SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

JACQUES DENY

Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. n° 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1959-1960__4__A5_0>

SUR L'ÉQUATION DE CONVOLUTION $\mu = \mu \star \sigma$

par Jacques DENY (1)

1. Introduction.

Soit G un groupe abélien localement compact ; soit σ une mesure de Radon $\geqslant 0$ donnée sur G. On se propose de déterminer toutes les mesures $\mu \geqslant 0$ sur G vérifiant

$$\mu = \mu \star \sigma \qquad (1)$$

Ce problème est important pour la théorie du potentiel par rapport à un noyau de convolution ; on va déterminer des solutions ayant un certain caractère extrémal, à l'aide desquelles on pourra donner une représentation "intégrale" de la solution générale, représentation analogue à celle donnée par MARTIN pour les fonctions harmoniques positives dans un domaine euclidien ; cela sera possible grâce aux récents résultats de G. CHOQUET sur les représentations intégrales dans certains cônes convexes sans base compacte [1].

Il est facile de déterminer toutes les solutions bornées de (1) (rappelons qu'une mesure de Radon sur G est dite bornée si toutes ses régularisées sont des fonctions bornées) ; le problème ne se pose d'ailleurs que si la masse totale de σ est 1, sinon la seule solution bornée est la mesure nulle.

THÉORÈME 1. - Lorsque la masse totale de σ est 1, les solutions bornées de (1) sont les mesures bornées admettant pour période tout point du support $S(\sigma)$ de σ.

Pour être complet, on va reproduire la démonstration élémentaire de cet énoncé donnée dans la note [2].

Comme la masse totale de la mesure σ est finie, cette mesure est portée par un sous-groupe dénombrable à l'infini ; on peut donc supposer que G est dénombrable à l'infini. Si μ est une solution bornée de (1), non nécessairement $\geqslant 0$, sa régularisée par n'importe quelle fonction continue positive à support compact a, par rapport à la mesure de Haar de G, une densité f bornée et uniformément continue sur G, satisfaisant à

---

(1) Cet exposé est le développement des résultats énoncés, le plus souvent sans démonstration, dans la note [2] de CHOQUET et DENY.

$$(1') \qquad \int f(x-t)\, d\sigma(t) = f(x) \qquad \forall \ x \in G \quad .$$

Soit alors a un point du support $S(\sigma)$; la fonction g définie par $g(x) = f(x) - f(x-a)$ est aussi une solution bornée uniformément continue de (1'). Posons

$$2\alpha = \sup_{x \in G} g(x)$$

et considérons une suite de points $x_n \in G$ telle que $g(x_n)$ tende vers 2α. Les translatées g_n définies par $g_n(x) = g(x + x_n)$ étant également continues, on peut en extraire une suite partielle convergeant uniformément sur tout compact vers une solution g_0 continue, bornée (majorée par 2α), telle que

$$2\alpha = g_0(0) = \int g_0(-t)\, d\sigma(t) \qquad ,$$

donc telle que $g_0(x) = 2\alpha$ en tout point x du symétrique de $S(\sigma)$ par rapport à l'origine 0, donc du semi-groupe engendré par ce symétrique.

Comme on a choisi $a \in S(\sigma)$, on voit que, pour tout entier naturel p, il existe une translatée g_n telle que $g_n(-ka) > \alpha$ pour $k = 1, 2, \dots, p$, donc un point $x \in G$ tel que

$$f(x - ka) - f(x - (k+1)\, a) = g(x - ka) > \alpha$$

pour ces valeurs de k ; on en déduit

$$f(x-a) - f(x - (p+1)a) > p\alpha \qquad ,$$

ce qui d'après l'hypothèse que f est bornée, entraîne $\alpha \leqslant 0$, d'où $g \leqslant 0$; pour une raison analogue, on a $g \geqslant 0$, d'où $f(x-a) = f(x)$ pour tout $x \in G$; toute régularisée de μ admet a pour période, donc μ admet a pour période, d'où le résultat.

On va s'occuper maintenant des solutions $\geqslant 0$ de (1), bornées ou non, la mesure $\sigma \geqslant 0$ donnée étant quelconque.

2. Les cônes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}$.

Le groupe G et la mesure $\sigma \geqslant 0$ sur G sont donnés une fois pour toutes. Les solutions $\mu \geqslant 0$ de (1) sont appelées mesures σ-harmoniques ; leur ensemble constitue un cône convexe, noté $\mathcal{H}$. Les mesures $\mu \geqslant 0$ satisfaisant à l'inégalité associée

$$\mu * \sigma \leqslant \mu$$

sont appelées mesures σ-surharmoniques ; leur ensemble constitue également un cône convexe, noté $\mathcal{S}$.

Si la mesure μ appartient à $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{S}$), et si ν est une mesure ≥ 0 telle que le produit de convolution $\mu \star \nu$ ait un sens, cette mesure $\mu \star \nu$ appartient aussi à $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{S}$) ; c'est évident.

Si les mesures μ et ν appartiennent à $\mathcal{S}$, il en est de même de la mesure $\inf(\mu , \nu)$.

Le cône $\mathcal{S}$ est fermé pour la topologie vague ; si la mesure σ est à support compact, $\mathcal{H}$ est aussi fermé ; mais il n'en n'est pas toujours ainsi dans le cas général [2].

Introduisons une notation utile pour l'étude des éléments du cône $\mathcal{S}$: si τ est une mesure ≥ 0 telle que la convolution τ^n de n mesures identiques à τ ait un sens quel que soit n , et si la série $\sum \tau^n$ converge (en un sens évident), on appelle <u>noyau élémentaire associé à</u> τ , et on note K_τ la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \tau^n$ où on a posé $\tau^0 = \delta$.

LEMME 1. - <u>Si le cône</u> $\mathcal{S}$ <u>n'est pas réduit à la mesure nulle, le noyau élémentaire</u> $K_{t\sigma}$ <u>existe quel que soit</u> t , $0 \leq t < 1$; <u>si en outre</u> $\mathcal{S} - \mathcal{H} \neq \{0\}$, <u>autrement dit, s'il existe une mesure surharmonique non harmonique</u>, K_σ <u>existe</u>.

En effet si $\mathcal{S}$ contient une mesure $\mu \neq 0$, σ^2 a un sens, car $(\mu \star \sigma) \star \sigma \leq \mu$ a un sens ; de même σ^n a un sens pour tout entier $n > 0$, et $\mu \star \sigma^n \leq \mu$. Pour tout t réel, $0 \leq t < 1$, on a donc

$$(\delta + t\sigma + \dots + t^n \sigma^n) \leq \frac{\mu}{1 - t}$$

d'où l'existence de $K_{t\sigma}$.

Si de plus μ n'est pas harmonique, la mesure $\xi = (\delta - \sigma) \star \mu \geq 0$ (appelée <u>racine</u> de μ) n'est pas nulle, et comme on a, pour tout entier $n > 0$:

$$(\delta + \sigma + \dots + \sigma^{n-1}) \star \xi = \mu - \mu \star \sigma^n \leq \mu$$

la série $\sum \sigma^n$ est bien convergente.

COROLLAIRE 1. - <u>Si</u> K_σ <u>n'existe pas, le cône</u> $\mathcal{H} = \mathcal{S}$ <u>est fermé</u>.

C'est évident.

---

(2) Contrairement à une affirmation malencontreuse de [2] ; cela résulte de ce que l'ensemble des exponentielles σ-harmoniques n'est pas nécessairement fermé (voir n° 6).

COROLLAIRE 2. - Si K_σ existe, toute mesure surharmonique $\mu \in \mathcal{S}$ admet une décomposition de Riesz unique

$$\mu = K_\sigma \star \xi + \eta$$

en somme d'un K_σ-potentiel et d'une mesure harmonique.

Dans cette formule $\xi = (\delta - \sigma) \star \mu$ est la racine de μ, et la partie harmonique η est égale à $\lim_{n\to\infty} \mu \star \sigma^n$.

Renvoyant à l'exposé précédent ([3]) pour la démonstration, d'ailleurs très simple, de ce théorème (dans un cadre plus général que celui de la convolution), nous dégagerons, pour les applications en vue, le résultat suivant :

COROLLAIRE 3. - Soient μ' et μ'' deux éléments de $\mathcal{S}$, ξ' et ξ'' leurs racines, η' et η'' leurs parties harmoniques ; si $\mu' - \mu'' \in \mathcal{S}$, alors $\xi'' \leqslant \xi'$ et $\eta'' \leqslant \eta'$.

C'est une conséquence immédiate des définitions de la racine et de la partie harmonique d'un élément de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE 4. - Les cônes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}$ sont réticulés.

Rappelons qu'un cône convexe $\mathcal{C}$ est dit réticulé si deux éléments quelconques x' et x'' de $\mathcal{C}$ ont une borne inférieure (pour l'ordre défini par $\mathcal{C}$), autrement dit s'il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $x' - x_0 \in \mathcal{C}$, $x'' - x_0 \in \mathcal{C}$, et tel que les relations $x \in \mathcal{C}$, $x' - x \in \mathcal{C}$ et $x'' - x \in \mathcal{C}$ entraînent $x_0 - x \in \mathcal{C}$. On déduit immédiatement du corollaire 3 les conséquences suivantes :

Si $\mathcal{C} = \mathcal{S} \neq \mathcal{H}$, la borne inférieure (pour l'ordre défini par $\mathcal{C}$) des mesures surharmoniques μ' et μ'' est la mesure surharmonique $K_\sigma \star \xi + \eta$, où ξ est l'enveloppe inférieure (au sens usuel) des racines de μ' et μ'', et η la partie harmonique de l'enveloppe inférieure des parties harmoniques de μ' et μ''.

Si $\mathcal{C} = \mathcal{H}$, la borne inférieure des deux mesures harmoniques μ' et μ'' est, dans tous les cas, la partie harmonique de la mesure surharmonique $\inf(\mu', \mu'')$.

3. Exponentielles harmoniques.

On appelle exponentielle sur un groupe abélien localement compact G toute fonction f continue réelle sur G, ne s'annulant pas, et telle que

$$f(x + y) = f(x) f(y), \quad \forall \ x \text{ et } y \in G .$$

On a évidemment $f(0) = 1$, $f(-x) = 1/f(x)$, $\forall\ x \in G$.

Le produit et le quotient de deux exponentielles sont des exponentielles.

La constante 1 est une exponentielle ; c'est la seule exponentielle si le groupe G est compact.

Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser ce résultat très simple : soient μ et ν deux mesures $\geqslant 0$ telles que $\mu \star \nu$ ait un sens ; pour toute exponentielle f le produit de convolution $(f\mu) \star (f\nu)$ a un sens et on a :

$$(f\mu) \star (f\nu) = f\,\mu \star \nu \quad . \tag{2}$$

Les mesures dont la densité est une exponentielle s'introduisent naturellement grâce à la propriété suivante :

LEMME 2. - <u>Pour qu'une mesure positive soit proportionnelle à ses translatées, il faut et il suffit qu'elle soit le produit d'une mesure invariante sur</u> G <u>par une exponentielle</u>.

La démonstration est très facile ; on utilisera la continuité de l'application $x \to \mu \star \delta_x$ de G dans l'ensemble des mesures de Radon sur G muni de la topologie vague (μ étant une mesure $\geqslant 0$ donnée).

On peut définir une topologie vague sur un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions continues f sur G , comme la topologie induite par la topologie vague sur l'ensemble des mesures de densité f : ce sera, d'une façon précise, la topologie la moins fine qui rende continues les applications $f \to \int f(x)\ \varphi(x)\ dx$ de $\mathcal{E}$ dans R , φ décrivant l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G , et dx désignant une mesure invariante non nulle sur G . On peut alors énoncer le résultat suivant, dont la démonstration ne présente pas de difficultés sérieuse :

LEMME 3. - <u>Sur l'ensemble</u> $\mathcal{E}$ <u>des exponentielles sur</u> G , <u>la topologie vague et la topologie de la convergence uniforme sur tout compact sont équivalentes ; muni de cette topologie,</u> $\mathcal{E}$ <u>est localement compact</u>.

On dira que <u>l'exponentielle</u> f <u>est harmonique</u> (relativement à la mesure $\sigma \geqslant 0$ donnée) si la mesure de densité f est harmonique ; cette notion est indépendante du choix de la mesure invariante sur G ; pour que l'exponentielle f soit harmonique, il faut et il suffit qu'on ait :

$$\int f(-t)\ d\sigma(t) = 1 \quad . \tag{3}$$

On dira qu'une exponentielle f , définie seulement sur un sous-groupe fermé G' contenant le support $S(\sigma)$ est harmonique si elle vérifie cette relation (3). Alors tout prolongement de f en une exponentielle est évidemment harmonique. Rappelons à ce sujet que toute exponentielle sur G' peut être prolongée en une exponentielle sur G , mais un tel prolongement n'est pas nécessairement unique, et on n'aura pas à utiliser ce résultat connu. On vérifiera aisément le résultat suivant :

LEMME 4. - Soit $G(\sigma)$ le sous-groupe fermé engendré par le support de la mesure σ ; pour que le produit d'une mesure invariante sur $G(\sigma)$ par une exponentielle f définie sur $G(\sigma)$ soit une mesure harmonique, il faut et il suffit que f soit harmonique.

4. Génératrices extrémales du cône $\mathcal{S}$. - Dans toute la suite on désignera par $G(\sigma)$ le sous-groupe fermé engendré par le support $S(\sigma)$ de la mesure $\sigma \geqslant 0$ donné, et par ϖ une mesure $\geqslant 0$ non nulle portée par $G(\sigma)$ et invariante par les translations de $G(\sigma)$.

THÉORÈME 2. - Les éléments extrémaux du cône $\mathcal{S}$ sont :

1° Les mesures proportionnelles aux translatées des mesures de la forme $f\varpi$, où f est une exponentielle harmonique définie sur $G(\sigma)$.

2° Les mesures proportionnelles aux translatées du noyau élémentaire $K = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$ associé à la mesure donnée σ .

Bien entendu cette seconde classe d'éléments extrémaux est vide si le noyau élémentaire K associé à σ n'existe pas.

On va diviser la démonstration en deux parties :

1° Toute mesure μ appartenant à l'une des classes de l'énoncé est un élément extrémal de $\mathcal{S}$; autrement dit toute mesure surharmonique ν telle que $\mu - \nu$ soit surharmonique est proportionnelle à μ .

D'après le corollaire 3 (n° 2), c'est évident si μ est proportionnelle à une translatée de K , c'est-à-dire si μ est le K-potentiel engendré par une masse ponctuelle.

Supposons que μ appartienne à la première classe ; on peut se borner au cas où $\mu = f\varpi$, où f est une exponentielle harmonique définie sur $G(\sigma)$, car toute mesure proportionnelle à une mesure extrémale ou déduite par une translation d'une telle mesure est évidemment extrémale.

D'après le lemme 4, μ est harmonique ; donc, d'après le corollaire 3 (n° 2), la mesure ν est harmonique. Si on pose $\sigma' = f^{-1}\sigma$ on a, d'après (2) :

$$(f^{-1}\nu) \star \sigma' = f^{-1}\nu$$

(car f^{-1} est une exponentielle définie sur $G(\sigma)$) ; comme mesure $f^{-1}\nu$ est bornée (puisque $f^{-1}\nu \leqslant f^{-1}\mu = \varpi$) elle admet pour période tout point de $S(\sigma)$, donc tout point de $G(\sigma)$ (d'après le théorème 1) ; elle est donc proportionnelle à la mesure invariante ϖ (puisqu'elle est portée par $G(\sigma)$) et par conséquent ν est bien porportionnelle à $f\varpi = \mu$.

2° Tout élément extrémal de $\mathfrak{S}$ appartient à l'une des classes de l'énoncé. Pour le voir observons d'abord que, d'après l'unicité de la décomposition de Riesz et le corollaire 3 (n° 2), tout élément extrémal de $\mathfrak{S}$ est, soit un potentiel (nécessairement engendré par une mesure ponctuelle, donc un élément de la seconde classe), soit une mesure harmonique.

Soit donc μ une mesure harmonique extrémale ; soit x un point du support $S(\sigma)$, soit v un voisinage compact de x , et soit σ_v la restriction (non nulle) de σ à v . Comme $\mu \star \sigma_v$ est harmonique, de même que $\mu - \mu \star \sigma_v = \mu \star (\sigma - \sigma_v)$, il existe, en vertu du caractère extrémal de μ , un nombre réel $\alpha_v > 0$ tel que

$$\mu \star \sigma_v = \alpha_v \, \mu \quad .$$

Appelons alors m_v la masse totale de σ_v , et posons $\tau_v = \sigma_v / m_v$, $\beta_v = \alpha_v / m_v$; on a

$$\mu \star \tau_v = \beta_v \, \mu \quad .$$

Lorsque v tend vers x ; τ_v converge vaguement vers δ_x , masse $+1$ en x ; donc β_v tend vers un nombre réel $g(x)$ tel que

$$\mu \star \delta_x = g(x)\, \mu \quad . \tag{4}$$

Soit maintenant x un point de $G(\sigma)$ tel que $-x \in S(\sigma)$; on a, d'après (4) :

$$\mu = (\mu \star \delta_{-x}) \star \delta_x = g(-x)\, \mu \star \delta_x \quad .$$

Si x appartient à $S(\sigma)$, il en résulte que $g(x) = 1/g(-x)$; sinon on pourra encore écrire $\mu \star \delta_x = g(x)\,\mu$, à condition de poser $g(x) = 1/g(-x)$.

Soit ensuite $x = x_1 + x_2$, chacun des x_i appartenant soit à $S(\sigma)$, soit à l'ensemble symétrique $-S(\sigma)$; en écrivant $\mu \star \delta_x = (\mu \star \delta_{x_1}) \star \delta_{x_2}$ on vérifie que, si $g(x)$ a déjà été défini, ce nombre est égal à $g(x_1)\,g(x_2)$; sinon la relation (4) aura encore lieu à condition de poser $g(x) = g(x_1)\,g(x_2)$.

De ces remarques, et de la continuité de l'application $x \to \mu \star \delta_x$, on déduit que μ est proportionnelle à chacune de ses translatées par un élément de $G(\sigma)$.

Observons maintenant que si μ est harmonique extrémale, son support est un translaté de $G(\sigma)$; en effet s'il existe deux points du support qui ne sont pas congrus modulo $G(\sigma)$, on peut trouver un ouvert u contenant l'un de ces points, qui soit invariant par les translations de $G(\sigma)$, et dont le complémentaire soit de mesure > 0 pour μ ; évidemment les restrictions de μ à u et à son complémentaire vérifient toutes deux la relation (1), donc elles sont harmoniques et elles ne sont pas proportionnelles, contrairement à l'hypothèse que μ est extrémale.

La mesure μ est donc portée par un ensemble déduit de $G(\sigma)$ par translation ; toute mesure déduite par translation d'une mesure harmonique extrémale étant évidemment harmonique extrémale, on peut supposer que μ est portée par $G(\sigma)$; comme on a vu que μ est proportionnelle à ses translatées par les éléments de $G(\sigma)$, il résulte du lemme 2 qu'elle est proportionnelle à une mesure de la forme $f\varpi$, où f est une exponentielle définie sur $G(\sigma)$; d'après le lemme 4, cette exponentielle est harmonique, ce qui achève la démonstration du théorème.

5. Représentation des mesures harmoniques.

Afin de pouvoir appliquer le théorème de représentation de [1], on supposera maintenant que le groupe G est à base dénombrable. On désignera par $\mathcal{E}$ l'ensemble des exponentielles sur $G(\sigma)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (d'après le lemme 3, $\mathcal{E}$ est localement compact) ; on désignera par $\mathcal{E}(\sigma)$ l'ensemble des exponentielles f sur $G(\sigma)$ qui sont harmoniques, c'est-à-dire telles que $\int f(-t)\,d\sigma(t) = 1$ (c'est un sous-ensemble borélien de $\mathcal{E}$).

Comme G est à base dénombrable, il existe un ensemble borélien Γ de G contenant un représentant et un seul de chaque classe de $G/G(\sigma)$. Appelons $\mathcal{A}$ l'ensemble des mesures de la forme $(f\varpi) \star \delta_x$ $(f \in \mathcal{E}(\sigma)$, $x \in \Gamma)$, $\mathcal{B}$ l'ensemble des mesures $K \star \delta_x$ $(x \in G)$. Les mesures de $\mathcal{A}$ étant harmoniques et celles de $\mathcal{B}$ étant des potentiels, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont disjoints ; deux éléments distincts de $\mathcal{A}$ ne sont pas proportionnels (en effet, d'après la définition des exponentielles, les mesures $(f\varpi) \star \delta_x$ et $(f\varpi) \star \delta_y$, $f \in \mathcal{E}$, x et $y \in G$, sont proportionnelles si et seulement si x et y sont congrus modulo $G(\sigma)$) ; enfin deux éléments distincts de $\mathcal{B}$ ne sont pas proportionnels (d'après le principe d'unicité des masses dans la théorie du potentiel par rapport au noyau élémentaire K ; voir [3]) ; par conséquent, d'après le théorème 2, la réunion de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ constitue une section (borélienne) du cône des génératrices extrémales du cône $\mathcal{S}$ des mesures surharmoniques.

Comme ce cône $\mathcal{S}$ est constitué par des mesures positives sur un espace localement compact à base dénombrable, qu'il est vaguement fermé, convexe et réticulé, il résulte de [1] que tout élément μ de $\mathcal{S}$ admet une représentation et une seule de la forme

$$\mu = \int y \, d\lambda(y) \tag{5}$$

où λ est une mesure positive portée par la réunion $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Appelons λ_1 et λ_2 les restrictions de λ aux ensembles disjoints $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, ν l'image de λ_1 par l'application biunivoque de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}(\sigma) \times \Gamma$ définie par $(f\varpi) \star \delta_x \to (f, x)$, ξ l'image de λ_2 par l'homéomorphisme $K \star \delta_x \to x$ de $\mathcal{B}$ sur G ; la relation (5) donne :

$$\mu = \int (f\varpi) \star \delta_x \, d\nu(f, x) + K \star \xi \tag{6}$$

car

$$\int (K \star \delta_x) \, d\xi(x) = K \star \xi \quad .$$

Inversement toute mesure μ de la forme (6), où ξ est une mesure positive sur G (telle que $K \star \xi$ ait un sens), et ν une mesure positive sur l'espace localement compact $\mathcal{E} \times G$ (telle que la première intégrale du second membre ait un sens) est évidemment surharmonique ; d'après l'unicité de la décomposition de Riesz (n° 2), le premier terme du second membre représente la partie harmonique de μ et le second terme sa partie "potentiel" ; ce second terme est nul si μ est harmonique, et on a obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Les mesures σ-harmoniques sont les mesures de la forme

$$\mu = \int (f\varpi) \star \delta_x \, d\nu(f, x)$$

où ν est une mesure de Radon positive sur l'espace localement compact $\mathcal{E} \times G$, portée par l'ensemble borélien $\mathcal{E}(\sigma) \times \Gamma$, et telle que l'intégrale ait un sens ; une telle représentation est unique.

L'ensemble Γ a été introduit pour permettre d'énoncer un théorème d'unicité ; malheureusement il n'offre aucun caractère canonique ; la situation est beaucoup plus agréable lorsque $G(\sigma) = G$ (on peut alors prendre pour Γ l'ensemble réduit à l'origine de G) ; il suffit d'énoncer le résultat obtenu dans ce cas particulier

THÉORÈME 3'. - Lorsque le support de la mesure σ engendre tout le groupe G, les mesures harmoniques sont les mesures dont la densité h par rapport à la mesure de Haar est donnée par

$$h(x) = \int f(x)\, d\nu(f)$$

où ν est une mesure positive sur l'espace localement compact $\mathcal{E}$, portée par l'ensemble borélien $\mathcal{E}(\sigma)$ des exponentielles harmoniques ; cette représentation est unique.

Evidemment ν doit être choisie de façon que h soit localement intégrable par rapport à la mesure de Haar de G ; on peut dire que, dans ce cas, les mesures harmoniques sont des "fonctions" (qui sont d'ailleurs continues) qui se présentent comme transformées de Laplace de certaines mesures positives.

REMARQUE. - Il résulte du théorème 3 que s'il existe une mesure harmonique non nulle, il existe au moins une exponentielle harmonique ; ce résultat ne pouvait être déduit du théorème de KREIN et MILMAN appliqué au cône $\mathcal{H}$ (voir [1]), car ce cône n'est pas toujours fermé.

6. Cas du groupe R^n.

On supposera que le support de σ engendre tout le groupe $G = R^n$; comme l'ensemble $\mathcal{E}$ des exponentielles sur R^n est homéomorphe à R^n, on peut écrire la formule de représentation du théorème 3' sous la forme

$$h(x) = \int \exp(-tx)\, d\nu(t) \tag{7}$$

où ν est une mesure ≥ 0 portée par l'ensemble E des points t de R^n vérifiant la relation

$$\int \exp(tx)\, d\sigma(x) = 1 \quad . \tag{8}$$

Evidemment cet ensemble E est porté par la frontière d'un ensemble convexe de

R^n (l'ensemble des points t tels que $\int \exp(tx)\, d\sigma(x) \leq 1$) ; mais E n'est pas nécessairement identique à cette frontière si σ n'est pas à support compact, et on peut d'ailleurs construire des exemples où E n'est pas fermé (pour $n \geq 2$).

Terminons par quelques exemples ; les résultats énoncés seront des conséquences immédiates des formules (7) et (8) :

Lorsque $n = 1$, il y a au plus deux exponentielles harmoniques.

Supposons $n > 1$ et σ symétrique par rapport à l'origine 0 :

si la masse totale m de σ est > 1 , il n'y a pas d'exponentielle harmonique.

si $m = 1$, la constante 1 est la seule exponentielle harmonique.

si $m < 1$, il y a une infinité d'exponentielles harmoniques ; l'ensemble E est compact car il est rencontré en deux points distincts, symétriques par rapport à 0 , par toute droite issue de 0 . Le cône $\mathcal{H}$ est alors à base compacte, et par conséquent il est fermé.

On retrouvera ainsi l'expression générale des fonctions continues positives qui sont proportionnelles à leurs valeurs moyennes sur les sphères ayant un rayon donné ; en cas d'égalité, seules les constantes positives conviennent, comme il est bien connu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Représentation intégrale dans les cônes à base non compacte, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 4, 1959/60, exposé n° 2, 1 p.

[2] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Sur l'équation de convolution $\mu = \mu \star \sigma$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 799-801.

[3] DENY (Jacques). - Les noyaux élémentaires, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 4, 1959/60, exposé n° 4, 12 p.