SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

JACQUES DENY

Les noyaux élémentaires

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 4 (1959-1960), exp. nº 4, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1959-1960__4__A4_0>

LES NOYAUX ÉLÉMENTAIRES (1)

par Jacques DENY

I. Noyaux-diffusions ; potentiels de mesures.

On se donne une fois pour toutes un espace localement compact E. On note M l'ensemble des mesures de Radon sur E, M_K l'ensemble des mesures de Radon à support compact, M^+ et M_K^+ les sous-ensembles de M et M_K constitués par des mesures $\geqslant 0$.

DÉFINITION 1. - Un noyau-diffusion sur E (2) est une application T de M_K^+ dans M^+ satisfaisant aux axiomes suivants :

(α) $T a\mu = aT\mu$, $\forall\ a \in \mathbb{R}^+$

(β) Si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, $T\mu = \sum_{n=1}^{\infty} T\mu_n$.

Le domaine d'un tel opérateur T peut être étendu à certaines mesures $\mu \in M^+$ à support non compact : si μ_K désigne la restriction de μ au compact K, et si les mesures $T\mu_K$ sont uniformément majorées sur tout compact, on notera $T\mu$ l'enveloppe supérieure des mesures $T\mu_K$; les axiomes (α) et (β) s'étendent à l'ensemble de ces mesures, ensemble qu'on appellera domaine de T.

On définit d'une manière évidente la somme d'un nombre fini de diffusions, la notion de série convergente de diffusions, et celle du produit de diffusions ; à noter que le produit TT', par exemple, n'est défini que si $T'(M_K^+)$ est contenu dans le domaine de T.

EXEMPLES.

1° Appelons B l'ensemble des fonctions numériques sur E qui sont intégrables par rapport à toute mesure de M_K, appelons B_K l'ensemble des fonctions de B qui sont nulles hors d'un compact ; mettons en dualité les espaces vectoriels M

---

(1) Les résultats de cet exposé ont été en grande partie obtenus en collaboration avec G. CHOQUET (Institute for Advanced Study, Novembre 1955). Ils constituent une adaptation au cas de la "composition de Volterra" des propriétés des noyaux élémentaires de convolution (voir [2]) ; une étude analogue a été faite récemment par J. L. DOOB [3], d'un point de vue probabiliste (voir la remarque finale).

(2) Il s'agit de la première définition donnée par G. CHOQUET [1], très générale (et même le plus souvent trop générale), mais bien adaptée au cadre de cet exposé, les propriétés topologiques de l'espace E n'intervenant à peu près pas.

et B_K d'une part, M_K et B d'autre part, par les formes bilinéaires $(f, \mu) = \int f \, d\mu$; soit T une application linéaire positive de M_K dans M, continue pour les topologies $\sigma(M_K, B)$ et $\sigma(M, B_K)$; l'application T (ou plutôt sa restriction à M_K^+) est une diffusion, dite universellement mesurable. Si on remplace B par l'ensemble des fonctions continues et B_K par l'ensemble des fonctions continues à support compact, on obtient les diffusions dites continues.

2° Si f est une fonction ≥ 0 de B, l'application $\mu \to f\mu$ est une diffusion mesurable dont le domaine est M^+ tout entier (cette diffusion est continue si f est continue).

Cas particulier : si f est la fonction caractéristique d'un ensemble universellement mesurable e, la diffusion associée n'est autre que l'opérateur de restriction à e ; si $e = E$, il s'agit de l'opérateur identique, noté I.

3° Si E est un groupe abélien localement compact, et si N est une mesure ≥ 0 sur E, l'opérateur de convolution par N, $\mu \to N * \mu$, est une diffusion dont le domaine est l'ensemble des mesures $\mu \geq 0$ telles que $N * \mu$ ait un sens ; cette diffusion est continue.

DÉFINITION 2. - Si T est une diffusion, toute mesure u appartenant au domaine de T et telle que $Tu \leq u$ (resp. $Tu = u$) est dite T-surharmonique (resp. harmonique).

La mesure positive $\mu = u - Tu$ est appelée mesure associée à la mesure surharmonique u ; on l'écrira $\mu = (I - T)\, u$.

Si u est surharmonique, Tu appartient au domaine de T ; la suite de mesures surharmoniques u_n définie par $u_0 = u$, $u_{n+1} = Tu_n$ $(n \geq 0)$ est décroissante, donc elle converge [3] vers une mesure h satisfaisant à $h = Th$; cette mesure est appelée partie harmonique de u.

Une mesure T-surharmonique u dont la partie harmonique est nulle sera dite surharmonique pure. Toute mesure T-surharmonique est évidemment la somme d'une mesure surharmonique pure et d'une mesure harmonique, et cette décomposition est unique.

---

(3) La seule notion de convergence de mesures utilisée dans cet exposé est la suivante : la suite de mesures $\mu_n \geq 0$ converge vers μ si, pour tout ensemble universellement mesurable e, $\mu_n(e)$ tend vers $\mu(e)$; c'est beaucoup plus fort que la convergence vague.

Toute mesure surharmonique majorée par une mesure surharmonique pure est évidemment surharmonique pure ; l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de mesures surharmoniques est évidemment surharmonique.

DÉFINITION 3. - Un noyau-diffusion est dit élémentaire s'il est de la forme

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

où T est une diffusion telle que T^n ait un sens pour tout $n > 0$ et que la série converge.

T^n représente évidemment le produit de n diffusions identiques à T, et T^0 la diffusion identique I.

Si la mesure $\mu \geq 0$ appartient au domaine de G, sa transformée $G\mu$ sera appelée le G-potentiel engendré par μ.

Les 5 théorèmes suivants peuvent être considérés comme les résultats fondamentaux de la théorie du potentiel par rapport à un noyau élémentaire $G = \Sigma T^n$ donné une fois pour toutes. Leurs démonstrations sont remarquablement simples ; elles reposent sur la formule immédiate :

$$(1) \qquad G = I + GT = I + TG \quad .$$

Il est bien entendu qu'on ne considère que des mesures surharmoniques ≥ 0 et des potentiels de mesures ≥ 0.

THÉORÈME 1 (Principe d'unicité des masses). - La relation $G\mu = G\nu$ entraîne $\mu = \nu$.

C'est évident, car si μ appartient au domaine de G, on a, d'après (1), $\mu = (I - T)\, G\mu$.

THÉORÈME 2 (Décomposition de Riesz). - Toute mesure T-surharmonique admet une décomposition unique $u = G\mu + h$, où $\mu \in M^+$ et h est harmonique ; $\mu = (I - T)\, u$ est la mesure associée à u, et $h = \lim\limits_{n \to \infty} T^n u$ est la partie harmonique de u.

Posons en effet $\mu = (I - T)\, u \geq 0$; on a évidemment

$$u - T^n u = \sum_{k=0}^{n-1} T^k \mu \qquad ;$$

la suite $T^n u$ est décroissante, donc converge (cf. note [3]) vers une mesure h qui n'est autre que la partie harmonique de u, d'où la décomposition annoncée ; l'unicité de cette décomposition se vérifie immédiatement en appliquant l'opérateur T^n aux deux membres, et en observant que, si μ appartient au domaine de G, on a $\lim_{n \to \infty} T^n G\mu = 0$.

COROLLAIRES.

1° Les G-potentiels sont les mesures T-surharmoniques pures, c'est-à-dire les mesures T-surharmoniques satisfaisant à $\lim_{n \to \infty} T^n u = 0$.

2° Toute mesure T-surharmonique majorée par un G-potentiel est un G-potentiel.

3° La limite d'une suite monotone de potentiels $G\mu_n$ majorés par un potentiel fixe est un potentiel $G\mu$, et μ_n converge (cf. note [3]) vers μ.

Seul le corollaire 3 mérite une brève démonstration ; la limite d'une suite monotone de mesures T-surharmoniques étant évidemment T-surharmonique, la limite de $G\mu_n$ est, d'après le corollaire 2, un potentiel $G\mu$; la suite $TG\mu_n$ est monotone et converge vers $TG\mu$; d'après la formule (1), $\mu_n = G\mu_n - TG\mu_n$ converge vers $\mu = G\mu - TG\mu$.

THÉORÈME 3 (Principe de l'enveloppe inférieure). - L'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de G-potentiels est un G-potentiel.

Cela résulte immédiatement du corollaire 2 et du fait que l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de mesures T-surharmoniques est T-surharmonique.

THÉORÈME 4 (Principe de domination pour potentiels de mesures). - Soit $u = G\mu$ un potentiel ; soit v une mesure T-surharmonique ; soit e un ensemble universellement mesurable dont le complémentaire est de mesure nulle pour μ. Si la restriction de u à e est $\leq v$, alors $u \leq v$.

En effet $w = \inf(u, v)$ est un G-potentiel (théorème 3), soit $G\nu$, dont la restriction à e coïncide avec celle de $G\mu$. Comme $Tw \leq Tu$, on a, d'après (1), $w - \nu \leq u - \mu$; comme les restrictions à e de u et w sont identiques, et comme μ est portée par e, on a $\mu \leq \nu$, d'où finalement $G\mu \leq G\nu = w \leq v$.

Il s'agit là d'un énoncé très particulier aux noyaux élémentaires ; on sait que le noyau newtonien, par exemple, (considéré comme opérateur de diffusion) satisfait à un principe de domination dont l'énoncé doit comporter des hypothèses plus fortes.

THÉORÈME 5 (Principe du balayage). - Etant donnés un potentiel $G\mu$ et un ensemble universellement mesurable e, il existe une mesure $\mu' \geqslant 0$ et une seule telle que

(a) μ' est portée par e.

(b) les restrictions de $G\mu$ et de $G\mu'$ à e sont identiques.

(c) $G\mu' \leqslant G\mu$.

L'unicité d'une telle μ' résulte des théorèmes 1 et 4 ; on va donner deux démonstrations de l'existence.

Première démonstration. - Soit u' l'enveloppe inférieure des mesures surharmoniques v telles que $v \geqslant G\mu$ sur e (i. e. telles que la restriction de v à e majore celle de $G\mu$) ; u' est un potentiel $G\mu'$ (corollaire 2 du théorème 2) satisfaisant à (b) et (c) ; il reste à prouver que μ' est portée par e.

A cet effet, appelons μ'_e et μ'' les restrictions de μ' à e et au complémentaire de e, et posons $\nu = \mu'_{e} + T\mu''$; d'après (1), on a $G\nu = G\mu' - \mu''$, donc $G\nu$ possède les propriétés (b) et (c) de $G\mu'$; comme $G\mu'$ est le plus petit potentiel ayant ces propriétés, on a nécessairement $\mu'' = 0$, d'où le résultat.

Deuxième démonstration. - Appelons R l'opérateur de restriction à l'ensemble e. Posons $\mu_0 = \mu$ et définissons une mesure μ_n par récurrence :

$$\mu_{n+1} = R\mu_n + T(I - R)\,\mu_n \qquad (n \geqslant 0) \quad .$$

Appliquons l'opérateur G aux deux membres de cette relation ; il vient, d'après (1) :

$$G\mu_{n+1} = G\mu_n - (I - R)\,\mu_n \quad ,$$

donc les restrictions des $G\mu_n$ à e sont toutes égales à la restriction de $G\mu$ on a $G\mu_{n+1} \leqslant G\mu$, et la suite $G\mu_n$ est décroissante. Donc (corollaire 3 du théorème 2) $G\mu_n$ converge vers un potentiel $G\mu'$ satisfaisant à (b) et (c), et μ' est la limite de μ_n. Pour démontrer que μ' est portée par e, observons qu'on a, d'après la récurrence :

$$\mu_n = R\sum_{k=0}^{n-1} (T(I - R))^k \mu + (T(I - R))^n \mu \quad ;$$

or $(T(I - R))^n\,\mu \leqslant T^n\,\mu$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini, car μ

appartient au domaine de G ; donc la mesure $\mu' = \lim \mu_n$ s'écrit

$$(2) \qquad \mu' = R \sum_{n=0}^{\infty} (T(I-R))^n \mu$$

ce qui prouve bien qu'elle est portée par e .

Cette seconde démonstration a l'avantage de donner une expression explicite de la mesure balayée μ' ; observer que l'opérateur de balayage sur e , $B = R \sum (T(I-R))^n$ se présente lui-même comme un noyau-diffusion élémentaire, multiplié à gauche par l'opérateur de restriction R . Le domaine de B peut d'ailleurs être strictement plus grand que celui de G .

On va compléter l'étude du balayage par celle, plus générale, de l'extrémisation d'une mesure T-surharmonique, où T est une diffusion donnée à laquelle n'est pas nécessairement associé un noyau élémentaire.

THÉORÈME 6. - Soit u une mesure T-surharmonique et soit e un ensemble universellement mesurable ; parmi toutes les mesures T-surharmoniques qui majorent u sur l'ensemble e , il en existe une plus petite que toutes les autres, la mesure

$$(3) \qquad u' = \sum_{n=0}^{\infty} ((I-R)T)^n Ru \qquad (^4)$$

où R est l'opérateur de restriction à l'ensemble e ; la mesure $(I-T)u'$ associée à u' est portée par e .

Si le noyau élémentaire $G = \sum T^n$ associé à T existe, u' est un G-potentiel dans au moins deux cas :

1° u est un G-potentiel ;

2° e est relativement compact.

DÉMONSTRATION. - Posons $u_0 = Ru$ et

$$u_{n+1} = (R + (I-R)T)\, u_n \qquad (n \geqslant 0) \qquad .$$

On vérifie par récurrence que les u_n sont toutes majorées par u , leurs restrictions à e sont identiques à celles de u , et on a

(4) Le symbole $((I-R)T)^n Ru$ ne signifie pas nécessairement ici que les itérées de la diffusion $(I-R)T$ existent ; il représente la mesure v_n définie par $v_0 = Ru$, $v_{n+1} = (I-R)Tv_n$ $(n \geqslant 0)$.

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} ((I - R)T)^k Ru \qquad \text{(cf. note (4))}$$

donc u_n croit vers la mesure u' définie par la série (3) qui se trouve être convergente, et on a $u' \leqslant u$, $u' = u$ sur e .

Montrons que u' est surharmonique (les u_n ne le sont pas en général) ; d'après la convergence de la série (3) on a

$$(I - (I - R)T)\, u' = Ru \qquad ;$$

or $Tu' \leqslant Tu \leqslant u$ (car $u' \leqslant u$ et u est T-surharmonique) ; donc $RTu' \leqslant Ru$ et on a $(I - T)\, u' = Ru - RTu' \geqslant 0$, ce qui prouve non seulement que u' est T-surharmonique mais encore que la mesure associée est portée par e .

Comme u' ne dépend que de Ru , restriction de u à e , c'est la plus petite mesure surharmonique égale à u sur e .

Supposons enfin que le noyau élémentaire $G = \Sigma\, T^n$ existe. Si u est un G-potentiel $G\mu$, u' n'est autre que le potentiel balayé $G\mu'$, car u' satisfait aux propriétés caractéristiques de G (voir énoncé du théorème 5). Si enfin e est relativement compact, ou plus généralement si Ru appartient au domaine de G , u' est, d'après l'expression (3), majorée par le potentiel engendré par la mesure Ru ; c'est donc un potentiel (corollaire 2 du théorème 2).

REMARQUE. - <u>La mesure</u> $\mu' = (I - T)\, u'$ <u>associée à la mesure "extrémisée"</u> u' <u>est donnée par</u>

$$\mu' = R \sum_{n=0}^{\infty} (T(I - R))^n \mu + R \lim_{n \to \infty} (T(I - R))^n h \qquad (4) \quad ([5])$$

<u>où</u> $\mu = (I - T)\, u$ <u>est la mesure associée à</u> u , <u>et</u> h <u>la partie harmonique de</u> u .

Voici le principe de la démonstration : d'après (3) on peut écrire (en prenant quelques précautions à cause du symbolisme employé) :

$$u' = Ru + (I - R) \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} (T(I - R))^k (T - T(I - R))\, u$$

d'où facilement

([5]) Les symboles $(T(I - R))^n \mu$ et $(T(I - R))^n h$ ne signifient pas nécessairement que les itérées de la diffusion $T(I - R)$ existent ; ils représentent des mesures définies d'une manière évidente (voir la note précédente).

$$u' = u - (I - R) \sum_{k=0}^{\infty} (T(I - R))^k \mu - (I - R) \lim_{n \to \infty} (T(I - R))^n u \quad .$$

Si h et v sont les parties harmonique et surharmonique pure de u, on a

$$\lim_{n \to \infty} (T(I - R))^n u = \lim_{n \to \infty} (T(I - R))^n h \quad ,$$

car

$$\lim_{n \to \infty} (T(I - R))^n v \leqslant \lim_{n \to \infty} T^n v = 0 \quad .$$

La formule (4) se déduit alors très facilement de la relation précédente et de la définition $\mu' = (I - T)\, u'$.

Observons pour finir que si le noyau élémentaire $G = \Sigma T^n$ existe, et si u est un potentiel $G\mu$, la mesure μ' associée à u' n'est autre que la balayée de μ sur e, et on vérifie bien que la formule (4) se réduit alors à la formule (2).

II. Potentiels de fonctions.

On supposera désormais que l'espace localement compact E est <u>dénombrable à l'infini</u>. On notera B^+ l'ensemble des fonctions numériques $\geqslant 0$ intégrables par rapport à toute mesure de Radon à support compact (ce sont donc les fonctions $\geqslant 0$ universellement mesurables bornées sur tout compact) ; B_K^+ désignera l'ensemble des fonctions de B^+ qui sont nulles en dehors d'un compact.

DÉFINITION 4. - <u>On appellera noyau transposé de diffusion toute application</u> S <u>de</u> B_K^+ <u>dans</u> B^+ <u>satisfaisant aux axiomes suivants</u> :

(α') $\quad Saf = a\, Sf \; , \quad \forall \; a \in \mathbb{R}^+$

(β') <u>Si</u> $\quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; , \qquad Sf = \sum_{n=1}^{\infty} Sf_n \quad .$

Le domaine de l'opérateur S peut être étendu à certaines fonctions $f \in B^+$ qui ne sont pas nulles hors d'un compact : si la fonction F (mesurable en vertu de l'hypothèse de dénombrabilité à l'infini) définie par $F(x) = \sup Sg(x)$, g parcourant l'ensemble des fonctions de B_K^+ majorées par f, est dans B^+, on posera $Sf = F$. Les axiomes (α') et (β') sont encore vérifiés lorsqu'on y considère des fonctions de ce domaine.

EXEMPLES.

1° La restriction à B_K^+ d'une application linéaire positive de B_K dans B, continue pour les topologies $\sigma(B_K, M)$ et $\sigma(B, M_K)$, est une transposée de diffusion. Un tel opérateur est le transposé, au sens de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques, d'une diffusion mesurable définie dans la première partie (exemple 1) ; ce cas est le plus important dans la pratique et justifie la terminologie.

2° Si φ est une fonction de B^+, l'application $f \to f\varphi$ est un noyau transposé de diffusion, dont le domaine est B^+.

3° Si N est une mesure $\geqslant 0$ sur un groupe abélien localement compact E, l'application $f \to f * N$ définit un noyau transposé de diffusion, le transposé de la diffusion continue $\mu \to \check{N} * \mu$, où $\check{N}$ désigne la mesure symétrique de N par rapport à l'origine.

On définit aisément la somme, le produit (dans certains cas) et la notion de série convergente de noyaux transposés de diffusions. Si S est un noyau transposé de diffusion, toute fonction $u \in B^+$ appartenant au domaine de S et telle que $Su \leqslant u$ (resp. $Su = u$) est dite S-surharmonique (resp. harmonique). Par analogie avec ce qui a été fait pour les mesures surharmoniques, on définit, pour toute fonction S-surharmonique, une partie harmonique et une partie surharmonique pure.

Un noyau transposé de diffusion est dit élémentaire s'il est de la forme $G = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n$; si la fonction f appartient au domaine de G, on dit que Gf est le G-potentiel engendré par la fonction f. Les énoncés et démonstrations de la première partie, concernant la théorie du potentiel par rapport à un noyau-diffusion élémentaire, s'adaptent immédiatement au cas des noyaux transposés de diffusion, à quelques détails près qu'on va signaler.

Aucune modification pour l'adaptation du théorème 1 (principe d'unicité de la fonction engendrant un potentiel donné) et du théorème 2 et ses corollaires (décomposition unique d'une fonction surharmonique en la somme d'un potentiel de fonction et d'une fonction harmonique). A noter toutefois qu'il s'agit là d'un résultat très particulier aux noyaux élémentaires, et qu'il n'existe aucun énoncé analogue en théorie newtonienne, par exemple : en effet la partie surharmonique pure d'une fonction surharmonique (au sens classique) positive n'est pas en général le potentiel d'une <u>fonction</u>, mais celui d'une mesure.

L'analogue du théorème 3 (principe de l'enveloppe inférieure) ne peut être énoncé que dans le cas des familles dénombrables, afin que cette enveloppe inférieure soit mesurable ; on en déduit l'analogue du théorème 4 (principe de domination pour fonctions) : si $u = Gf$ est le potentiel engendré par la fonction f, et si v est une fonction S-surharmonique telle que $u(x) \leq v(x)$ en tout point x tel que $f(x) \neq 0$, on a $u \leq v$.

On peut encore énoncer un principe du balayage pour les potentiels de fonctions (analogue au théorème 5), mais la première des démonstrations données dans la première partie ne convient pas, car on y avait considéré l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque (pas nécessairement dénombrable) de mesures surharmoniques ; par contre la seconde démonstration s'adapte mot à mot. La fonction f', balayée de la fonction f sur l'ensemble universellement mesurable e, est la fonction

$$f' = R \sum_{n=0}^{\infty} (S(I - R))^n f$$

où R est l'opérateur de restriction à e (i. e. la multiplication par la fonction caractéristique de e).

On énoncera l'adaptation du théorème 6 dans un cas particulier intéressant. Disons que S est sous-markovien (resp. markovien) si la constante 1 est S-surharmonique (resp. harmonique). Alors :

THÉORÈME 7 (Principe de l'équilibre). - Soit S un opérateur transposé de diffusion, sous-markovien ; soit e un ensemble universellement mesurable ; parmi les fonctions S-surharmoniques prenant la valeur 1 en tout point de e, il en existe une plus petite que toutes les autres, la fonction

$$(6) \qquad u_e = \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - \psi_e)S)^n \psi_e$$

où ψ_e est la fonction caractéristique de e ; la fonction associée $u_e - Su_e$ est nulle hors de e. Si le noyau élémentaire $G = \Sigma S^n$ existe et si e est relativement compact, u_e est un G-potentiel (potentiel d'équilibre de e).

REMARQUE. - Une diffusion T est dite sous-markovienne si, pour toute mesure $\mu \in M_K^+$, la masse totale de $T\mu$ est au plus égale à celle de μ. Un résultat qui est, d'un certain point de vue, dual du principe d'équilibre est le principe d'abaissement des masses par balayage : si $G = \Sigma T^n$ est le noyau élémentaire construit à partir d'une diffusion sous-markovienne T, la masse totale de la balayée de toute $\mu \in M_K^+$ sur n'importe quel ensemble universellement mesurable e est au plus égale à la masse totale de μ.

Interprétations probabilistes. - Supposons l'espace E à base dénombrable ; appelons U la tribu des ensembles universellement mesurables sur E. Soit p une application de $E \times U$ dans $\bar{R}^+$ telle que

- l'application $x \to p(x, e) \in B^+$, $\forall e \in U$ relativement compact ;
- l'application $e \to p(x, e) \in M^+$, $\forall x \in E$.

Une telle application p sera appelée fonction de transition sur E ; on peut lui associer biunivoquement une diffusion mesurable $T(T\mu(e) = \int p(x, e)\, d\mu(x))$ et une transposée de diffusion $S(Sf(x) = \int p(x, dy)\, f(y))$; p est dite sous-markovienne si $p(x, E) \leqslant 1$, $\forall x \in E$ (i. e. si la diffusion associée T ou sa transposée S est sous-markovienne).

Étant donnée une fonction de transition sous-markovienne p et une mesure $\mu \geqslant 0$ de masse totale 1 sur E, on sait qu'il existe un processus de Markov discret X_n $(n \geqslant 0)$ à valeurs dans E, admettant μ comme loi initiale et p comme probabilité de transition. Un tel processus est à durée de vie $\leqslant \infty$.

La considération de tels processus permet de donner, dans le cas des opérateurs sous-markoviens, des interprétations probabilistes simples de la plupart des résultats obtenus ; par exemple, il est à peu près évident que la valeur en x de la fonction u_e définie par la formule (6) est la probabilité pour qu'un processus partant de x (i. e. ayant pour loi initiale la mesure ε_x) rencontre l'ensemble e.

Nous renvoyons à l'article déjà cité de J. L. DOOB [3] pour ces interprétations et pour des démonstrations probabilistes des résultats de cet exposé (dans le cas sous-markovien). Pour une étude plus générale (cas des processus dépendant d'un paramètre continu) nous renvoyons aux mémoires fondamentaux de G. HUNT [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET (Gustave). - Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrêmaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki, 2e éd., t. 9, 1956/57, n° 139, 15 p.

[2] DENY (Jacques). - Familles fondamentales, Noyaux associés, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 3, 1951, p. 73-101.

[3] DOOB (J. L.). - Discrete potential theory and boundaries, J. of Math. and Mech., t. 8, 1959, p. 433-458.

[4] HUNT (G. A.). - Markoff processes and potentials I, II, III, Illinois J. of Math., t. 1, 1957, p. 44-93 et 316-369 ; t. 2, 1958, p. 151-213.