Rose-Marie Hervé

Représentation intégrale des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans la théorie axiomatique de M. Brelot

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. nº 6, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1959-1960__4__A6_0>

Séminaire BRELOT-CHOQUET-DENY
(Théorie du Potentiel)
4e année, 1959/60, n° 6

28 mars 1960

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES FONCTIONS SURHARMONIQUES $\geqslant 0$ DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE DE M. BRELOT

par Mme Rose-Marie HERVÉ

Je voudrais indiquer brièvement comment les théorèmes de G. CHOQUET, sur l'existence et l'unicité des représentations intégrales au moyen des éléments extrémaux dans les cônes convexes [3] et [4], permettent d'effectuer la représentation intégrale des fonctions appartenant à S^+ dans la théorie axiomatique de M. BRELOT sous l'axiome supplémentaire introduit à cet effet ([1] et [2]).

On sait que le théorème d'unicité s'applique, car le cône S^+ est réticulé pour l'ordre qu'il définit dans l'espace S des classes de différences de deux fonctions appartenant à S^+. Afin de réaliser les conditions du théorème d'existence, on va définir, sur S, une topologie séparée d'espace localement convexe, pour laquelle S^+ possède une base métrisable et compacte.

1. Hypothèses.

- Les fonctions harmoniques satisfont seulement aux axiomes 1 , 2 , 3' .
- L'espace Ω admet une base dénombrable.
- Il existe un potentiel >0 dans Ω.

2. Définition d'une famille de formes linéaires sur S.

Soit $V \in S^+$, dont la représentation intégrale, à l'aide d'une mesure μ sur $\overline{\Omega}$ et d'un noyau G dépendant de V, est :

$$V(x) = \int G(x , Y)\, d\mu(Y) \qquad \text{([6], théorèmes 17.1 et 17.2)} .$$

On appelle "fonctions associées à V" les fonctions V_f définies comme suit : pour chaque $f \in C^+(\overline{\Omega})$,

$$V_f(x) = \int G(x , Y)\, f(Y)\, d\mu(Y) .$$

$V_f \in S^+$; V_f est harmonique dans $\Omega \cap \complement S_f$ (S_f support de f).

Alors, pour chaque couple (f , x) , $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$:

$$(V , V') \longrightarrow (V , V')_f(x) = V_f(x) - V'_f(x)$$

est une forme linéaire sur S . Cette famille de formes linéaires sépare les éléments de S .

3. Définition de la topologie T sur S (1).

C'est la topologie définie sur S par la famille des semi-normes

$$(V, V') \longrightarrow |(V, V')_f(x)|, \quad x \in \Omega, \quad f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\}) \quad .$$

4. Remarque.

Pour chaque $x \in \Omega$, l'application $f \to (V, V')_f(x)$, restreinte à $\mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, définit une mesure de Radon, de signe quelconque, sur $\overline{\Omega} - \{x\}$, notée $\mu'^{x}_{(V,V')}$.

5. Propriétés de la topologie T sur l'espace S^+ .

1° La topologie T est métrisable sur S^+ . - On montre qu'elle peut être définie, sur S^+ , par une famille dénombrable de semi-normes ([6], lemme 21.1 et théorème 21.1). L'axiome 3' est utilisé ici de façon essentielle, et c'est pourquoi la métrisabilité vaut seulement sur S^+ .

2° Le cône S^+ , muni de la topologie T , est localement compact ; ou, ce qui est équivalent, S^+ possède une base compacte pour la topologie T .

Etant donné un ouvert $\omega_0 \subset \overline{\omega}_0 \subset \Omega$, $x_0 \in \omega_0$ et $\alpha > 0$, soit :

$$S^+_\alpha = \{V \in S^+ \mid \int V \, d\rho^{\omega_0}_{x_0} \leq \alpha\} \quad .$$

Pour démontrer la compacité de S^+ , on se donne une suite $V_n \in S^+_\alpha$, et les étapes de la démonstration sont les suivantes :

a. Détermination d'une suite partielle n' , telle que, pour chaque couple (f, x) , $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$, $\lim_{n'} (V_{n'})_f(x)$ existe ; ou ce qui est équivalent, pour chaque $x \in \Omega$, les mesures $\mu'^{x}_{V_{n'}}$ sur $\overline{\Omega} - \{x\}$ convergent vaguement vers une mesure sur $\overline{\Omega} - \{x\}$: c'est l'objet du lemme 21.2.

b. Détermination d'une fonction $V \in S^+_\alpha$, telle que, pour chaque couple (f, x) , $x \in \Omega$, $f \in \mathcal{K}^+(\overline{\Omega} - \{x\})$: $V_f(x) = \lim_{n'} (V_{n'})_f(x)$.

---

(1) On trouvera une autre introduction, plus intuitive, de cette topologie dans la thèse à paraître [5], chapitre IV.

On considère l'application $f \to U_f = \widehat{\liminf_{n'} (V_{n'})_f}$ de $C^+(\Omega)$ dans S^+ ; pour qu'il existe une fonction $V \in S^+$ dont les fonctions associées soient les U_f , il suffit (théorème 19.2) que les conditions suivantes soient remplies :

– pour a et $b \geqslant 0$, f et $g \in C^+(\Omega)$: $U_{af+bg} = aU_f + bU_g$; cette condition est établie par la proposition 21.1 ;

– U_f est harmonique dans $\Omega \cap \complement S_f$, et $S_f \subset \Omega$ entraîne $U_f \in P^+$; cette condition résulte de la démonstration de la proposition 21.2.

Alors $V = U_1 = \widehat{\liminf_{n'} V_{n'}}$ répond à la question (théorème 21.2).

6. Théorème de représentation intégrale.

Etant donnée une base compacte A du cône S^+ , toute fonction $V \in S^+$ admet une représentation intégrale unique :

$$V(x) = \int p(x)\, d\nu(p) \qquad ,$$

à l'aide d'une mesure de Radon $\nu \geqslant 0$, définie sur A , et portée par l'ensemble des éléments extrémaux de A .

La démonstration est donnée dans [6], théorème 22.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (Marcel). – Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 2, 1958, n° 1, 40 p.

[2] BRELOT (Marcel). – Lectures on potential theory. – Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960 (Tata Institute of fundamental Research, Lectures on Mathematics, 19).

[3] CHOQUET (Gustave). – Unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes réticulés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 555.

[4] CHOQUET (Gustave). – Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 699.

[5] HERVÉ (Rose-Marie). – Topologie sur l'ensemble des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ et représentation intégrale, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2834.

[6] HERVÉ (Rose-Marie). – Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962 (à paraître) (Thèse Sc. math. Paris. 1961).