). On complète en considérant $-u$.

Réciproquement partons de la propriété d'encadrement **par** u_1 , u_2 . Soit $K \geqslant 0$ majorant u_1 et $-u_2$. On a toujours $|u| \leqslant u_2 - u_1 + K$ d'où

$$\int_{|u| \geqslant a} |u| \, d\mu_{x_0}^{\Omega_i} \leqslant (u_2 - u_1)(x_0) + K \int_{|u| \geqslant a} d\mu_{x_0}^{\Omega_i} \quad .$$

On en déduit d'abord que

$$K' = \sup_i \int |u| \, d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$$

est fini. Or

$$K' \geqslant a \int_{|u| \geqslant a} d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$$

d'où

$$\int_{|u| \geqslant a} |u| \, d\mu_{x_0}^{\Omega_i} \leqslant (u_2 - u_1)(x_0) + \frac{KK'}{a} \quad .$$

On en tire l'intégrabilité uniforme.

<u>Remarque</u>. - Si dans l'axiomatique (A) , on remplace l'axiome 3 par (3') (dans tout domaine ω , toute fonction harmonique $\geqslant 0$ est partout > 0 ou partout 0 , et les fonctions > 0 égales à 1 en un point de ω y sont également continues), la condition d'intégrabilité uniforme, pour u harmonique et les

$d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$, est indépendante de x_0 .

Conséquence. - Dans Ω , avec les axiomatiques (A) ou (E) , toute fonction harmonique solution d'un problème de Dirichlet de type général considéré plus haut, satisfait à la condition d'intégrabilité uniforme pour les $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ (x_0 quelconque).

6. - On est donc amené à étudier la réciproque, c'est-à-dire à chercher sous quelles restrictions elle a lieu. Rappelons qu'un espace de Green et les fonctions harmoniques classiques satisfont à (A) .

THÉORÈME 2 (DOOB). - Dans un espace de Green Ω , pourvu de sa frontière de Martin, on considère le problème de Dirichlet correspondant, c'est-à-dire relatif aux fonctions harmoniques classiques et aux filtres $\mathfrak{F}$ (voir n° 3), traces sur Ω des voisinages des points-frontière de Martin. Alors toute fonction harmonique satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $d\rho_{x_0}^{\Omega_i}$ (mesure harmonique classique en x_0 pour Ω_i) est solution d'un problème de Dirichlet précédent.

Extension. - Si h est harmonique > 0 dans Ω , les quotients par h des fonctions harmoniques satisfont aux conditions de (A) et sont dits fonctions h-harmoniques. Il y correspond un problème de Dirichlet avec les mêmes filtres $\mathfrak{F}$ (dit problème de Dirichlet-Martin) et aussi dans chaque Ω_i un problème de Dirichlet, comme celui relatif à Ω'' (fin du n° 3). La mesure harmonique correspondante $d\nu_{x_0}^{\Omega_i}$ vaut d'ailleurs

$$\frac{h(x)}{h(x_0)} \; d\rho_{x_0}^{\Omega_i}(x) \qquad .$$

Alors toute fonction h-harmonique u satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $d\nu_{x_0}^{\Omega_i}$ est solution de ce problème de Dirichlet (relatif à h et à la frontière de Martin).

En effet cette condition d'intégrabilité uniforme entraîne que u soit différence de deux fonctions h-harmoniques ≥ 0 ; chacune, et par suite u , ont des limites fines [3] "finies à la frontière Δ " "h-presque partout" [4]. Soit f

---

[3] C'est-à-dire selon le filtre des complémentaires des ensembles effilés en un point-frontière minimal. L'existence de ces limites fines a été établie par DOOB [7] et [8].

[4] C'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle pour la mesure canonique de Martin associée à h (dans la représentation intégrale de h).

la fonction définie $\underline{h}$-presque partout sur Δ de ces limites fines. On sait (5) que l'enveloppe $\overline{\mathcal{H}}_f$ des fonctions hyper-h-harmoniques bornées inférieurement et de $\liminf \geqslant f$, h-p. p. à la frontière Δ, est aussi l'enveloppe inférieure des fonctions hyper-h-harmoniques bornées inférieurement avec lim inf fine majorant f, h-p. p. Résultat analogue avec $\underline{\mathcal{H}}_f$. Mais alors l'existence des fonctions encadrantes du théorème 1 de DOOB, arbitrairement voisines en x_0 et majorant et minorant respectivement $\overline{\mathcal{H}}_f$ et $\underline{\mathcal{H}}_f$ montrent l'égalité en x_0, donc partout, de $\overline{\mathcal{H}}_f$, $\underline{\mathcal{H}}_f$ et u.

Cas particulier. - Les fonctions harmoniques dans la boule de R^n satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour les boules concentriques et x_0 au centre sont les intégrales de Poisson-Lebesgue.

7. Applications aux fonctions harmoniques (BLD), c'est-à-dire d'intégrale de Dirichlet finie dans un espace de Green Ω (DOOB [9]).

Soit u une telle fonction. DOOB remarque que $\Delta u^2 = 2 \operatorname{grad}^2 u$ est d'intégrale de Lebesgue finie. Donc la mesure associée à u^2 sous-harmonique est de norme (totale) finie, par suite admet un potentiel de Green (non partout infini). Ainsi u^2 admet une majorante harmonique, ce qui entraîne $\int u^2 \, d\rho_{x_0}^{\Omega_i}$ borné, d'où l'intégrabilité uniforme de u (n° 2, β). Cela prouve que u est solution d'un problème de Dirichlet-Martin, donc admet à la frontière des limites fines finies 1-p. p.

Extension (6) (Mme LUMER-NAÏM). - Soit u harmonique telle que $wh \operatorname{grad}^2 \frac{u}{h}$ soit d'intégrale de Lebesgue finie sur Ω (pour h harmonique > 0, w surharmonique > 0). Un cas particulier est celui où $\int h^2 \operatorname{grad}^2 \frac{u}{h} \, dx < \infty$ (u est dite h-BLD).

Alors comme $\Delta \frac{u^2}{h} = 2h \operatorname{grad}^2 \frac{u}{h}$, on voit que la mesure de densité $\Delta \frac{u^2}{h}$ a un potentiel (non $\equiv \infty$), donc que $\frac{u^2}{h}$ sous-harmonique a une majorante harmonique, c'est-à-dire que $\frac{u^2}{h^2}$ est sous-h-harmonique et admet une majorante h-harmonique. On achève de manière analogue ; $\frac{u}{h}$ est solution d'un problème de Dirichlet-Martin, pour fonctions h-harmoniques et admet donc à la frontière des limites fines h-p. p.

---

(5) Conséquence aisée du théorème 23 (Thèse NAÏM [11]).

(6) Ajoutée dans cette rédaction d'après une communication de Mme LUMER-NAÏM et sa note [12].

8. Étude analogue avec d'autres frontières. - Le succès du théorème précédent tient au fait que la fonction harmonique admet des limites finies à la frontière de Martin. Aussi songerons-nous à adjoindre une hypothèse analogue à cette propriété pour examiner le cas d'autres frontières et d'abord celui de la frontière euclidienne.

THÉORÈME 3. - Considérons dans un espace de Green Ω un domaine ω relativement compact. Soit dans ω une fonction harmonique u satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour $d\rho_{x_0}^{\Omega_i}$ ($\overline{\Omega}_i \subset \omega$; $x_0 \in \omega$, $\cup \Omega_i = \omega$) et admettant une limite fine (c'est-à-dire dans la topologie fine classique de Ω) f , en tout point-frontière, sauf sur un ensemble de mesure harmonique - $d\rho_{x_0}^{\omega}$ nulle. Alors H_f^{ω} existe et vaut u .

Introduisons les fonctions encadrantes u_1 , u_2 de u selon le théorème 1 ; u_2 admet à la frontière une lim inf fine $\geq f$ p. p. (en mesure harmonique), donc majore $\overline{H}_f$ grâce au théorème suivant

(T) : les fonctions hyperharmoniques bornées inférieurement de lim inf $\geq \varphi$ p. p. à la frontière, et celles de lim inf fine $\geq \varphi$ p. p. ont même enveloppe inférieure (7).

En considérant aussi u_1 , et le fait que u_1 , u_2 sont arbitrairement voisins en x_0 , on conclut $\underline{H}_f^{\omega} = \overline{H}_f^{\omega} = u$.

Extension (8). - Considérons les hypothèses de l'axiomatique (A) augmentées d'une base dénombrable d'ouverts et de l'axiome (D) de domination (9). Soient ω un domaine relativement compact, u une fonction harmonique dans ω satisfaisant à la condition d'intégrabilité uniforme pour les mesures harmoniques $d\mu_{x_0}^{\Omega_i}$ (x_0 fixé dans ω , $\overline{\Omega}_i \subset \omega$; $\cup\Omega_i = \omega$) et admettant une limite fine (dans la topologie fine de Ω) f en tout point-frontière sauf sur un ensemble de mesure harmonique - $d\mu_{x_0}^{\omega}$ nulle. Alors H_f^{ω} existe et vaut u .

La démonstration est la même à condition d'étendre le théorème (T) (9) ; il dérive comme dans le cas particulier antérieur du principe de minimum suivant dans les mêmes hypothèses :

si u est hyperharmonique dans ω , borné inférieurement, de lim inf fine ≥ 0 en tout point-frontière, du moins p. p. (au sens de $d\mu_{x_0}^{\omega}$) alors $u \geq 0$.

(7) D'après les résultats de [2] donnés dans R^n pourvus d'un point à l'infini, mais valables dans un ouvert relativement compact d'un espace de Green.
(8) Introduite dans cette rédaction.
(9) Sans supposer nécessairement les constantes harmoniques (car on se ramène à ce cas).

Pour u surharmonique finie continue, la démonstration est aisée en considérant l'ouvert α où $u < 0$ et les points-frontière situés sur $\partial\omega$ (soit points d'effilement pour α, soit sur un ensemble de mesure harmonique nulle pour ω et formant par conséquent un ensemble sur $\partial\alpha$ de mesure harmonique nulle pour chacun des composants de α). On conclurait $u = 0$ dans α supposé non vide. Ce résultat nous suffirait pour le théorème T étendu si l'on savait établir que toute enveloppe finie $\overline{H}_f^{\omega}$ est aussi l'enveloppe de la sous-famille des fonctions surharmoniques finies continues.

On peut d'autre part démontrer dans le cas général notre principe de minimum. On se ramène au cas des constantes harmoniques (dans un espace $\Omega' \supset \overline{\omega}$). On introduit, s'il n'est pas vide, l'ensemble fermé E (dans ω) où $u \leq a < 0$, et le compact croissant K_n ($K_n \subset \omega$, $\bigcup K_n = \omega$). Si λ_n est la "mesure balayée" (10) de ε_x (masse 1 en $x \in E$) relative à $e_n = \complement(E \cap K_n)$ dans l'espace ω selon la définition de Mme HERVÉ ([10], n° 20 et 28) et d'ailleurs portée par ∂e_n, on va voir que $\lambda_n(\partial e_n \cap \partial K_n) \to 0$, d'où $u = a$ dans E, et par suite dans ω. On va alors considérer

1. la partie e_n' de $\partial e_n \cap \partial K_n$ située dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'ensemble de $\partial\omega$, ensemble exceptionnel (de mesure harmonique nulle) de l'énoncé. Alors $\lambda_n(e_n') \leq \hat{R}_1^{\mathcal{V}}(x_0)$ arbitrairement petite pour $\mathcal{V}$ convenable.

2. la partie e_n'' de $\partial e_n \cap \partial K_n$ située dans un voisinage $\mathcal{W}$ de l'ensemble des points de $\partial\omega$ où E est effilé. Alors

$$\lambda_n(e_n'') \leq (\hat{R}_1^{\mathcal{W}\cap E}(x_0))_{\omega} \leq [\hat{R}_1^{\mathcal{W}\cap E}]_{\Omega'}(x_0)$$

(10) Rappelons que pour v surharmonique bornée inférieurement dans ω, $v(x) \geq \int v \, d\lambda_n$ et que λ_n ne charge pas les ensembles polaires hors $\{x\}$.

arbitrairement petite pour $\mathcal{W}$ convenable [11].

On conclut en remarquant que, pour $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ fixés,

$$\partial e_n \cap \partial K_n = e'_n \cup e''_n \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \quad .$$

Dans un autre exposé nous reviendrons sur l'effilement avec d'autres applications de l'intégrabilité uniforme.

---

[11] Cela résulte de la proposition suivante analogue à un théorème de Choquet [5] qui inspire aussi la démonstration que nous allons donner :

Sous les hypothèses de (A) (mais d'ailleurs sans supposer les constantes harmoniques) soit $X \subset \Omega$ et $x_0 \notin \overline{X}$. Introduisons V_0 surharmonique finie continue > 0 dans ω. Alors l'ensemble des points d'effilement de X peut être inclus dans un ouvert ω_0 tel que $R_{V_0}^{\omega_0 \cap X}(x_0)$ soit arbitrairement petit.

On introduira V_1 surharmonique finie continue > 0 dans ω telle que, pour tout ensemble e_0, les points de ω, où e_0 est effilé, sont les points où $\hat{R}_V^{e_0} < V_1$ (existence de V_1 d'après Mme HERVÉ [10], conséquence de son théorème 9.1).

Comme $e \cap X$ est polaire, il existe ω_1 ouvert $\supset e \cap X$ tel que $R_{V_0}^{\omega_1}(x_0) < \varepsilon$; il existe aussi ω_2 ouvert tel que $R_{V_0}^{\omega_2}(x_0) < \varepsilon$ et que la restriction de $\hat{R}_{V_1}^{X}$ à $C\omega_2$ soit continue. Or dans $X_1 = X \setminus (\omega_1 \cup \omega_2)$ et par suite dans $\alpha = \overline{X}_1 \cap \omega$, $\hat{R}_{V_1}^{X}$ vaut V_1. Donc $C_\omega \alpha \supset e$; comme $C_\omega \alpha \cap X$ est contenu dans $\omega_1 \cup \omega_2$, cet ouvert $C_\omega \alpha$ est ω_0 cherché.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUER (Heinz). - Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problem für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Annalen, t. 146, 1962, p. 1-59.

[2] BRELOT (Marcel). - Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, Math. Nachr., t. 4, 1950/51, p. 298-307.

[3] BRELOT (Marcel). - Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire de théorie du potentiel [Séminaire Brelot-Choquet-Deny], t. 2, 1958, n° 1, 40 pages.

[4] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.

[5] CHOQUET (Gustave). - Sur les points d'effilement d'un ensemble, Application à l'étude de la capacité, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 91-101.

[6] DOOB (J. L.). - Probability methods applied to the first boundary value problem, Proceedings of the Third Berkeley symposium on mathematical statistics and probability [1954. 1955. Berkeley], Vol. 2 ; p. 49-80. - Berkeley, University of California Press, 1956.

[7] DOOB (J. L.). - Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, Bull. Soc. math. France, t. 85, 1957, p. 431-458.

[8] DOOB (J. L.). - A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 9, 1959, p. 293-300.

[9] DOOB (J. L.). - Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 573-621.

[10] HERVÉ (Mme R.-M.). - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-571 (Thèse Sc. math. Paris. 1961).

[11] [Mme LUMER]-NAÏM (Linda). - Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 7, 1957, p. 183-281 (Thèse Sc. math. Paris. 1957).

[12] LUMER-NAÏM (Mme Linda). - Sur une extension du principe de Dirichlet en espace de Green, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 1058-1060.