Paul-André Meyer

Semi-groupes en dualité

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 5 (1960-1961), exp. n° 10, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1960-1961__5__A11_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
5e année, 1960/61, n° 10

SEMI-GROUPES EN DUALITÉ

par Paul-André MEYER

L'objet de cet exposé est la démonstration d'une relation fondamentale due à HUNT (théorème 2.2), qui permet de généraliser de nombreux résultats de la théorie classique du potentiel à des "noyaux fonctions" $U(x , y)$ dont certains ne sont ni symétriques, ni réguliers (au sens de CHOQUET). Le noyau de la chaleur, par exemple, entre dans la théorie de Hunt, ainsi que les noyaux de Green et de Marcel Riesz, qui, eux, sont symétriques et réguliers. La démonstration que nous donnons ici est tout à fait différente de celle de Hunt ; elle fait intervenir quelques résultats intermédiaires qui peuvent être utiles. Les hypothèses sur le semi-groupe $\{P_t\}$ sont toujours celles de l'exposé n° 5. Les potentiels de $\{P_t\}$ sont notés U^λ. Enfin, G et G' désignent respectivement les espaces de Banach (pour la norme de la convergence uniforme) des fonctions boréliennes, resp. universellement mesurables, et bornées sur X.

I. Résolvantes et semi-groupes subordonnés

A. Résolvantes subordonnées.

DÉFINITION 1.1. - On appelle résolvante subordonnée à la résolvante $\{U^\lambda\}$ une famille $\{V^\lambda\}_{\lambda>0}$ d'opérateurs sur G', qui satisfait aux propriétés suivantes :

1° $\forall \lambda$, $\forall \mu$, on a $V^\lambda - V^\mu = -(\lambda - \mu) V^\lambda V^\mu$ ("équation résolvante")

2° $\forall f \in G'_+$, $\forall \lambda$, on a $0 \leq V^\lambda f \leq U^\lambda f$.

Propriétés élémentaires des résolvantes subordonnées.

a. La relation 2° entraîne les propriétés suivantes : chaque V^λ est un opérateur positif borné, de norme au plus égale à $1/\lambda$. La valeur en x de la fonction $V^\lambda f$ est une forme linéaire sur G', majorée par une mesure de Radon : c'est donc une mesure de Radon, que nous noterons $V^\lambda(x , dy)$.

b. Si f est une fonction de G', on a la relation : $\lim_{\mu\to\infty} \mu V^\mu V^\lambda f = V^\lambda f$. (Conséquence immédiate du 1° et du fait que $\|\lambda V^\lambda\| \leq 1/\lambda$).

c. Nous dirons qu'une fonction $f \in G'$ est V-<u>surmédiane</u> si elle est positive, et si l'on a pour tout μ l'inégalité $\mu V^{\mu} f \leq f$. Il est très facile de déduire de l'équation résolvante que le premier membre croît alors avec μ, et admet une limite $\underline{f} \leq f$ lorsque $\mu \to \infty$. Si $\underline{f} = f$, on dit que f est V-excessive. Si f est une fonction V-surmédiane quelconque, la fonction $\underline{f}$ est V-excessive : on l'appelle la régularisée V-excessive de f, et l'on a pour tout μ la relation $V^{\mu} \underline{f} = V^{\mu} f$. Toute fonction U-surmédiane (et en particulier la fonction 1) est V-surmédiane [La notion de fonction U-surmédiane est moins fine que la notion de fonction surmédiane par rapport au semi-groupe $\{P_t\}$, mais les fonctions U-excessives sont identiques aux fonctions excessives habituelles]. On définit de même les fonctions λ-surmédianes par rapport à V, par les conditions $f \geq 0$, $\mu V^{\lambda+\mu} f \leq f$, $\forall\ \mu$.

d. Soit f une fonction de G'_+ ; la fonction $U^{\lambda} f - V^{\lambda} f$ est λ-surmédiane par rapport à U.

En effet, on a :

$$(U^{\lambda} - V^{\lambda})\ f - \mu U^{\lambda+\mu}\ (U^{\lambda} - V^{\lambda})\ f \geq (U^{\lambda} - V^{\lambda})\ f - \mu U^{\lambda+\mu}\ U^{\lambda} f + \mu V^{\lambda+\mu}\ V^{\lambda} f$$
$$= (U^{\lambda+\mu} - V^{\lambda+\mu})\ f \geq 0 \quad .$$

Nous poserons la définition suivante : une résolvante $\{V^{\lambda}\}$ subordonnée à $\{U^{\lambda}\}$ sera dite <u>exacte</u> si les fonctions $U^{\lambda} f - V^{\lambda} f$ **ci-dessus** sont, non seulement λ-surmédianes, mais λ-excessives. Qu'il y ait beaucoup de résolvantes exactes résulte des remarques suivantes :

e. Soit $\{V^{\lambda}\}$ une résolvante subordonnée quelconque. La limite $W^{\lambda} f = \lim_{\mu\to\infty} \mu U^{\mu}\ V^{\lambda} f$ existe pour toute fonction f de G' ; les opérateurs W^{λ} constituent une résolvante subordonnée exacte. On a la relation $V^{\lambda}(x\ ,\ dy) \leq W^{\lambda}(x\ ,\ dy)$, avec égalité en tout point x tel que $\lim_{\mu\to\infty} \mu V^{\mu}\ (x\ ,\ 1) = 1$.

Il suffit de remarquer, en effet, que $(U^{\lambda} - W^{\lambda})\ f$ n'est autre, si $f \in G'_+$, que la régularisée λ-excessive de $(U^{\lambda} - V^{\lambda})\ f$. Les conditions 1° et 2° sont très faciles à vérifier. Enfin, si la limite ci-dessus est égale à 1 au point x, on a $\lim_{\mu\to\infty} \mu(U^{\mu} - V^{\mu})\ 1 = 0$ en x, donc aussi $\lim \mu(U^{\mu} - V^{\mu})\ V^{\lambda}(1) = 0$ en x (car $\lambda V^{\lambda}\ 1 \leq 1$), et ceci exprime que $W^{\lambda}(x\ ,\ 1) = V^{\lambda}(x\ ,\ 1)$.

B. Semi-groupes subordonnés.

DÉFINITION 1.2. - On appelle semi-groupe subordonné au semi-groupe $\{P_t\}$ une famille $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs sur G', qui satisfait aux conditions suivantes :

1° $\forall$ $s \geq 0$, $\forall$ $t \geq 0$, on a $Q_{s+t} = Q_s\, Q_t$ (On n'exige pas que $Q_0 = I$).

2° $\forall$ $f \in G'_+$, $\forall$ $t \geq 0$, on a $0 \leq Q_t\, f \leq P_t\, f$.

3° $\lim\limits_{t\to 0} Q_t\, 1 = Q_0\, 1$.

Propriétés élémentaires des semi-groupes subordonnés.

a. Les Q_t sont des opérateurs positifs, de norme au plus égale à 1. La valeur en x de $Q_t\, f$ est une forme linéaire continue sur G', qui est une mesure de Radon $Q_t(x\,,\,dy)$.

b. La mesure $Q_0(x\,,\,dy)$ est majorée par $P_0(x\,,\,dy) = \varepsilon_x$. D'après la relation $Q_0\, Q_0 = Q_0$, cette mesure ne peut être que ε_x ou 0. Dans le premier cas (resp. le second), nous dirons que x est un point permanent (resp. non permanent) pour le semi-groupe. La relation $Q_t = Q_0\, Q_t$ entraîne que toutes les mesures $Q_t(x\,,\,dy)$ sont nulles si x est non-permanent, la relation $Q_t = Q_t\, Q_0$, que toutes les mesures $Q_t(x\,,\,dy)$ sont portées par l'ensemble des points permanents.

c. Soit f une fonction continue, comprise entre 0 et 1. D'après la relation : $(P_t - Q_t)\, f \leq (P_t - Q_t)\, 1$, la condition 3, le fait que $Q_0\, 1 = 1$ ou 0 suivant que x est permanent ou non, on voit que $\lim\limits_{t\to 0} Q_t\, f(x) = f(x)\; p(x) = Q_0\, f(x)$ (où $p(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble des points permanents). On en déduira aisément que, si f est continue, l'application $t \to Q_t(x\,,\,f)$ est continue à droite.

d. Il en résulte que l'on peut définir, si f est continue et bornée, l'intégrale $V^\lambda(x\,,\,f) = \int_0^\infty Q_t(x\,,\,f).e^{-\lambda t}\, dt$. L'application $f \to V^\lambda(x\,,\,f)$ est une mesure de Radon, ce qui permet de la prolonger à tout G', la relation ci-dessus restant vérifiée. Les V^λ constituent une résolvante subordonnée à $\{U^\lambda\}$, qui sera dite associée au semi-groupe. Le semi-groupe sera dit exact si sa résolvante est exacte.

e. Si x est un point permanent pour le semi-groupe, $\mu V^\mu\, 1 \xrightarrow[\mu\to\infty]{} 1$ au point x.

THÉORÈME 1.1. (1). - Soit $\{V^\lambda\}$ une résolvante <u>exacte</u> subordonnée à $\{U^\lambda\}$. Il existe un semi-groupe $\{Q_t\}$ subordonné à $\{P_t\}$ dont la résolvante est $\{V^\lambda\}$. Ce semi-groupe est unique.

DÉMONSTRATION. - L'unicité est évidente : elle résulte de l'unicité de la transformée de Laplace, et du fait que la fonction $t \to Q_t(x, f)$ est continue à droite si f est continue bornée.

Posons les définitions suivantes :

H sera l'espace image de G' par les V^λ (qui ont tous la même image, d'après l'équation résolvante) ; H_+, le cône des fonctions positives de H ; $\overline{H}$, l'adhérence en norme de H dans G'.

E_{++} sera l'ensemble des fonctions de G', presque boréliennes, finement continues et V-surmédianes ; si f et g appartiennent à E_{++}, $\inf(f, g)$ lui appartient. Nous désignerons par E l'espace vectoriel réticulé $E_{++} - E_{++}$, par E_+ l'ensemble des fonctions positives de E.

Si nous le désirons, nous pouvons nous ramener au cas d'une résolvante V^λ, pour laquelle l'opérateur V^0 est défini et borné. Il suffit pour cela de remarquer que la résolvante du semi-groupe $\{e^{-\mu t} P_t\}$ est la famille $\{U^{\lambda+\mu}\}_{\lambda>0}$ qui peut évidemment se prolonger, pour $\lambda = 0$, par un opérateur borné (égal à U^μ). La famille $\{V^{\lambda+\mu}\}_{\lambda\geq 0}$ est, elle aussi, une résolvante ainsi prolongée, subordonnée à la précédente : si le théorème a été établi dans le cas particulier ci-dessus c'est donc la résolvante d'un semi-groupe $\{K_t\}$ subordonné à $\{e^{-\mu t} P_t\}$, et il nous suffit de poser $Q_t = e^{\mu t} K_t$ pour obtenir un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$ dont la résolvante est $\{V^\lambda\}$. Nous poserons $U^0 = U$, $V^0 = V$. L'image de G' par V est H.

D'après le théorème de Hille-Yosida, il existe un semi-groupe fortement continu $\{Q_t\}$, défini sur l'espace $\overline{H}$, dont la résolvante coïncide avec $\{V^\lambda\}$ sur $\overline{H}$. Si $h \in \overline{H}$, nous désignerons par $Q_t(x, h)$ la valeur de $Q_t h$ en x. Montrons que si h est positive, on a $0 \leq Q_t(x, h) \leq P_t(x, h)$.

Le lecteur vérifiera la formule

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}[V^\lambda(x, h)] = n!(-1)^{n+1}[V^\lambda]^{n+1}(x, h) ,$$

---

(1) Ce théorème est publié ici pour la première fois.

qui montre que les fonctions $V^\lambda(x , h)$ et $U^\lambda(x , h) - V^\lambda(x , h)$ sont toutes deux complètement monotones : il en résulte que les mesures sur R_+ dont les densités sont $Q_t(x , h)$ et $P_t(x , h) - Q_t(x , h)$ sont positives. Comme le semi-groupe est fortement continu, la première fonction est continue en t ; étant presque partout positive sur R_+ , elle est positive. Il en va de même pour la seconde fonction, parce que la résolvante est exacte, ce qui entraîne que la fonction $t \to P_t(x , h)$ est bien continue à droite.

Soit maintenant a une fonction de E_{++} : lorsque $\lambda \to \infty$, les fonctions $\lambda V^\lambda a$ croissent ; comme elles appartiennent à H , nous pouvons poser :

$$Q_t(x , a) = \sup_\lambda Q_t(x , \lambda V^\lambda a)$$

les fonctions du second membre sont continues et décroissantes en t , pour chaque λ [car, si a est une fonction V-surmédiane, $\lambda V^\lambda a$ est elle aussi V-surmédiane]. Leur sup est donc une fonction décroissante et semi-continue inférieurement, donc continue à droite. D'autre part, sa transformée de Laplace est évidemment $V^\lambda(x , a)$. Nous pouvons prolonger les Q_t ainsi définis à E par linéarité. L'unicité de la transformée de Laplace entraîne que leur définition est compatible avec la précédente si $a \in H \subset E$, et le même raisonnement que ci-dessus montre que, si $a \in E_+$, on a les inégalités $0 \leqslant Q_t(x , a) \leqslant P_t(x , a)$. Il en résulte que les applications $a \to Q_t(x , a)$ sont des mesures de Daniell (Voir [3] sur l'espace vectoriel réticulé E ; comme E contient l'image de U , le prolongement des Q_t , par le procédé de Daniell, conduit à un espace qui contient les fonctions continues, donc toutes les fonctions boréliennes, et enfin tout G' . La relation $0 \leqslant Q_t(x , a) \leqslant P_t(x , a)$ continue d'être vérifiée, à chaque étape du prolongement, si a est positive : il en résulte que si $a \in G'$, la fonction $Q_t(x , a)$ appartient à G' . Dans tout cela, la relation $V^\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t \, dt$ a évidemment été préservée.

Comme la fonction 1 appartient à E_{++} , ce qui entraîne la condition 3°, la seule propriété qui demande à être vérifiée, parmi celles qui définissent les semi-groupes subordonnés, est la relation $Q_{s+t}(x , a) = Q_s(x , Q_t a)$. Les deux membres de cette relation sont des mesures, il suffit donc de la vérifier lorsque $a \in E_{++}$: c'est alors immédiat, d'après le fait que les Q_t constituent un semi-groupe sur H , et la définition des Q_t sur E_{++} .

COROLLAIRE. - Soit $\{Q_t\}$ un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$; il existe un semi-groupe exact $\{Q_t^!\}$, subordonné à $\{P_t\}$, tel que l'on ait partout :

$$Q_t(x , dy) \leq Q_t^!(x , dy)$$

l'égalité ayant lieu en tout point x permanent pour $\{Q_t\}$.

DÉMONSTRATION. - Soit $\{V^\lambda\}$ la résolvante de $\{Q_t\}$, $\{W^\lambda\}$ la résolvante exacte construite plus haut (propriété (e) des résolvantes subordonnées), $\{Q_t^!\}$ le semi-groupe associé à $\{W^\lambda\}$ par le théorème 1.1 : en un point permanent pour le semi-groupe, $\lambda V^\lambda 1 \underset{\lambda\to\infty}{\to} 1$. L'inégalité $Q_t(x , dy) \leq Q_t^!(x , dy)$ résulte alors immédiatement du fait que, si f est une fonction continue positive bornée, les fonctions $t \to Q_t(x , f)$, $t \to Q_t^!(x , f)$ sont continues à droite, et du théorème de Bernstein tel qu'il a été appliqué plus haut ; l'égalité, si x est permanent, résulte de la propriété (e) et de l'unicité de la transformation de Laplace.

[Ce corollaire est très précieux dans certaines questions qui concernent les semi-groupes subordonnés. Il est démontré dans [2] par une méthode trop compliquée, de même que le théorème 1.1 ci-dessus, donné sous une forme moins générale].

C. Fonctionnelles multiplicatives de Markov.

Les notations Ω , X_t , etc. ont les mêmes significations que dans l'exposé n° 5.

DÉFINITION 1.3. - On appelle fonctionnelle multiplicative de Markov une famille $\{M_t\}_{t\geq 0}$ de variables aléatoires sur l'espace Ω , qui possède les propriétés suivantes :

1° L'ensemble des trajectoires ω , telles que l'application $t \to M_t(\omega)$ ne soit pas comprise entre 0 et 1 , décroissante (au sens large), continue à droite, est négligeable pour toute mesure P^ν .

2° La variable aléatoire M_t est F_t-mesurable.

3° Soient s et t deux nombres positifs. L'ensemble $H_{s,t}$ des trajectoires ω telles que la relation

$$M_{s+t}(\omega) = M_s(\omega) . M_t(\theta_s \omega)$$

n'ait pas lieu, est négligeable pour toute mesure P^ν .

Exemples de fonctionnelles multiplicatives.

1° $M_t(\omega) = \exp(-\lambda t)$

2° a est une fonction borélienne positive, on pose :

$$M_t(\omega) = \exp(-\int_0^t a \circ X_s(\omega)\, ds)$$

3° T est un temps d'arrêt sur Ω, possédant la propriété suivante : $\forall\ t \geqslant 0$, l'ensemble des trajectoires ω pour lesquelles on a $T(\omega) > t$, et qui ne vérifient pas la relation $T(\theta_t\, \omega) = T(\omega) - t$, est négligeable pour toute mesure P^ν.

On pose alors : $M_t(\omega) = 1$ ou 0, suivant que $t < T(\omega)$, ou $t \geqslant T(\omega)$.

Exemple d'un tel temps d'arrêt : le temps d'entrée dans un ensemble.

THÉORÈME 1.2 (DYNKIN). - Soit $\{M_t\}$ une fonctionnelle multiplicative de Markov. Posons, si $f \in G'$, $Q_t(x, f) = E^x[f \circ X_t . M_t]$. Les opérateurs Q_t constituent un semi-groupe subordonné à $\{P_t\}$.

(On peut d'ailleurs montrer (Voir [2]) que tout semi-groupe subordonné est ainsi associé à une fonctionnelle multiplicative ; nous n'en aurons pas besoin ici).

DÉMONSTRATION. - Nous avons :

$$\begin{aligned}
Q_{s+t}(x, a) &= E^x[a \circ X_{s+t} . M_{s+t}] \\
&= E^x[a \circ X_t(\theta_s) . M_s . M_t(\theta_s)] \quad \text{(propriété 3 de la définition 3)} \\
&= E^x[E[M_s . a \circ X_t(\theta_s) . M_t(\theta_s) | F_s]] \quad \text{(cf. exposé n° 2, p. 2, 4°)} \\
&= E^x[M_s . E[a \circ X_t(\theta_s) . M_t(\theta_s) | F_s]] \quad \text{(définition 3, 2°, et exposé n° 2, page 2, 5°)} \\
&= E^x[M_s . Q_t(X_s, a)] \quad \text{(exposé n° 3, théorème 6)} \\
&= Q_s(x, Q_t\, a) \quad .
\end{aligned}$$

Les autres conditions de la définition des semi-groupes subordonnés sont très faciles à déduire de la propriété 1°.

THÉORÈME 1.3. - Soit $\{V^\lambda\}$ une résolvante exacte subordonnée à $\{U^\lambda\}$. Il existe un noyau sous-markovien A^λ sur X, possédant les propriétés suivantes :

1° Si f est λ-excessive (par rapport au semi-groupe $\{P_t\}$), la fonction $A^\lambda f$ est λ-excessive, et majorée par f.

2° On a la relation : $U^\lambda - V^\lambda = A^\lambda U^\lambda$.

DÉMONSTRATION. - Nous simplifierons un peu les notations, en supposant $\lambda = 0$, ce que nous pouvons faire, comme nous l'avons vu au cours de la démonstration du théorème 1.1. Soit K l'image de C_0 par l'opérateur U, nous pouvons aussi supposer que cette image appartient à C_0, est dense dans C_0 en norme, et que l'opérateur U est borné. Nous avons la relation :

$$(U - V)(I - \mu U^\mu) = (I + \mu V)(U^\mu - V^\mu) \quad \text{(d'après l'équation résolvante)} \quad .$$

Soit f une fonction positive de K ; elle est de la forme Ug, $g \in C_0$. La fonction $(I + \mu V)(U^\mu - V^\mu) f$ est positive, (propriété (d) des résolvantes subordonnées) donc aussi la fonction $(U - V)(I - \mu U^\mu) f$, égale à $(U - V) U^\mu g$. Multiplions par μ, faisons tendre μ vers l'infini, nous obtenons l'inégalité $(U - V) g \geq 0$. On verrait de même que, si f est comprise entre -1 et $+1$, $(U - V) g$ est comprise entre -1 et $+1$. Il existe donc une application A de K dans G', positive et de norme ≤ 1 sur K, telle que l'on ait, si $g \in C_0$: $(U - V) g = AUg$. Cette application se prolonge alors par continuité à tout C_0, en une application positive de norme ≤ 1 ; si $f \in C_0$, la valeur de Af au point x est une mesure de Radon $A(x, dy)$, de sorte que A peut se prolonger à tout G'. La relation entre mesures : $(U - V) g = AUg$, qui a lieu sur C_0, a lieu partout. Comme la résolvante est exacte, si g est un potentiel de fonction positive, $(U - V) g$ est une fonction excessive plus petite que Ug : comme toute fonction excessive f est un sup de tels potentiels, (cf. exposé 9, théorème 1.1) la fonction Af est bien excessive et plus petite que f.

Ce théorème a été démontré par HUNT, par une méthode très différente : si la résolvante est celle du semi-groupe subordonné construit dans le troisième exemple de fonctionnelle multiplicative, HUNT prouve en particulier que l'opérateur A^λ est identique à l'opérateur P_T^λ associé au temps d'arrêt T. Voici sa démonstration : Soit B un ensemble mesurable, on a :

$$P_t(x, B) = P^x[X_t \in B, t < T] + P^x[X_t \in B\ T \leq t] \quad .$$

Le premier terme du second membre est $Q_t(x, B)$. Multiplions par $e^{-\lambda t}$, et intégrons de 0 à $+\infty$: le premier membre et le premier terme du second membre donnent respectivement $U^\lambda(x , B)$ et $V^\lambda(x , B)$. Le second terme du second membre est égal aussi, d'après la propriété forte de Markov, à

$$\int_{\{T\leq t\}} P_{t-T}(X_T , B) \, dP^x$$

après l'intégration, on obtient :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{\{T\leq t\}} P_{t-T}(X_T , B) \, dP^x = \int dP^x \int_T^\infty P_s(X_T , B) \, e^{-\lambda s} ds$$
$$= P_T^\lambda U^\lambda(x , B) \quad .$$

Si, en particulier, T est le temps d'entrée dans un ensemble presque analytique E , nous avons vu dans l'exposé 9 que l'opérateur P_E^λ transformait les fonctions λ-excessives en fonctions λ-excessives : la résolvante associée est donc exacte. Nous appellerons ses potentiels les potentiels de Green relatifs à E , et son semi-groupe associé le semi-groupe de Green relatif à E .

THÉORÈME 1.4. - Soit E un ouvert de X : le semi-groupe de Green associé à E est le plus grand des semi-groupes exacts subordonnés à $\{P_t\}$ pour lesquels les points de E sont non-permanents.

DÉMONSTRATION. - Soient $\{V^\lambda\}$ la résolvante du semi-groupe de Green, $\{W^\lambda\}$ une résolvante exacte telle que les mesures $W^\lambda(x , dy)$ soient nulles pour $x \in E$, A^λ l'opérateur associé à cette résolvante par le théorème 1.3. Si f est une fonction positive, $A^\lambda U^\lambda f$ est une fonction λ-excessive égale à $U^\lambda f$ sur E : elle majore donc $P_E^\lambda U^\lambda f$: $U^\lambda f - W^\lambda f$ majore donc $U^\lambda f - V^\lambda f$, d'où le résultat.

II. Dualité des semi-groupes subordonnés.

DÉFINITION 2.1. - Soit une mesure positive (que nous désignerons par ξ ou dx) sur l'espace localement compact X . Soient deux semi-groupes $\{P_t\}$ et $\{\hat{P}_t\}$, sous-markoviens, fortement continus sur l'espace invariant $C_0(X)$. Nous dirons que ces semi-groupes sont en dualité, relativement à la mesure dx , s'il existe pour tout $\lambda > 0$ une fonction $u^\lambda(x , y)$ universellement mesurable sur $X \times X$, positive, qui possède les propriétés suivantes :

1° L'application $x \to u^\lambda(x , y)$ est, pour tout y , λ-excessive par rapport au semi-groupe $\{P_t\}$.

2° L'application $y \to u^\lambda(x, y)$ est, pour tout x, λ-excessive par rapport au semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$.

3° Nous désignerons par $P_t(x, dy)$, $U^\lambda(x, dy)$ les mesures associées au semi-groupe $\{P_t\}$ et à ses potentiels, par $\hat{P}_t(dy, x)$, $\hat{U}^\lambda(dy, x)$, les mesures analogues relatives au semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$. Les relations suivantes sont supposées vérifiées

$$U^\lambda(x, dy) = u^\lambda(x, y).dy, \quad \hat{U}^\lambda(dx, y) = dx.u^\lambda(x, y) \quad .$$

Les noyaux potentiels des deux semi-groupes sont donc des "noyaux fonctions". Les conditions données ci-dessus sont d'ailleurs bien trop fortes : on pourrait montrer, par exemple, que si les conditions sont vérifiées pour $\lambda = 0$, les fonctions $x \to u(x, y)$ et $y \to u(x, y)$ étant localement sommables, et si l'on désigne par $u^\lambda(x, y)$ la fonction

$$u(x, y) - \int \lambda U^\lambda(x, dz)\, u(z, y)$$

convenablement régularisée aux points où $u(x, y) = \infty$, alors les $u^\lambda(x, y)$ vérifient les conditions de la définition 2.1. Cela ne nous intéressera pas ici.

Voici quelques conséquences faciles de la définition 2.1.

a. Soit μ une mesure positive. Posons $U^\lambda\mu(x) = \int u^\lambda(x, y).d\mu(y)$ (resp. $\mu\hat{U}^\lambda(x) = \int d\mu(y).u^\lambda(y, x)$). Nous appellerons cette fonction le potentiel (resp. le copotentiel) de la mesure μ [nous utiliserons systématiquement le préfixe co- ou le chapeau ^ pour désigner les éléments de la théorie du potentiel relative au semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$]. C'est, d'après 1°, une fonction λ-excessive (resp. λ-coexcessive).

b. Le semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$ est sous-markovien ; il en résulte que l'on a pour tout y la relation $\int \lambda u^\lambda(x, y).dx \leq 1$; ceci entraîne l'inégalité $\lambda\xi U^\lambda \leq \xi$, ou encore, que la mesure ξ est excessive par rapport au semi-groupe $\{P_t\}$ [On pourra remarquer, en passant, que la fonction $\mu\hat{U}^\lambda$, copotentiel de la mesure μ, est la densité par rapport à ξ de la mesure μU^λ, potentiel à gauche de la mesure μ par rapport à $\{P_t\}$].

c. Les relations 3° entraînent que tout ensemble ξ-négligeable est de potentiel (copotentiel) nul ; réciproquement, un ensemble B de potentiel nul est évidemment négligeable par rapport aux mesures ξU^λ $(\lambda > 0)$. Lorsque $\lambda \to 0$, ces

ces mesures tendent vaguement vers ξ en croissant. L'ensemble B est donc ξ-négligeable.

La remarque suivante est alors fondamentale pour les raisonnements qui suivent. Soient E un ensemble finement ouvert, x un point de E ; les trajectoires du processus $\{X_t\}$, issues de x , restent dans E pendant un intervalle de temps non réduit à 0 : on a donc $U^\lambda(x, A) > 0$, il en résulte que A n'est pas ξ-négligeable. Autrement dit : le complémentaire d'un ensemble ξ-négligeable est un ensemble finement partout dense.

d. L'ensemble des points où $u^\lambda(x, y) = +\infty$ est négligeable en x , pour tout y . Il est même polaire, car, si nous désignons par f la fonction λ-excessive $x \to u^\lambda(x, y)$, et si E est l'ensemble des points où $f = +\infty$,

$$E^x[e^{-\lambda T_E} f \circ X_{T_E}] < +\infty \implies P^x[T_E < \infty] = 0 \quad .$$

La fonction de x au premier membre est plus petite que f , donc finie presque partout ; la fonction excessive $\Phi_E(x) = P^x[T_E < \infty]$ est donc nulle presque partout, donc partout [Signalons qu'on peut montrer que les ensembles polaires et copolaires sont les mêmes].

THÉORÈME 2.1. - Soit $\{V^\lambda\}$ une résolvante exacte subordonnée à $\{U^\lambda\}$, et soient A^λ les opérateurs sous-markoviens envisagés dans l'énoncé du théorème 1.3. Posons :

$$v^\lambda(x, y) = u^\lambda(x, y) - \int_X A^\lambda(x, dz)\, u^\lambda(z, y)$$

sur l'ensemble où $u^\lambda(x, y) < \infty$, et laissons la fonction indéterminée sur le complémentaire de cet ensemble. Il existe alors une résolvante exacte $\{\hat{V}^\lambda\}$ subordonnée à $\{\hat{U}^\lambda\}$ telle que l'on ait les relations :

$$V^\lambda(x, dy) = v^\lambda(x, y).dy \ , \quad \hat{V}^\lambda(dx, y) = dx.v^\lambda(x, y) \quad .$$

La correspondance $\{V^\lambda\} \to \{\hat{V}^\lambda\}$ est une bijection de l'ensemble des résolvantes exactes subordonnées à $\{U^\lambda\}$ sur l'ensemble des résolvantes exactes subordonnées à $\{\hat{U}^\lambda\}$. Cette correspondance est croissante (la relation d'ordre entre les résolvantes étant la relation de subordination : $\{V^\lambda\} \leq \{W^\lambda\} \iff \forall\ \lambda,\ V^\lambda \lessapprox W^\lambda$) Si E est un ensemble ouvert, et $\{V^\lambda\}$ la famille des potentiels de Green relatifs à E , alors $\{\hat{V}^\lambda\}$ est la résolvante de Green relative à E (et au semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$).

DÉMONSTRATION. - La fonction $x \to v^{\lambda}(x, y)$ est, pour tout y, finement continue hors de l'ensemble polaire des x tels que $u^{\lambda}(x, y) = +\infty$; elle est égale, en effet, à la différence de deux fonctions λ-excessives : $u^{\lambda}(x, y)$ qui l'est par hypothèse, et la seconde fonction en vertu du théorème 1.3. De même, la fonction $y \to v^{\lambda}(x, y)$, égale à la différence de deux λ-copotentiels de mesures, est cofinement continue, hors de l'ensemble copolaire des y tels que $u^{\lambda}(x, y) = +\infty$. Considérons alors les deux fonctions :

$$v^{\lambda}(x, y) - v^{\mu}(x, y), \text{ et } -(\lambda-\mu) \int_X v^{\lambda}(x, z)\, v^{\mu}(z, y)\, dz \quad .$$

Pour chaque x, elles sont égales ξ-presque partout en y, car ce sont toutes deux des densités pour la mesure $V^{\lambda}(x, dy) - V^{\mu}(x, dy)$; d'autre part, elles sont toutes deux cofinement continues en y, comme on le voit facilement, hors de l'ensemble copolaire des y tels que $u^{\lambda}(x, y)$ ou $u^{\mu}(x, y) = +\infty$. Elles sont donc égales partout hors de cet ensemble copolaire. Il en résulte que, si nous considérons les opérateurs $\hat{V}^{\lambda}$ tels qu'ils sont définis dans l'énoncé, ils constituent une résolvante exacte subordonnée à $\{\hat{U}^{\lambda}\}$. Les assertions de l'énoncé sont alors immédiates, à l'exception de la dernière. Supposons que $\{V^{\lambda}\}$ soit la résolvante de Green associée à E ; soit $\hat{W}^{\lambda}$ la résolvante de Green associée à E et au semi-groupe $\{\hat{P}_t\}$, soit $\{W^{\lambda}\}$ la résolvante exacte subordonnée à $\{U^{\lambda}\}$, telle que $\{\hat{W}^{\lambda}\}$ lui soit associée comme ci-dessus. Nous avons vu que les mesures $V^{\lambda}(x, dy)$ sont portées par $X - E$ (propriété (b) qui suit la définition 1.2) : il en résulte que l'on a, pour chaque x, $v^{\lambda}(x, y) = 0$ presque partout sur E, donc, E étant ouvert, partout sur E (hors de l'ensemble polaire des y tels que $u^{\lambda}(x, y) = \infty$). Par conséquent, si $y \in E$, les mesures $\hat{V}^{\lambda}(dx, y)$ sont nulles, et la résolvante $\{\hat{V}^{\lambda}\}$ est, d'après le théorème 1.4, plus petite que la résolvante de Green $\{\hat{W}^{\lambda}\}$: la résolvante $\{V^{\lambda}\}$ est donc plus petite que la résolvante $\{W^{\lambda}\}$; le même raisonnement montre alors que les points de E sont non-permanents pour le semi-groupe associé à $\{W^{\lambda}\}$, et, $\{V^{\lambda}\}$ étant la résolvante de Green associée à E, on a l'inégalité $\{V^{\lambda}\} \geq \{W^{\lambda}\}$ d'après le théorème 1.4, d'où l'égalité annoncée.

COROLLAIRE. - Soit E un ensemble ouvert, soient $\{V^{\lambda}\}$ et $\{\hat{V}^{\lambda}\}$ les résolvantes de Green associées à E, A^{λ} et $\hat{A}^{\lambda}$ les opérateurs qui leur sont associés par le théorème 1.3. On a la relation :

$$\forall\ x, y, \quad \int_X A^{\lambda}(x, dz)\, u^{\lambda}(z, y) = \int_X u^{\lambda}(x, z)\, \hat{A}^{\lambda}(dz, y) \quad .$$

(Cette relation a lieu en effet, pour chaque x, hors d'un ensemble copolaire en y ; mais l'identification de $\hat{A}^\lambda$ à $\hat{P}^\lambda_E$, donnée dans le théorème 1.3, montre que les deux membres sont des fonctions cofinement continues en y. L'égalité a donc lieu partout).

THÉORÈME 2.2 (HUNT). - Soit E un ensemble analytique de X, et soient P^λ_E, $\hat{P}^\lambda_E$ les opérateurs de balayage sur E, associés aux semi-groupes $\{P_t\}$ et $\{\hat{P}_t\}$ respectivement. On a, pour tout couple (x, y) de points de X, la relation :

$$\int_X P^\lambda_E(x, dz)\, u^\lambda(z, y) = \int_X u^\lambda(x, z)\, \hat{P}^\lambda_E(dz, y) \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Les deux membres sont, pour chaque x, des fonctions λ-coexcessives en y, donc cofinement continues ; il nous suffit donc de vérifier l'égalité ξ-presque partout en y, pour chaque x. Il nous suffit pour cela de vérifier que l'on a, pour toute fonction $a(y) \in C_{0+}$, la relation :

$$\int P^\lambda_E(x, dz)\, u^\lambda(z, y)\, a(y)\, dy = \int u^\lambda(x, z)\, \hat{P}^\lambda_E(dz, y)\, a(y)\, dy \quad .$$

Les deux membres sont des fonctions λ-excessives en x, donc finement continues. Il nous suffit donc de vérifier que, si $b(x) \in C_{0+}$, on a :

$$\int b(x)\, dx\, P^\lambda_E(x, dz)\, u^\lambda(z, y)\, a(y)\, dy = \int b(x)\, dx\, u^\lambda(x, z)\, \hat{P}^\lambda_E(dz, y)\, a(y)\, dy \quad .$$

Soient c la fonction $U^\lambda a$, e la fonction $b\hat{U}^\lambda$, μ la mesure $b(x)\,dx$, ν la mesure $a(y)\,dy$. Nous avons à vérifier l'égalité :

$$\int d\mu(x)\, P^\lambda_E(x, dz)\, c(z) = \int e(z)\, \hat{P}^\lambda_E(dz, y)\, d\nu(y) \quad .$$

Cette relation est vraie, nous l'avons vu, lorsque E est <u>ouvert</u> (c'est le corollaire qui suit le théorème 2.1, les opérateurs A^λ étant interprétés comme dans la démonstration du théorème 1.3). D'autre part, la mesure μ ne charge pas l'ensemble des points de E irréguliers pour E, qui est semi-polaire, donc de potentiel nul (exposé 9) donc ξ-négligeable. On a la même propriété pour la mesure ν et l'ensemble des points de E co-irréguliers pour E. Il est donc possible de trouver (exposé 5 théorème 3.4) des ouverts décroissants E_n, qui contiennent E, et sont tels que le temps d'entrée T_n du processus $\{X_t\}$ dans E_n (resp. le temps d'entrée $\hat{T}_n$ du processus $\{\hat{X}_t\}$ dans E_n) tende en croissant vers le temps d'entrée T_E (resp. $\hat{T}_E$). La propriété étant vraie pour les E_n passe bien à la limite, car $P_{E_n}^{\lambda} c \to P_E^{\lambda} c$ du fait que c est un λ-potentiel (exposé 9), et de même $e\hat{P}_{E_n}^{\lambda} \to e\hat{P}_E^{\lambda}$.

Voici un exemple d'application du théorème 2.2.

THÉORÈME 2.3. - Soient μ une mesure positive bornée, E un ensemble analytique. Le potentiel balayé $P_E^{\lambda} U^{\lambda} \mu$ est le λ-potentiel d'une mesure portée par la réunion de E et de l'ensemble des points coréguliers pour E. Pour que ce potentiel balayé soit identique à $U^{\lambda} \mu$, il faut et il suffit que μ soit portée par l'ensemble des points de E coréguliers pour E.

DÉMONSTRATION. - Remarquons d'abord que deux mesures bornées qui ont même λ-potentiel sont identiques (d'après la relation $\langle f.dx , U^{\lambda} \mu\rangle = \langle f\hat{U}^{\lambda} , \mu\rangle$, qui montre que la valeur de μ sur tout λ-copotentiel de fonction est connue si $U^{\lambda} \mu$ est connu). D'après le théorème 2.2, $P_E^{\lambda} U^{\lambda} \mu$ est le potentiel de la mesure $\hat{P}_E^{\lambda} \mu$ $(= \int \hat{P}_E^{\lambda}(dx , y) \, d\mu(y))$, qui est bien portée par la réunion de E et de l'ensemble des points coréguliers pour E (exposé n° 5, théorème 3.5). Si x est un point corégulier pour E, la mesure $\hat{P}_E^{\lambda}(dy , x)$ est la masse unité ε_x. Sinon, elle a une masse totale strictement inférieure à 1. Il en résulte que la mesure $\hat{P}_E^{\lambda} \mu$ est identique à μ, si et seulement si μ est portée par l'ensemble des points de E coréguliers pour E.

C. Q. F. D.

Références bibliographiques

[1] DYNKIN (E. B.). - Theory of Markov processes [Translated from the russian edition 1959]. - London, New York, Pergamon Press, 1960.

[2] MEYER (P. A.). - Fonctionnelles additives et multiplicatives de Markov, Ann. Inst. Fourier, Grenoble (à paraître).

Pour l'intégrale de Daniell, telle qu'elle est utilisée ici, voir :

[3] LOOMIS (L. H.). - An introduction to abstract harmonic analysis. - New York, Van Nostrand, 1953 (The University Series in higher Mathematics).