Jacques Deny

Les principes fondamentaux de la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. nº 6, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A7_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 6

LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE DU POTENTIEL

par Jacques DENY

1. Noyaux ; potentiels de fonctions et potentiels de mesures.

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact E à base dénombrable.

NOTATIONS. - On appellera :

$\mathcal{B}$ la tribu borélienne (topologique) sur E ;

B_{loc} l'ensemble des fonctions boréliennes bornées sur tout compact de E ;

B_K l'ensemble des fonctions borélienne bornées à support compact ;

C l'ensemble des fonctions numériques continues sur E ;

C_0 l'ensemble des fonctions numériques continues tendant vers 0 à l'infini ;

C_K l'ensemble des fonctions numériques continues à support compact ;

M l'ensemble des mesures de Radon sur E ;

M_K l'ensemble des mesures de Radon à support compact.

On désignera par B^+_{loc} , ... les sous-ensembles des ensembles précédents constitués par des fonctions ou des mesures $\geqslant 0$.

DÉFINITIONS. - On appelle noyau sur E toute application V de $E \times \mathcal{B}$ dans $\underset{\sim}{R}^+$ telle que :

$\forall$ $x \in E$, la fonction d'ensemble $e \to V(x , e)$ est une mesure de Radon $\geqslant 0$, notée V_x .

$\forall$ $e \in \mathcal{B}$, relativement compact, la fonction, $x \to V(x , e)$ est dans B^+_{loc} .

On appelle potentiel de la fonction borélienne f la fonction Vf définie par

$$Vf(x) = \int f(y)\ V(x , dy) = \int f(y)\ dV_x(y)$$

pourvu que cette intégrale ait un sens pour tout x ; il en est ainsi dans deux cas importants :

1° $f \in B_K$, et alors $Vf \in B_{loc}$;

2° $f \geq 0$; alors $Vf(x)$ peut être égal à $+\infty$ pour certains points x .

Soit μ une mesure de Radon telle que l'intégrale

$$\mu V(e) = \int V(x , e)\, d\mu(x)$$

soit absolument convergente pour tout $e \in \mathcal{B}$ relativement compact (il en est ainsi pour toute $\mu \in M_K$) ; la fonction d'ensemble $e \to \mu V(e)$ définit une mesure de Radon μV , qu'on appelle potentiel de la mesure μ .

Quelle que soit $f \in B_K$ et $\mu \in M_K$, on a la relation

$$(1) \qquad \langle \mu V , f \rangle = \langle \mu , Vf \rangle$$

où $\langle \nu , g \rangle$ désigne l'intégrale $\int g(x)\, d\nu(x)$; cette relation montre que l'application linéaire $f \to Vf$ est continue de B_K mis en dualité avec M , dans B_{loc} mis en dualité avec M_K ; les applications $f \to Vf$ et $\mu \to \mu V$ sont transposées l'une de l'autre. Noter que (1) s'étend au cas où μ est une mesure de Radon ≥ 0 telle que μV soit défini, et f une fonction borélienne ≥ 0 quelconque ; les deux membres peuvent alors être tous deux égaux à $+\infty$.

On dira que le noyau V est strictement positif si toutes les mesures V_x sont différentes de 0 .

On dira que le noyau V est continu s'il applique C_K dans C . Inversement soit T une application linéaire positive de C_K dans C (observer qu'une telle application est nécessairement continue pour les topologies faibles définies par les dualités entre C_K et M d'une part, C et M_K d'autre part) ; on peut lui associer le noyau V défini par $V(x , e) = T_x(e)$, où T_x est la mesure de Radon $f \to Tf(x)$.

On dira que le noyau continu V tend vers 0 à l'infini s'il applique C_K dans C_0 .

On dira que le noyau V est uniforme si la fonction $V1$ est bornée ou, ce qui revient au même, si les mesures V_x sont de masse totale uniformément bornées.

On dira que le noyau V est sous-markovien (resp. markovien) si $V1(x) \leq 1$ quel que soit x (resp. $V1(x) = 1$ quel que soit x), où si les V_x sont de masse totale ≤ 1 (resp. $= 1$).

EXEMPLES.

1° Soit G la fonction de Green d'un ouvert connexe D de R^3 ; on pose

$$V(x , e) = \int_e G(x , y)\, d\xi(y)$$

où ξ est la mesure de Lebesgue sur D ; alors si $f \in B_K$,

$$Vf(x) = \int G(x , y)\, f(y)\, d\xi(y) \quad ,$$

valeur en x du potentiel de Green (au sens usuel) engendré par f ; si $\mu \in M_K$, μV est la mesure dont la densité en y (définie presque partout et même quasi partout) est $\int G(x , y)\, d\mu(x)$, valeur en y du potentiel de Green engendré par μ. Ce noyau V est continu ; il tend vers 0 à l'infini si et seulement si D n'a pas de point-frontière irrégulier.

2° Soit N une mesure de Radon ≥ 0 sur un groupe abélien localement compact ; on pose $V(x , e) = \tau_x N(e)$ (τ_x = translation par x) ; alors si $f \in B_K$, $Vf(x) = \int f(t - x)\, dN(t)$; si $\mu \in M_K$, $\mu V = \mu * N$. On dit que N est un noyau de convolution ; un tel noyau est toujours continu ; il est uniforme si et seulement si N est de masse totale finie.

2. Principe de domination.

DÉFINITION. - On dit que le noyau V satisfait au principe de domination si, pour tout couple de fonctions f et g de C_K^+ la relation $Vf(x) \leq Vg(x)$ pour tout x tel que $f(x) \neq 0$ entraîne $Vf(x) \leq Vg(x)$ pour tout $x \in E$.

On peut montrer que si V satisfait au principe de domination, il en est de même de $V + I$ (I = noyau identique), et $V + I$ applique biunivoquement C_K dans B_{loc}. On aura besoin d'un résultat plus élaboré, mais concernant des noyaux plus particuliers :

LEMME. - Soit V un noyau continu strictement positif, satisfaisant au principe de domination ; soient f et g deux fonctions de C^+ telles que

$$Vf(x) + f(x) = Vg(x) + g(x) \ , \quad \forall \quad x \in E \quad ;$$

on a $f(x) = g(x)$ en tout point x tel que $Vf(x)$ et $Vg(x) \neq +\infty$.

DÉMONSTRATION. - On peut évidemment supposer $\inf(f(x) , g(x)) = 0$ pour tout $x \in E$. L'hypothèse entraîne alors $Vf(x) \leq Vg(x)$ pour tout x tel que $f(x) > 0$.

Tout revient à montrer que cette relation a lieu pour tout $x \in E$ (car on aura, par raison de symétrie, $Vf(x) = Vg(x)$ pour tout x, d'où le résultat).

Si f et $g \in C_K^+$, il s'agit de l'énoncé du principe de domination.

Supposons $f \in C_K^+$, $g \in C^+$; soit g_n une suite croissante de fonctions de C_K^+ convergeant partout vers g (il en existe, grâce à l'hypothèse de dénombrabilité à l'infini) ; la suite Vg_n converge partout vers la fonction semi-continue inférieurement Vg. Soit $h \in C_K^+$ telle que $Vh(x) \geq 1$ en tout point du support compact de f (une telle h existe, d'après l'hypothèse que V est strictement positif, qui entraîne que, pour tout $x \in E$, il existe $\varphi_x \in C_K^+$ avec $V\varphi_x(x) \neq 0$). Soit enfin $\varepsilon > 0$. D'après le lemme de Dini il existe n tel que $Vf(x) \leq \varepsilon Vh(x) + Vg_n(x)$ sur le support de f, donc partout (principe de domination), d'où le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$, puis ε vers 0.

Si enfin f n'est pas à support compact, il suffit de considérer une suite croissante de fonctions de C_K^+ convergeant partout vers f.

3. Principe du balayage.

DÉFINITION. - On dit qu'un noyau V satisfait au principe du balayage si, quel que soit l'ouvert relativement compact ω et quelle que soit la mesure $\mu \in M_K^+$, il existe une mesure $\mu' \geq 0$ portée par l'adhérence de ω, telle que $\mu' V \leq \mu V$ et que les restrictions à ω de μV et $\mu' V$ soient identiques.

Une telle mesure μ' sera dite balayée de μ sur V.

On notera U l'ensemble des potentiels de mesures positives à support compact, i. e. l'image de M_K^+ par V ; $M^+(F)$ l'ensemble des mesures positives portées par l'ensemble fermé $F \subset E$; enfin $U(A)$ l'ensemble des potentiels des mesures de $M^+(A)$, où A est un compact de E. Avec ces notations, le principe du balayage peut s'écrire sous une forme très simple :

(2) $U \subset U(\overline{\omega}) + M^+(C\omega)$ quel que soit l'ouvert relativement compact ω.

THÉORÈME. - Soit V un noyau continu strictement positif ; pour que V satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe de domination [1].

---

[1] Voir [2], où l'hypothèse " V est strictement positif" a été omise.

DÉMONSTRATION. – Supposons d'abord que V satisfasse au principe du balayage ; soient f et $g \in C_K^+$ telles que $Vf(x) \leqslant Vg(x)$ pour tout x du support de f ; soit $x \in E$ quelconque, soit ε'_x une mesure "balayée" de ε_x sur l'ouvert relativement compact $\{f > 0\}$; d'après (1) on a :

$$Vf(x) = \langle \varepsilon_x , Vf \rangle = \langle \varepsilon_x V , f \rangle = \langle \varepsilon'_x , V, f \rangle = \langle \varepsilon'_x , Vf \rangle \leqslant \langle \varepsilon'_x , Vg \rangle = \langle \varepsilon'_x V , g \rangle$$

$$\leqslant \langle \varepsilon_x V , g \rangle = Vg(x)$$

donc V satisfait au principe de domination.

Supposons inversement que V satisfasse au principe de domination. Observons d'abord que l'hypothèse " V continu strictement positif" entraîne que le cône $U(\overline{\omega})$ est fermé dans l'espace M muni de la topologie vague (définie par la dualité avec C_K), car il est engendré par l'image par V de l'ensemble des mesures $\geqslant 0$ de masse totale 1 portée par $\overline{\omega}$: cette image est un <u>compact convexe</u> de M <u>ne contenant pas l'origine</u>, donc le cône $U(\overline{\omega})$ est à base compacte, et est formé. Observons que, dans l'espace vectoriel topologique M , l'ensemble <u>somme</u> de deux ensembles fermés d'éléments <u>positifs</u> est fermé.

Il résulte du principe de domination que les relations $h \in C_K$, $h(x) \geqslant 0$ hors de ω , $Vh(x) \geqslant 0$ sur ω , entraînent $Vh(x) \geqslant 0$ partout. Donc, d'après (1), les relations

$$\langle \mu , h \rangle \geqslant 0 , \quad \forall \ \mu \in M^+(C\omega) \qquad \text{et} \qquad \langle \nu , h \rangle \geqslant 0 , \quad \forall \ \nu \in U(\overline{\omega})$$

entraînent $\langle \lambda , h \rangle \geqslant 0$, $\forall \ \lambda \in U$. Autrement dit, tout demi-espace fermé de M contenant $U(\overline{\omega})$ et $M^+(C\omega)$ contient U . Comme l'ensemble convexe fermé $U(\overline{\omega}) + M^+(C\omega)$ est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent, on a bien prouvé l'inclusion (2), qui exprime que V satisfait au principe du balayage.

REMARQUES. – L'hypothèse " V est strictement positif" n'intervient pas dans la première partie de la démonstration (balayage $\Longrightarrow$ domination) ; par contre elle est indispensable pour la seconde partie (contre-exemples faciles à construire).

Cette hypothèse est évidemment vérifiée par tout noyau de convolution $\neq 0$.

DÉFINITION. - On dit que le noyau V satisfait au principe complet du maximum si, pour tout couple de fonctions f et $g \in C_K^+$ et tout nombre réel $a \geq 0$, la relation $Vf(x) \leq Vg(x) + a$ pour tout x tel que $f(x) \neq 0$ entraîne $Vf(x) \leq Vg(x) + a$ pour tout $x \in E$ ([2]).

Pour $a = 0$, cet énoncé se réduit à celui du principe de domination ; pour $g = 0$, on obtient le principe du maximum classique.

DÉFINITION (HUNT). - On dit que le noyau V satisfait au principe du maximum positif si, pour toute $f \in C_K$, on a $f(x) \geq 0$ en tout point x en lequel Vf atteint un maximum ≥ 0.

Le résultat suivant joue un rôle important dans la théorie de HUNT :

LEMME (HUNT - HERZ). - Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini ; si l'image $V(C_K)$ est partout dense dans C_0 et si V satisfait au principe complet du maximum, il satisfait au principe du maximum positif.

DÉMONSTRATION. - Soit f une fonction de C_K, telle que Vf atteigne son maximum.

1° $f(x) \geq 0$ en au moins un point x où le maximum de Vf est atteint, pourvu que ce maximum soit strictement > 0.

Soit en effet a le maximum de Vf sur le compact $S(f^+)$ (support de la partie positive f^+ de f). Par hypothèse $Vf^+(x) \leq a^+ + Vf^-(x)$ en tout x de $S(f^+)$, donc partout (principe complet du maximum) ; on a donc $Vf(x) \leq a^+$ partout, ce qui entraîne $a > 0$, d'où le résultat, qui est indépendant de l'hypothèse concernant l'image $V(C_K)$.

2° $f(x) \geq 0$ en tout point x où le maximum de Vf est atteint.

Soit en effet x un tel point ; nécessairement $Vf(x) \geq 0$, car V tend vers 0 à l'infini. Soit e un voisinage compact de x. Soit $g \in C_K$, telle que $Vg(x) > \sup_{y \notin e} Vg(y)$ (l'existence d'une telle g résulte de l'hypothèse concernant l'image $V(C_K)$).

Soit enfin $\varepsilon > 0$. Par hypothèse le maximum de $V(f + \varepsilon g)$ est strictement > 0 ; il est atteint sur e et non atteint sur $\complement e$. Donc (première partie de la démonstration) $f(y) + \varepsilon g(y) \geq 0$ en au moins un point y de e, d'où le résultat

---

([2]) Énoncé, dans [1], dans le cas d'un noyau de composition symétrique sur $\mathbb{R}^n$.

en faisant tendre ε vers 0, puis e vers x.

COROLLAIRE. - Si le noyau V satisfait aux hypothèses du lemme précédent, il définit une application injective de C_K dans C_0.

En effet, si $f \in C_K$, et si $Vf = 0$, on a $f = 0$, d'après le lemme.

REMARQUE. - Si le noyau V satisfaisant aux hypothèses précédentes est uniforme (voir n° 1) il définit une application injective de C_0 dans C_0 dans l'énoncé du principe complet du maximum (resp. du maximum positif) on peut remplacer C_K^+ par C_0^+ (resp. C_K par C_0).

Il suffit de prouver que le principe complet du maximum est encore valable si les fonctions f et g de l'énoncé sont dans C_0^+, ce qui est facile par passage à la limite croissante (voir démonstration du lemme du n° 2).

5. Énoncé du théorème de Hunt. Unicité de la représentation.

Le théorème suivant, dû à G. HUNT [3], est l'un des plus importants de toute la théorie du potentiel :

Soit V un noyau continu tendant vers 0 à l'infini. Pour que l'image $V(C_K)$ soit partout dense dans C_0, et que V satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sous-markoviens P_t sur C_0, tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt , \quad \forall\ f \in C_K , \quad \forall\ x \in E \quad ;$$

le semi-groupe P_t associé à V est unique.

La démonstration de ce théorème fera l'objet des prochains exposés ; on va se borner ici à établir l'unicité du semi-groupe associé, ce qu'on va faire dans un cadre un peu plus général.

DÉFINITIONS. - On dit que le produit des deux noyaux P et Q a un sens si l'application $(x, e) \to \int P(x, dy)\, Q(y, e)$ est un noyau. Lorsqu'il en est ainsi, on a

$$(PQ)\, f(x) = P(Qf)(x) , \quad \forall\ x \in E$$

au moins dans les deux cas suivants : 1° $f \in B_K$; 2° f est borélienne ≥ 0.

Un semi-groupe de noyaux est une famille $\{P_t\}_{t\geq 0}$ de noyaux tels que

$$P_{s+t} = P_s \, P_t \quad \text{quels que soient } s \text{ et } t \geq 0 \quad .$$

On dit que le semi-groupe de noyaux continus est continu si la fonction $(t , x) \to P_t(x)$ est continue sur $\underset{\sim}{R}^+ \times E$ quel que soit $f \in C_K$.

THÉORÈME. - Soit V un noyau continu strictement positif, satisfaisant au principe de domination. Il existe au plus un semi-groupe continu de noyaux continus P_t tel que

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t \, f(x) \, dt \ , \quad \forall \ f \in C_K \ , \quad \forall \ x \in E \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Soit $\lambda \in \underset{\sim}{R}^+$, et soit V^λ le noyau défini par

$$V^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, P_t \, f(x) \, dt$$

pour f borélienne ≥ 0 . On va voir que V^λ est continu pour tout $\lambda > 0$ (pour $\lambda = 0$, c'est l'hypothèse) mais, a priori, si $f \in C_K^+$, on peut seulement affirmer que $V^\lambda f$ est semi-continue inférieurement, et on a d'ailleurs $0 \leq V^\lambda f(x) \leq Vf(x) < +\infty$, $\forall \ x \in E$.

En appliquant plusieurs fois Fubini, il vient facilement

(3) $$\lambda V^\lambda(Vf) = \lambda V(V^\lambda f) = Vf - V^\lambda f$$

(relation entre fonctions boréliennes partout finies). Il en résulte que la fonction continue Vf étant somme des deux fonctions semi-continues inférieurement $V^\lambda f$ et $\lambda V^\lambda(Vf)$, chacune d'elles est continue, et le noyau V^λ est bien continu.

Supposons maintenant qu'il existe un second semi-groupe continu de noyaux continus Q_t tel que $Vf(x) = \int_0^\infty Q_t \, f(x) \, dt$, $\forall \ f \in C_K$, $\forall \ x \in E$. Posant

$$W^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \, Q_t \, f(x) \, dt$$

il vient, d'après (3) :

$$Vf = (\lambda V + I)(V^\lambda f) = (\lambda V + I)(W^\lambda f) \ , \quad \forall \ f \in C_K^+ \quad .$$

Comme les fonctions $V^{\lambda} f$ et $W^{\lambda} f$ sont continues ≥ 0 et ont un V-potentiel partout fini, comme d'autre part V est strictement positif, il résulte du lemme du n° 2 qu'on a $V^{\lambda} f = W^{\lambda} f$. L'unicité de la transformation de Laplace prouve alors que les fonctions continues $t \to P_t f(x)$ et $t \to Q_t f(x)$ ($x \in E$, $f \in C_K^+$) sont égales, autrement dit les opérateurs P_t et Q_t sont identiques quel que soit t.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) et DENY (J.). - Le principe du maximum en théorie du potentiel et la notion de fonction surharmonique, Acta scient. Math., Szeged, t. 12, 1950, p. 81-100.

[2] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Aspects linéaires de la théorie du potentiel, théorème de dualité et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 764-767.

[3] HUNT (G. A.). - Markov processes and potentials, I., II., III., Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93, p. 316-369 et t. 2, 1958, p. 151-213.