Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

Gottfried Anger

Sur le rôle des potentiels continus dans les fondements de la théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 2 (1958), exp. n° 3, p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958__2__A3_0>

SUR LE RÔLE DES POTENTIELS CONTINUS DANS LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DU POTENTIEL ([1])

par Gottfried ANGER

1. Introduction.

Dans cet exposé nous développons une méthode en partie nouvelle pour la théorie du potentiel. La considération des potentiels continus est fondamentale. A l'aide d'une transformation appropriée il est possible de transformer des problèmes de la théorie du potentiel en des problèmes relatifs à des espaces vectoriels topologiques. Nous trouvons sur l'ensemble des potentiels continus et sur l'ensemble des mesures une forme bilinéaire. Cela permet d'introduire des topologies adaptées à la théorie du potentiel. Nous appliquons, par exemple, les théorèmes de Hahn-Banach et Banach-Steinhaus. En se limitant aux mesures avec une norme finie, les considérations deviennent très simples. Dans ce cas les problèmes de la théorie du potentiel sont transformés en des problèmes de l'espace des fonctions continues. Nous y avons été amenés par des problèmes de mathématiques appliquées.

I. Considérations sur le noyau newtonien.

2. D'abord nous nous occupons de l'espace R^n et du noyau newtonien. Plus tard les théorèmes obtenus seront employés pour une axiomatique générale.

Soit $E = R^n$ l'espace euclidien à n dimensions, Φ le noyau newtonien,

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \text{ pour } x \neq y \text{ et } \Phi(x, y) = +\infty \text{ pour } x = y, \ n \geq 3,$$

$K \subset E$ un ensemble compact, $B \subset E$ un ensemble borélien, $\mathfrak{K}(E)$ l'espace vectoriel

---

([1]) Ce travail qui développe la conférence faite au Séminaire a été particulièrement favorisé par une bourse accordée par le Centre National de la Recherche Scientifique et c'est à Monsieur le Professeur M. BRELOT que j'adresse l'expression de ma gratitude la plus sincère pour l'intérêt et l'assistance qu'il a apportés à mes études.

des fonctions numériques finies continues dans E et à support compact, μ une mesure de Radon, $S\mu$ le support de μ,

$$T\mu(x) = \int^* \Phi(x, y)\, d\mu(y), \quad \mu \geq 0 \quad .$$

Nous employons l'intégrale selon N. BOURBAKI [4].

Nous indiquons d'abord les théorèmes les plus importants pour le noyau newtonien. Ensuite nous étudierons une axiomatique générale.

THÉORÈME A_1. - Il existe une mesure positive $\lambda \neq 0$ à support compact S_λ, telle que $x \to T\lambda(x)$ soit (finie) continue dans E.

Cette propriété est triviale pour le noyau newtonien. Nous considérons par exemple le potentiel

$$T\mu(x) = \int^* \Phi(x, y)\, d\mu(y) = \int_{K_n} \Phi(x, y)\, dS(y) \quad .$$

L'intégration doit être considérée sur la sphère $K_n = \{y : |x_0 - y| = R\}$. Nous avons par exemple dans R^3

$$T\mu(x) = \frac{4\pi R^2}{|x - x_0|} \quad \text{pour} \quad |x - x_0| \geq R \quad \text{et} \quad T\mu(x) = 4\pi R \quad \text{pour} \quad |x - x_0| \leq R .$$

On introduit les notions suivantes

$$F^+ = \{\lambda : \lambda \geq 0, \ S_\lambda \text{ compact et } x \to T\lambda(x) \text{ finie continue}\}$$

$$F = \{\lambda : \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \ \lambda_1, \lambda_2 \in F^+\} ,$$

$$D^+ = \{f : f = T\lambda, \ \lambda \in F^+\} ,$$

$$D = \{f : f = T\lambda, \ \lambda \in F\}$$

F et D sont des espaces vectoriels.

THÉORÈME A_2. - Soit $B \subset E$ un ensemble borélien, tel qu'il existe une $\lambda \in F^+$ avec $\lambda(B) \neq 0$. Alors il existe une $\lambda_0 \in F^+$, telle que $S_{\lambda_0} \subset B$ et $\lambda_0(B) \neq 0$.

Ce théorème résulte du théorème A_2'. Nous désignons par λ_K la restriction de la mesure λ sur K,

$$\lambda_K(f) = \int \varphi_K f \, d\lambda \quad ,$$

où φ_K est la fonction caractéristique de K.

THÉORÈME A_2'. - Soit $\lambda \in F^+$ et K un ensemble compact. Alors on a $\lambda_K \in F^+$.

Pour démontrer ce théorème, nous nous basons sur le fait que, pour toute μ positive le potentiel $T\mu$ est une fonction semi-continue inférieurement (s. c. i.).

Soit λ_1 la restriction de $\lambda \in F^+$ sur K, λ_2 la restriction de λ sur E - K ou CK. Alors on a :

$$T\lambda(x) = T\lambda_1(x) + T\lambda_2(x) \quad .$$

Donc $T\lambda_1 = T\lambda + (-T\lambda_2)$ est une fonction semi-continue supérieurement et puisqu'elle est également s. c. i., $T\lambda_1$ doitêtre continue, c'est-à-dire $\lambda_1 \in F^+$ (et $\lambda_2 \in F^+$).

Nous démontrons maintenant encore le théorème A_2. Soit $B \subset E$ un ensemble borèlien et $\lambda \in F^+$ une mesure à $\lambda(B) \neq 0$. Alors il existe un sous-ensemble $K \subset B$ (N. BOURBAKI [4]), tel que $\lambda(K) \neq 0$. Soit λ_K la restriction de λ sur K. Nous avons $\lambda_K \in F^+$, $S_{\lambda_K} \subset B$ et $\lambda_K(B) \neq 0$.

Les théorèmes A_1 et A_2, resp. les théorèmes A_1 et A_2', sont la base de l'axiomatique ultérieure. A l'aide de ces deux théorèmes servant d'axiomes on peut déjà établir une axiomatique large de la théorie du potentiel. Les autres axiomes, les théorèmes suivants A_3, A_4 et A_5 n'ont pas la même importance.

Avant d'expliciter les théorèmes A_3, A_4 et A_5 nous nous occupons des théorèmes suivants.

THÉORÈME B_1. - <u>Soit $\mu \geq 0$. Pour qu'un potentiel $T\mu$ ne soit pas identiquement infini, il faut et il suffit que $T\mu$ soit intégrable pour toute $\lambda \in F^+$. Nous avons $\int T\lambda \, d\mu = \int T\mu \, d\lambda$.</u>

THÉORÈME B_2. - <u>Si deux mesures positives μ_1 et μ_2 sont telles que $\int T\mu_1 \, d\lambda = \int T\mu_2 \, d\lambda$ pour toute $\lambda \in F^+$, les mesures μ_1 et μ_2 sont identiques.</u>

Ces deux théorèmes ont été démontrés par H. CARTAN en supposant même seulement que les λ sont les distributions uniformes sur les sphères. Les distributions sphériques sont un sous-ensemble de F. La démonstration du théorème B_1 correspond alors exactement à la démonstration de H. CARTAN. $\int T\mu \, d\lambda = \int T\lambda \, d\mu$ résulte du théorème de Fubini. Le théorème B_2 peut déjà être démontré à l'aide des distributions sphériques. Il en résulte le théorème pour toute $\lambda \in F$.

De plus on introduit les notations suivantes

$$G^+ = \{\mu : \mu \geq 0 \text{ et } T\mu \not\equiv \infty\}, \quad G = \{\mu : \mu = \mu_1 - \mu_2 , \mu_1 , \mu_2 \in G^+\}$$

$$H = \{\mu : \mu \in G \text{ et } \|\mu\| = \sup_{\|f\| \leq 1, f \in \mathcal{K}(E)} |\mu(f)| < +\infty\} \quad .$$

Soit C l'espace formé des fonctions continues sur $E = R^n$ tendant vers 0 lorsque x tend vers le point à l'infini ω (avec la norme $\|f\| = \sup |f(x)|$). On a le théorème suivant.

THÉORÈME A_3. - Quelle que soit $\mu_1 \neq 0$ dans G, il existe $T\lambda_1 \in D$ tel que $\int T\lambda_1 \, d\mu_1 \neq 0$, quel que soit $T\lambda_2 \neq 0$ dans D, il existe $\mu_2 \in G$, telle que $\int T\lambda_2 \, d\mu_2 \neq 0$.

Supposons qu'il n'existe pas de $T\lambda_1 \in D$ avec $\int T\lambda_1 \, d\mu_1 \neq 0$ pour une $\mu_1 \in G$. Alors on a $\int T\lambda \, d\mu_1 = 0$ pour toute $T\lambda \in D$ ou $\int T\lambda \, d\mu_1^+ = \int T\lambda \, d\mu_1^-$ pour tout $T\lambda \in D$. En vertu du théorème B_2 nous avons immédiatement $\mu_1^+ = \mu_1^-$ ou $\mu_1 = 0$. Donc il existe au moins une $T\lambda_1$ avec $\int T\lambda_1 \, d\mu_1 \neq 0$. Soit maintenant $T\lambda_2 \neq 0$. Alors il y a un point x_0 avec $T\lambda_2(x_0) \neq 0$. Soit ε_{x_0} la masse unité placée au point x_0. Pour elle on a $\int T\lambda_2 \, d\varepsilon_{x_0} = T\lambda_2(x_0) \neq 0$. On a cependant $\varepsilon_{x_0} \in G$. Ainsi le théorème est complètement démontré.

THÉORÈME A_4. - Pour tout $T\lambda \in D$, nous avons $T\lambda \to 0$ pour $x \to \omega$.

Puisque :

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{|x - y|^{n-2}} \to 0 \quad \text{pour} \quad y \to \omega$$

on a

$$|T\lambda(x)| = \left|\int \Phi(x, y) \, d\lambda(y)\right| \leq \|\lambda\| \sup_{x \in S_\lambda} |\Phi(x, y)| \to 0 \quad \text{pour} \quad y \to \omega .$$

THÉORÈME A_5. - Soit K un ensemble compact ayant la propriété qu'il existe une $\lambda \in F$ avec $S_\lambda \subset K$ et $\lambda \neq 0$. Alors il existe pour tout $a > 0$ une $\lambda_0 \in F$ avec $S_{\lambda_0} \subset K$ et $T\lambda_0(x) \geq a$ sur K.

En prenant pour λ_1, l'un non nul de λ^+ ou λ^- on voit que $T\lambda_1(x)$ est fini continu > 0, d'où, à cause de la compacité de K, l'existence d'un nombre $N > 0$, tel que

$$T\lambda_1(x) \geq N \quad \text{pour tout} \quad x \in K .$$

En multipliant par un nombre convenable, nous obtenons une λ_0 répondant à la question.

Maintenant nous démontrerons encore trois théorèmes importants.

THÉORÈME B_3. - $(T\lambda, \mu) \to \int T\lambda \, d\mu$ <u>est une forme bilinéaire sur</u> $D \times G$. <u>Les espaces vectoriels</u> D <u>et</u> G <u>sont en dualité.</u>

De propriétés de l'intégrale il résulte immédiatement, que $(T\lambda, \mu) \to \int T\lambda \, d\mu$ sur $D \times G$ est une forme bilinéaire. Par suite du théorème A_3 les espaces D et G sont en dualité. Ainsi on obtient une connexion avec les espaces vectoriels topologiques. Maintenant on peut appliquer les théorèmes des espaces en dualité à la théorie du potentiel.

Désignons par E^+ l'ensemble de toutes G^+ avec l'énergie finie $\int^* T\mu \, d\mu < \infty$

$$E^+ = \left\{ \mu : \mu \in G^+ \text{ et } \int^* T\mu \, d\mu < \infty \right\} .$$

Alors on a

THÉORÈME B_4. - <u>Tout potentiel</u> $T\mu$, $\mu \in E^+$, <u>est limite croissante de potentiels continus</u> $T\nu_n \in D$.

Soit $\mu \in E^+$ et $S\mu$ compact. Le potentiel $T\mu$ est s. c. i., donc mesurable pour μ. Nous pouvons appliquer le théorème de Lusin. Il existe pour tout $n > 0$ un ensemble compact $K_n \subset S_\mu$ avec

$$\mu(S\mu - K_n) < \frac{1}{n}, \quad K_n \subset K_{n+1} \subset S\mu$$

et tel que la restriction de $T\mu$ à K_n soit continue. On a alors

$$T\mu = T\nu_n + T(\mu - \nu_n) \quad ,$$

avec $\nu_n \geq 0$ et $\mu - \nu_n \geq 0$. $T\mu = T\nu_n + T(\mu - \nu_n)$ est la somme de deux fonctions s. c. i. ; chacune de ces dernières fonctions est donc continue sur K_n. Selon le théorème de Evans-Vasilesco $T\nu_n$ est continue dans tout l'espace E, $\nu_n \in F^+$ (le noyau newtonien est un noyau régulier). Soit de plus

$$M_n = K_n \setminus K_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad K_0 = \emptyset \text{ (2)}.$$

Introduisons la restriction λ_n de μ sur M_n. Nous avons évidemment $\lambda_i \in F^+$ et

$$T\nu_n = \sum_{i=1}^{n} T\lambda_i \quad .$$

Par construction ν_n croît et $\|\mu - \nu_n\| < \frac{1}{n}$.

Donc $T\mu = \lim T\nu_n = \sum_i^{\infty} T\lambda_i$

---

(2) Pour deux ensembles A, B nous notons $A \setminus B$ l'ensemble $A \cap CB$ noté souvent $A - B$, surtout si $A \supset B$.

Grâce au théorème B_4 il est maintenant possible d'établir la connexion avec les méthodes précédentes de la théorie du potentiel. On a le théorème fondamental

THÉORÈME B_5. - Pour qu'un ensemble borélien $B \subset E$ soit de capacité (intérieure) nulle (3) il faut et il suffit qu'il soit de mesure nulle pour toute $\lambda \in F^+$.

On connaît le critère CARTAN [8] que B soit de mesure nulle pour toute $\mu \in E^+$.

Démontrons maintenant que cette condition est équivalente à $\mu(B) = 0$ pour toute $\mu \in E^+$. Soit donc

$$\lambda(B) = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F^+ .$$

Alors on a pour toute $\mu \in E^+$ en vertu de $\mu(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(B)$, $\lambda_i \in F^+$ aussi $\mu(B) = 0$. De $\mu(B) = 0$ pour toute $\mu \in E^+$ il résulte à cause de $F^+ \subset E^+$, inversement

$$\lambda(B) = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F^+.$$

C'est H. CARTAN [8], qui a le premier employé les potentiels continus et plus tard aussi M. G. ARSOVE [2] pour démontrer un théorème de convergence général sur les fonctions sous-harmoniques. La caractérisation des ensembles de capacité nulle suivant le théorème B_5 a été indiquée indépendamment du travail de l'auteur [1] par G. CHOQUET [9] et [10]. G. CHOQUET et J. DENY [11] et [12] s'occupent également d'une axiomatique du principe du balayage. Des idées importantes pour le présent article se trouvent dans la thèse de l'auteur [1]

Tous les théorèmes, démontrés dans le deuxième chapitre de cet article, sont valables également pour le noyau newtonien.

II. Une axiomatique pour la théorie du potentiel.

3. Soit E un espace localement compact. Par un noyau positif sur E on comprend une application Φ de $E \times E$ dans $R^1_+ = \{x : 0 \leq x \leq +\infty\}$, mesurable en x et en y pour toute mesure de Radon et en (x, y) pour tout produit de

---

(3) La capacité d'un ensemble compact $K \subset R^n$ est la borne supérieure des $\mu(K)$ pour toutes les mesures portées par K et de potentiel $T\mu \leq 1$ partout. La capacité (intérieure) d'un ensemble $B \subset R^n$ est la borne supérieure des capacités des ensembles compacts contenus dans B.

mesures. Le potentiel $T\mu$ d'une mesure positive dans E est définie par

$$T\mu(x) = \int^* \Phi(x, y)\, d\mu(y) \quad ,$$

où $\int^* f d\mu$ est l'intégrale supérieure de f relative à μ . On a $0 \leq T\mu(x) \leq +\infty$. Nous considérons en outre le noyau Φ' , adjoint à Φ : $\Phi'(x, y) = \Phi(y, x)$. Le potentiel $T'\mu$ de Φ' relatif à une mesure positive μ est défini par

$$T'\mu(x) = \int^* \Phi'(x, y)\, d\mu(y) \quad .$$

Nous exigeons de Φ les axiomes suivants :

A_1 : Il existe une mesure positive $\lambda \neq 0$ à support compact S_λ , telle que $x \longrightarrow T\lambda(x)$ soit continue dans E .

Nous introduisons les ensembles suivants :

$$F^+ = \{\lambda : \lambda \geq 0 ,\ S_\lambda \text{ compact et } x \rightarrow T'\lambda(x) \text{ continue}\}$$
$$F = \{\lambda : \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 ; \lambda_1 , \lambda_2 \in F^+\}$$
$$D^+ = \{f : f = T'\lambda ,\ \lambda \in F^+\} , \quad D = \{f : f = T'\lambda ,\ \lambda \in F\}$$

F et D sont des espaces vectoriels.

A_2 : Soit $B \subset E$ un ensemble universellement mesurable c'est-à-dire mesurable pour toute mesure, tel qu'il existe une $\lambda \in F^+$ avec $\lambda(B) \neq 0$. Alors il existe une $\lambda_0 \in F^+$,telleque $S_{\lambda_0} \subset B$ et $\lambda_0(B) \neq 0$.

Soit

$$G^+ = \{\mu : \mu \geq 0 \text{ et } \int^* T'\lambda\, d\mu < +\infty \text{ pour toute } \lambda \in F^+\}$$
$$G = \{\mu : \mu = \mu_1 - \mu_2 ,\ \mu_1 , \mu_2 \in G^+\}$$

On a maintenant la proposition suivante :

PROPOSITION 1. - Toute mesure positive μ à support compact S_μ appartient à G^+ .

$T'\lambda$ est continu sur le support de μ . Il en résulte en vertu de la compacité de S_μ

$$\left| \int^* T'\lambda\, d\mu \right| \leq \|\mu\| \sup_{x \in S_\mu} |T'\lambda(x)| < \infty \quad .$$

DÉFINITION. - Pour tout compact $K \subset E$, la Φ'-capacité de K est la borne supérieure de $\lambda(K)$ pour toutes les mesures μ telles que

$$\lambda \in F^+ \ , \quad S_\lambda \subset K \quad \text{et} \quad T'\lambda(x) \leq 1 \quad \text{sur} \quad K \quad ,$$

la Φ'-capacité (intérieure) d'un ensemble $B \subset E$ est la borne supérieure des capacités des ensembles compacts contenus dans B .

A l'aide de l'axiome A_2 on a immédiatement

THÉORÈME 1. - Pour qu'un ensemble universellement mesurable $B \subset E$ soit de capacité nulle, il faut et il suffit qu'il soit de mesure nulle pour toute $\lambda \in F^+$.

Soit $B \subset E$ de capacité nulle. Supposons qu'il existe une $\lambda \in F^+$ avec $\lambda(B) \neq 0$. Alors on a suivant l'axiome A_2 une $\lambda_0 \in F^+$ avec $S_{\lambda_0} \subset B$ et $\lambda_0(E) \neq 0$. On a alors $T'\lambda_0(x) \leq M$ pour tout $x \in B$, ou $T'\lambda_1(x) \leq 1$ sur B , où on a pris $\lambda_1 = \frac{1}{M} \lambda_0$. Il en résulterait que B est de capacité positive. Inversement il résulte de $\lambda(B) = 0$ pour toute $\lambda \in F^+$, que B est de capacité nulle.

DÉFINITION. - "A peu près partout" (a. p. p.) signifie "sauf sur un ensemble universellement mesurable de mesure nulle pour toute $\lambda \in F^+$.

Par cela nous pouvons démontrer les théorèmes, connus pour le noyau newtonien.

THÉORÈME 2. - Toute réunion finie ou dénombrable d'ensembles universellement mesurables de capacité nulle a une capacité nulle.

Soit une telle réunion :

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \ . \ \text{De} \quad \lambda(B) = \lambda(\cup B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) \ , \ \text{où} \quad \lambda \in F^+ \ ,$$

résulte immédiatement que l'hypothèse $\lambda(B_i) = 0$ pour $i = 1 , 2 , \ldots$ entraîne $\lambda(B) = 0$.

THÉORÈME 3. - Soit $\mu \in G^+$. On a $T\mu(x) < \infty$ à peu près partout.

D'après l'hypothèse on a pour toute $\lambda \in F^+$ la relation $\int T'\lambda \, d\mu < \infty$. Il en résulte selon le théorème de Fubini

$$\int T'\lambda \, d\mu = \iint \Phi(x , y) \, d\lambda(y) \, d\mu(x) = \iint \Phi(x , y) \, d\mu(x) \, d\lambda(y) =$$
$$\int T\mu(y) \, d\lambda(y) < \infty \ .$$

Supposons $T\mu(x) = \infty$ sur un ensemble de capacité positive. Alors on a suivant l'axiome A_2 une $\lambda_0 \in F^+$ avec

$$S_{\lambda_0} \subset B = \{x : T\mu(x) = \infty\} \quad \text{et} \quad \lambda_0(B) \neq 0 \quad .$$

On en déduit $\int^* T\mu \, d\lambda_0 = \infty$, ce qui est contradictoire.

La proposition suivante se démontre également en employant l'axiome A_2 :

PROPOSITION 2. - Soit U une fonction mesurable pour toute mesure. Si l'on a

$$\int U \, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F^+ \text{ , il s'ensuit}$$

$$U = 0 \quad \text{à peu près partout.}$$

Nous démontrons la proposition indirectement.

Supposons $U(x) \neq 0$ sur un ensemble de capacité positive. Alors il faut que l'un des ensembles

$$B^+ = \{x : U(x) > 0\} \quad \text{ou} \quad B^- = \{x : U(x) < 0\} \quad ,$$

soit de capacité positive. Nous le supposerons pour B^+ . Il existe alors selon l'axiome A_2 une $\lambda_0 \in F^+$ avec $S_{\lambda_0} \subset B^+$ et $\lambda_0(B^+) \neq 0$. Il s'ensuit $\int U \, d\lambda_0 > 0$. Cela représente une contradiction avec l'hypothèse.

Nous introduisons encore l'axiome suivant :

A_3 : Quelle que soit $\mu_1 \neq 0$ dans G , il existe $T'\lambda_1 \in D$ tel que $T'\lambda_1 d\mu_1 \neq 0$; quel que soit $T'\lambda_2 \neq 0$ dans D , il existe $\mu_2 \in G$, telle que $\int T'\lambda_2 \, d\mu_2 \neq 0$.

L'axiome A_3 n'est pas nécessaire pour notre exposé. Il facilite la démonstration et assure l'unicité des problèmes traités. La deuxième exigence de l'axiome A_3 est réalisée. Pour tout $T'\lambda'_2 \neq 0$ il existe une $\mu_2 \in G$, telle qu'on ait $\int T'\lambda_2 \, d\mu_2 \neq 0$. Nous considérons un point x_0 avec $T\lambda_2(x_0) \neq 0$ et la masse unité $\varepsilon_{x_0} = \mu_2 \in G^+$ placée en point x_0 . On a alors

$$\int T'\lambda_2 \, d\varepsilon_{x_0} = \int T\varepsilon_{x_0} \, d\lambda_2 = T\lambda_2(x_0) \neq 0 \quad .$$

Si l'axiome A_3 n'est pas réalisé, il existe alors sur G la relation d'équivalence entre $\mu_1 , \mu_2 \in G$: $\int T'\lambda \, d\mu_1 = \int T'\lambda \, d\mu_2$ pour tout $T'\lambda \in D$. Par l'introduction d'un espace quotient il est possible d'employer les théorèmes relatifs aux espaces en dualité également dans ce cas (N. BOURBAKI [6], p. 53).

Remarquons que A_3 est équivalent à

A_3' : Considérons la forme bilinéaire $(T'\lambda, \mu) \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu$ sur $D \times G$; les espaces D et G sont en dualité (voir BOURBAKI [6], p. 48).

DÉFINITION. - On appelle topologie faible sur D la topologie la moins fine sur D rendant continues toutes les formes linéaires $(T'\lambda, \mu) \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu$ sur D lorsque μ parcourt G. On note cette topologie $\sigma(D, G)$. On définit de la même manière la topologie faible $\sigma(G, D)$ sur G.

On a le théorème suivant, qui est important pour la suite (N. BOURBAKI [6], p. 50).

THÉORÈME 4. - Toute forme linéaire sur D, continue pour $\sigma(D, G)$ peut s'écrire d'une seule manière $T'\lambda \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu$ pour une $\mu \in G$.

Nous voulons étudier ici le sous-ensemble $H \subset G$, qui se compose des éléments $\mu \in G$ avec $\|\mu\| < \infty$

$$H = \left\{ \mu : \mu \in G \text{ et } \|\mu\| < \infty \right\} .$$

H contient selon la proposition 1 toutes les mesures μ à support compact. Il peut arriver qu'on ait $H = G$.

Nous considérons encore l'espace de Banach $C(\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|)$ des fonctions continues f sur E, pour lesquelles on a $f(x) \longrightarrow 0$ pour $x \longrightarrow \omega$; où ω est le point d'Alexandrov.

PROPOSITION 3. - Toute forme linéaire $f \longrightarrow L(f)$ continue sur C peut s'écrire à l'aide d'une mesure μ avec $\|\mu\| < \infty$, $f \longrightarrow L(f) = \int f \, d\mu$. Inversement toute mesure μ avec $\|\mu\| < \infty$ produit une forme linéaire continue sur C.

L'ensemble $\mathcal{R}(E)$, ensemble de toutes fonctions continues dans E et à support compact, est dense dans C (N. BOURBAKI [4], p. 60). Soit $f \longrightarrow L(f)$ une forme linéaire continue sur C. Pour elle on a

$$|L(f)| \leq M \|f\| , \quad \|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)| .$$

$f \longrightarrow L(f)$ est également sur $\mathcal{R}(E)$ une forme linéaire pour laquelle on a $|L(f)| \leq M \|f\|$. Sur $\mathcal{R}(E)$

$$f \longrightarrow L(f) = \int f \, d\mu$$

est une mesure. Toute $f \in C$ est limite uniforme d'une suite (f_n), où $f_n \in \mathcal{R} \subset (E)$. Il en résulte $L(f) = \lim_{n \to \infty} L(f_n) = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \to \infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Soit $f \longrightarrow \int f \, d\mu$ avec $\|\mu\| < \infty$. On a alors selon les théorèmes de l'intégration

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \|\mu\| \, \|f\| \leq M \|f\| \quad ,$$

$f \longrightarrow \int f d\mu$ est une forme linéaire sur C.

Nous considérons dans cet exposé également des noyaux Φ qui satisfont non seulement aux axiomes A_1 et A_2 mais aussi à l'axiome A_4

A_4 : Pour tout $T'\lambda \in D$ on a $T'\lambda(x) \longrightarrow 0$ pour $x \longrightarrow \omega$. Dans ce cas D est alors un sous-espace de C. Il est intéressant de savoir, si $\bar{D} = C$ (l'adhérence de D relative à la topologie forte de C) ou si $\bar{D} \neq C$. Dans le cas $\bar{D} = C$, les problèmes considérés sont uniques, dans le cas $\bar{D} \neq C$ en général, ils ne sont pas uniques. On trouvera plus de détails plus loin.

4. Pour un noyau Φ satisfaisant aux axiomes A_1, A_2 et A_3, nous pouvons déjà démontrer un théorème de convergence très général. Comme on l'a déjà indiqué pour l'axiome A_3, l'axiome A_3 n'est pas nécessaire pour la méthode. D'abord nous voulons démontrer une proposition. Les éléments considérés sont toujours des éléments de G.

PROPOSITION 4. - Soit $(T\mu_n)$ une suite de potentiels telle que $(T\mu_n)$ converge vers g à peu près partout. De l'hypothèse $|T\mu_n| \leq V$ pour tous les $n = 1, 2, \ldots$ à peu près partout, où V est intégrable par toute $\lambda \in F$, il résulte $\lim\limits_{n \to \infty} \int T\mu_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda$ pour toutes $\lambda \in F$. De $T\mu_n \leq T\mu_{n+1} (T\mu_{n+1} \leq T\mu_n)$ à peu près partout et $\left| \int T\mu_n \, d\lambda \right| \leq M(\lambda)$ pour tous $n = 1, 2, \ldots$ il résulte $\lim\limits_{n \to \infty} \int T\mu_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda$ pour toutes les $\lambda \in F$.

Soit λ un élément déterminé de F. De $|T\mu_n| \leq V$ à peu près partout il résulte $|T\mu_n| \leq V$ preque partout relativement à λ. Puisque V d'après l'hypothèse est intégrable pour λ, on a selon un théorème de convergence de la théorie de l'intégration (N. BOURBAKI [4], p. 149) :

$$\lim_{n \to \infty} \int T\mu_n \, d\lambda = \int \lim_{n \to \infty} T\mu_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda \quad .$$

En vertu de $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, où $\lambda_1, \lambda_2 \in F^+$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \int T\mu_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda \text{ pour toutes } \lambda \in F .$$

De la même manière on a démontré l'autre partie du théorème. De

$T\mu_n \leq T\mu_{n+1}$ (resp. $T\mu_{n+1} \leq T\mu_n$) à peu près partout et $\left|\int T\mu_n \, d\lambda\right| \leq M(\lambda)$ il résulte suivant un autre théorème de convergence (N. BOURBAKI [4], p. 149)

$$\lim_{n\to\infty} \int T\mu_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda \quad \text{pour toutes} \quad \lambda \in F .$$

Maintenant nous démontrons le théorème de convergence général.

THÉORÈME 5. - <u>Soit</u> $(T\mu_n)$ <u>une suite de potentiels</u>, $\mu_n \in G$ <u>pour tous</u> $n = 1, 2, \ldots$ <u>Si</u> $(T\mu_n)$ <u>est convergent à peu près partout sur</u> E <u>vers une fonction</u> g , <u>et si</u>

1° $\int T\mu_n \, d\lambda \longrightarrow \int g \, d\lambda$ pour toute $\lambda \in F$,

2° les applications $T'\lambda \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu_n$ sont équicontinues relativement à $\sigma(D, G)$, il existe une $\mu \in G$, telle que

a. $\int T'\lambda \, d\mu_n \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu$ pour tout $T'\lambda \in D$

b. $T\mu_n \longrightarrow T\mu$ à peu près partout.

Dans la proposition 4 nous avons indiqué des conditions suffisantes, quand l'hypothèse 1° résulte de $T\mu_n \longrightarrow g$ à peu près partout. Considérons maintenant les applications

$$T'\lambda \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu_n \quad .$$

D'après l'hypothèse 1° il existe pour toute $\lambda \in F$

$$\lim_{n\to\infty} \int T'\lambda \, d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int T\mu_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda \quad ,$$

en outre, selon 2°, les applications

$$T'\lambda \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu_n$$

sont équicontinues relativement à $\sigma(D, G)$. Il en résulte suivant le théorème de Banach-Steinhaus (N. BOURBAKI [6], p. 31) l'existence d'une application continue $T'\lambda \longrightarrow L(T'\lambda)$, telle qu'on ait

$$\int T'\lambda \, d\mu_n \longrightarrow L(T'\lambda) \quad \text{pour tout} \quad T'\lambda \in D .$$

Selon le théorème 4 on peut écrire $T'\lambda \longrightarrow L(T'\lambda)$ sous la forme de

$$L(T'\lambda) = \int T'\lambda \, d\mu \quad ,$$

où $\mu \in G$. Il s'ensuit

1° $$\int T'\lambda \, d\mu_n \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu \quad .$$

De plus nous considérons

$$\int T'\lambda \, d\mu_n \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu = \int T\mu \, d\lambda = \int g \, d\lambda$$

on a

$$\int (g - T\mu) \, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F^+$$

ou d'après la proposition 2

$$g = T\mu \quad \text{à peu près partout.}$$

De $\lim\limits_{n \to \infty} T\mu_n = g$ à peu près partout et $g = T\mu$ à peu près partout il résulte

2° $T\mu_n \to T\mu$ à peu près partout.

Nous considérons maintenant le cas où le noyau Φ <u>satisfait aux axiomes</u> A_1, A_2 <u>et</u> A_4. En vertu de A_4 les potentiels $T'\lambda$ sont des éléments de C, c'est-à-dire on a

$$T'\lambda(x) \to 0 \quad \text{pour} \quad x \to \omega \quad .$$

Dans ce cas H représente tous les éléments μ avec $\|\mu\| < \infty$. En général on a

$$\bar{D} \neq C \quad .$$

Par ce fait nous pouvons formuler le théorème de convergence (théorème 5) de la manière suivante :

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> $(T\mu_n)$ <u>une suite de potentiels,</u> $\mu_n \in H$ <u>pour tous</u> $n = 1, 2, \ldots$. <u>Si</u> $(T\mu_n)$ <u>est convergent à peu près partout sur</u> E <u>vers une fonction</u> g <u>et si</u>

1° $\int T\mu_n \, d\lambda \to \int g \, d\lambda$ pour toute $\lambda \in F$,

2° les applications $f \to \int f \, d\mu_n$; $f \in \bar{D}$, sont équicontinues relativement à la topologie forte de $\bar{D} \subset C$, il existe au moins une $\mu \in H$, telle que

a. $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$ pour tout $f \in \bar{D}$,

b. $T\mu_n \to T\mu$ à peu près partout.

La démonstration correspond à la démonstration du théorème 5. $(\int f \, d\mu_n)$ est convergent sur l'ensemble D, dense dans $\bar{D}$, et les applications sont équicontinues relativement à la topologie forte de $\bar{D}$. Il en résulte, d'après le théorème de Banach-Steinhaus (N. BOURBAKI [6], p. 31) la convergence de $(\int f\, d\mu_n)$ sur tout $\bar{D}$ vers une forme linéaire continue $f \to L(f)$. Pour $\bar{D} = C$ il y a d'après la proposition 3 une $\mu \in H$, telle qu'on ait

$$L(f) = \int f\, d\mu \quad \text{pour toute} \quad \mu \in H .$$

Egalement dans le cas $\bar{D} \neq C$ on a une $\mu \in H$ avec $L(f) = \int f\, d\mu$, parce que toute forme linéaire $f \to L(f)$ continue sur $\bar{D}$ peut être prolongée selon le théorème de Hahn-Banach (N. BOURBAKI [5], p. 101) à une forme linéaire $f \to \int f\, d\mu$ continue sur C, telle qu'on ait

$$\|\mu\| = \|L\| \quad \text{et} \quad L(f) = \int f\, d\mu \quad \text{pour tout} \quad f \in \bar{D} .$$

Donc nous avons maintenant la connexion avec le théorème 5.

On peut encore indiquer une condition simple, sous laquelle les applications $f \to \int f\, d\mu_n$ sont équicontinues sur $\bar{D}$.

PROPOSITION 5.- Supposons les μ_n éléments de H. Si l'on a $\|\mu_n\| < M$ pour tous $n = 1, 2, \ldots$ les applications $f \to \int f\, d\mu_n$ sont équicontinues relativement à la topologie forte sur D [4].

Par suite de la continuité on a

$$\left|\int f\, d\mu_n\right| \leq \|\mu_n\|\, \|f\| \quad , \quad f \in C .$$

En vertu de $\|\mu_n\| < M$ il en résulte

$$\left|\int f\, d\mu_n\right| < M\, \|f\|$$

ou l'égale continuité des applications

$$f \to \int f\, d\mu_n \quad \text{sur } C \quad ,$$

donc aussi sur $\bar{D} \subset C$.

---

(4) L'espace D en général n'est pas tonnelé. Pour de tels espaces, on a plusieurs théorèmes importants, en particulier sur l'espace en dualité de D. Voir N. BOURBAKI [6], spécialement l'exercice 9, chapitre 4, paragraphe 2.

REMARQUE. - Les théorèmes de convergence ici démontrés existent également pour des ensembles compacts E. Dans ce cas on exige seulement du noyau Φ qu'il satisfasse aux axiomes A_1 et A_2. Le noyau ne satisfera en général pas à l'axiome A_3. Il existe alors sur G la relation d'équivalence entre μ_1 et μ_2 $(\mu_1 - \mu_2 = \mu)$:

$$\int T'\lambda \, d\mu = \int T\mu \, d\lambda = 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in F .$$

Prenons comme exemple le noyau newtonien et comme ensemble compact $K \subset R^n$ la sphère et un point isolé x_0, placé dans la sphère. Alors il y a deux mesures ε_{x_0} (masse unité placée dans le point x_0) et μ_{x_0} (située sur la sphère), telles qu'on a

$$\int (T\varepsilon_{x_0} - T\mu_{x_0}) \, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute} \ \lambda \in F$$

avec $S_\lambda \in K$. Par l'introduction d'un espace quotient on peut adapter la méthode ici développée également à ce cas (comparez aussi les expositions sur le "principe de balayage"). Si E est compact, G est constitué par les mesures sur E, parce qu'on a en vertu de la compacité de E pour tout $T'\lambda \in D$ la relation

$$\left| \int^* T'\lambda \, d\mu \right| < \infty \quad .$$

5. Nous nous occupons maintenant en détail du principe de balayage.

DÉFINITION. - On dit que Φ satisfait au principe de balayage faible, si, pour toute mesure $\mu \in G$ et tout ensemble compact $K \subset E$ il existe au moins une mesure ν telle que

1° $S\nu \subset K$,

2° $T\mu(x) = T\nu(x)$ à peu près partout sur K (5).

Pour un noyau Φ, satisfaisant aux axiomes A_1 et A_2, les ensembles de capacité intérieure nulle ont été caractérisés suivant le théorème 1 de la manière suivante :

Pour qu'un ensemble universellement mesurable $B \subset E$ soit de capacité intérieure nulle, il faut et il suffit qu'il soit de mesure nulle pour toute $\lambda \in F^+$. Nous voulons caractériser un ensemble $B \subset K$, qui est de capacité intérieure nulle, de la manière suivante :

Pour qu'un ensemble universellement mesurable $B \subset K$ soit de capacité nulle, il

(5) Voir CHOQUET et DENY [11] où cette dénomination est introduite.

faut et il suffit qu'il soit de mesure nulle pour toute $\lambda \in F^+$ avec $S_\lambda \subset K$. Cela implique du noyau Φ d'autres propriétés. Soit λ_K la restriction de λ sur K. Alors nous introduisons l'axiome suivant :

A'_2 : Soit $\lambda \in F^+$ et $K \subset E$ un ensemble arbitraire.

Alors on a $\lambda_K \in F^+$.

On a maintenant la proposition suivante.

PROPOSITION 6. - De l'axiome A'_2 il résulte A_2.

Soit $B \subset E$ un ensemble universellement mesurable. Si l'on a pour une $\lambda \in F$ la relation $\lambda(B) \neq 0$, il existe un ensemble compact $K \subset B$ avec également $\lambda(K) \neq 0$. Soit λ_K la restriction de λ sur K. Alors on a $S_{\lambda_K} \subset K$ et selon l'axiome A'_2 toujours $\lambda_K \in F^+$ avec $\lambda_K(B) \neq 0$. De cette façon A_2 est satisfait.

Nous pouvons immédiatement indiquer une classe de noyaux pour lesquels A'_2 est satisfait.

PROPOSITION 7. - Pour tout noyau, qui satisfait à l'axiome A_1 et qui est s. c. i., A'_2 est satisfait.

De la semi-continuité inférieure il résulte immédiatement que pour toute mesure positive μ le potentiel $x \to T\mu(x)$ est une fonction s. c. i. (M. BRELOT et G. CHOQUET [7]). Soit $\lambda \in F^+$. Nous décomposons λ en $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, où λ_1 est la restriction de λ sur K et λ_2 la restriction de λ sur $E \setminus K$. Alors on a

$$T'\lambda(x) = T'\lambda_2(x) + T'\lambda_2(x) \quad .$$

$T'\lambda_1$ et $T'\lambda_2$ sont des fonctions s. c. i. . $T'\lambda + (-T'\lambda_2) = T'\lambda_1$ est alors s. c. s. (étant donné que $-T'\lambda_2$ est s. c. s. et $T'\lambda$ est s. c. i. et s. c. s.). Il en résulte que $T'\lambda_1$ (et respectivement $T'\lambda_2$) sont des fonctions continues. On a donc $\lambda_1 \in F^+$ et $S_{\lambda_1} \subset K$, selon $\lambda_2 \in F^+$.

A l'aide de l'axiome A'_2 on peut caractériser les ensembles de capacité nulle de la manière suivante :

PROPOSITION 8. - Soit Φ un noyau, qui satisfait aux axiomes A_1 et A'_2. Pour qu'un ensemble universellement mesurable $B \subset K \subset E$ soit de capacité nulle, il faut et il suffit qu'il soit de mesure nulle pour toute $\lambda \in F^+$ avec $S_\lambda \subset K$.

Nous décomposons λ en $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, où $\lambda_1 = \lambda_K \in F^+$, $\lambda_2 = \lambda_{E \setminus K} \in F^+$. On a $\lambda_2(K) = 0$. De $\lambda(B) = 0$ il résulte en vertu de $B \subset K$ immédiatement $\lambda_1(B) = 0$ et inversement.

De plus on introduit les notations suivantes

$$F_K = \left\{ \lambda : \lambda \in F \text{ et } S_\lambda \subset K \right\} \quad , \quad G_K = \left\{ \mu : \mu \in G \text{ et } S\mu \subset K \right\}$$
$$D_K = \left\{ f : f = T\lambda \text{ et } \lambda \in F_K \right\}$$

Nous étudions maintenant le <u>principe du balayage faible relatif à un ensemble compact</u> $K \subset E$ de capacité > 0. On exige du noyau Φ, qu'il satisfasse aux <u>axiomes</u> A_1, A_1', et A_2. $(T'\lambda, \mu) \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu$ est alors selon le théorème 4 une forme bilinéaire sur $D \times G$. Soit $D_{o_K} \subset G$ l'espace orthogonal à $D_K \subset D$, c'est-à-dire de toutes les $\mu \in G$ avec $\int \lambda d\mu = 0$ pour tout $T'\lambda \in D_K$. Si μ_1 et μ_2 sont deux éléments de G congrus mod D_{o_K}, on a $\int T'\lambda \, d\mu_1 = \int T'\lambda \, d\mu_2$ pour tout $T'\lambda \in D_K$. Pour toute classe $\overset{\circ}{\mu}$ mod D_{o_K} (éléments de l'espace quotient G/D_{o_K}), désignons par $< T'\lambda , \overset{\circ}{\mu} >$ la valeur commune des éléments $\int T'\lambda \, d\mu$ lorsque μ parcourt $\overset{\circ}{\mu}$; il est clair que $(T'\lambda , \overset{\circ}{\mu}) \longrightarrow < T'\lambda , \overset{\circ}{\mu} >$ est une forme bilinéaire sur $D_K \times (G/D_{o_K})$. On a le théorème suivant (N. BOURBAKI [6], p. 54).

THÉORÈME 7. - <u>La topologie</u> $\sigma(D_K , G/D_{o_K})$ <u>sur</u> D_K <u>est identique à la topologie induite sur</u> D_K <u>par la topologie faible</u> $\sigma(D , G)$.

On peut définir la topologie faible $\sigma(D_K , G/D_{o_K})$ par un ensemble de semi-normes $T'\lambda \longrightarrow P_{\overset{\circ}{\mu}}(T'\lambda) = | < T'\lambda , \overset{\circ}{\mu} > |$. Nous désignons cette topologie par $\mathcal{T}_K$.

De plus nous considérons sur $D_K \times G_K$ la forme bilinéaire $(T'\lambda , \mu) \longrightarrow \int T'\lambda \, d\mu$. Sur G_K peut exister une relation d'équivalence. $\int T'\lambda \, d\mu = 0$, $\mu \in G_K$, pour tout $T'\lambda \in D_K$ n'entraîne pas forcément $\mu = 0$. Cela se réfère par exemple au noyau newtonien, si K est de capacité positive et contient au moins un point isolé. Considérons alors l'espace quotient G_K/D_{o_K} et la forme bilinéaire $(T'\lambda , \overset{\circ}{\nu}) \longrightarrow < T'\lambda , \overset{\circ}{\nu} >$ sur $D_K \times (G_K/D_{o_K})$. L'ensemble de ces semi-normes définit sur D_K une topologie $\mathcal{T}'_K$.

Nous avons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 8. - Pour que le principe du balayage faible relatif à K soit possible, il faut et il suffit que les topologies $\mathcal{T}_K$ et $\mathcal{T}'_K$ soient identiques.

Cette condition est nécessaire. Si le principe de balayage faible relatif à K est possible, il existe pour toute $\mu \in G$ au moins une $\nu \in G$, telle que

$$\int T'\lambda \, d\mu = \int T'\lambda \, d\nu \quad \text{pour tout} \quad T'\lambda \in D_K \quad .$$

Il en résulte

$$T'\lambda \longrightarrow P_{\mu}(T'\lambda) = |< T'\lambda \, , \, \overset{\circ}{\mu} >| = |< T'\lambda \, . \, \overset{\circ}{\nu} >| = P_{\nu}(T'\lambda) \quad ,$$

c'est-à-dire, les topologies de $\mathcal{T}_K$ et $\mathcal{T}'_K$ sont identiques.

Cette condition est aussi suffisante. $T'\lambda \longrightarrow L(T'\lambda) = \int T'\lambda \, d\mu$ est continu sur D (relatif à la topologie $\sigma(D \, , G))$ et donc aussi continu sur le sous-espace $D_K \subset D$ (relatif à la topologie $\mathcal{T}_K$). D'après l'hypothèse les topologies $\mathcal{T}_K$ et $\mathcal{T}'_K$ sont identiques, donc $T'\lambda \longrightarrow L(T'\lambda)$ est également continu relatif à $\mathcal{T}'_K$. Toute forme linéaire continue sur D_K $T'\lambda \longrightarrow L(T'\lambda)$ (relatif à $\mathcal{T}'_K$) s'ecrit selon le théorème 5 de la manière suivante

$$T'\lambda \longrightarrow L(T'\lambda) = < T'\lambda \, , \, \overset{\circ}{\nu} > = \int T'\lambda \, d\nu \quad ,$$

où ν est un élément de $\overset{\circ}{\nu}$. Il en résulte pour $T'\lambda \in D_K$

$$L(T'\lambda) = \int T'\lambda \, d\mu = \int T\mu \, d\lambda = \int T'\lambda \, d\nu = \int T\nu \, d\lambda$$

ou

$$\int (T\mu - T\nu) \, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F_K \quad .$$

De la proposition 8 il résulte alors

$$T\mu(x) = T\nu(x) \quad \text{à peu près partout sur } K \, .$$

L'équivalence, indiquée dans le théorème 8, est très générale pour le principe de balayage faible. Il n'est pas nécessaire de se limiter à un noyau positif. Ici se pose encore le problème de chercher pour quels noyaux Φ les topologies $\mathcal{T}_K$ et $\mathcal{T}'_K$ sont identiques.

6. Nous continuons de nous occuper du principe du balayage faible. Pour ces recherches nous employons seulement les théorèmes de l'analyse fonctionnelle élémentaire.

Par $C(K)$ on désigne l'espace de Banach $\left(\|h\| = \sup\limits_{x \in K} |h(x)| \right)$ des fonctions définies et continues sur K. En outre on a

$$D^+(K) = \left\{ h : h \in C(K) \quad \text{et} \quad h(x) = T'\lambda(x) \ , \quad T\lambda \in D_K \right\}$$

$$D(K) = \left\{ h : h = h_1 - h_2 \ ; \ h_1 \ , \ h_2 \in D^+(K) \right\} \quad .$$

Toute mesure μ avec $S\mu \subset K$ correspond d'une manière biunivoque à une forme linéaire μ^* continue sur $C(K)$. Soit μ donnée, nous définissons la forme linéaire μ^* pour $h \in C(K)$ par $\mu^*(h) = \mu(f)$, où $f \in \mathcal{K}(E)$ est un prolongement de h. Si inversement μ^* est donnée nous définissons μ pour $f \in \mathcal{K}(E)$ par $\mu(f) = \mu^*(h)$, où h est la restriction de f sur K. On écrit pour $\mu^*(h)$ aussi $\int h \, d\mu^*$.

Nous introduisons l'axiome suivant qui permettra de donner d'autres indications sur le principe de balayage faible.

A_5 : Pour tout $a > 0$ il existe au moins un $T'\lambda \in D_K$, tel que $T'\lambda(x) \geq a$ pour tout $x \in K$.

Par cet axiome nous pouvons démontrer une proposition pour des formes linéaires positives.

PROPOSITION 9. - Soit Φ un noyau qui satisfait aux axiomes A_1 ; A_2' et A_5. Alors on peut prolonger toute forme linéaire $h \to L(h)$ positive sur $D(K)$ à une forme linéaire positive sur $C(K)$.

Donc il existe pour tout $a > 0$ une $\lambda \in F_K$ avec $T'\lambda \geq a$ sur K. Pour tout $h \in V = \left\{ f : \|f\| \leq a \ , \ f \in C(K) \right\}$ il existe alors un $h_0 \in D(K)$, tel qu'on a $\|h\| < a \leq h_0$. Il en résulte $-h_0 < h < h_0$. Soit $P = \left\{ f : f \in C(K) \text{ et } f \geq 0 \right\}$. Alors on a pour tout $h \in D(K) \cap (V + P)$ (6) la relation $-h_0 < h$. $h \to L(h)$ étant une forme linéaire positive sur $C(K)$, il en résulte pour $h \in D(K) \cap (V + P)$ la relation

$$L(h) > -L(h_0) \quad \text{ou} \quad L(D(K) \cap (V + P)) \geq -L(h_0) \quad .$$

Selon un théorème de H. BAUER [3] (7) il est possible de la prolonger en une forme

---

(6) $V + P$ représente l'ensemble de tous $x + y$, où $x \in V$ et $y \in P$.

(7) Soient E un espace localement convexe, P un cône convexe pointé saillant dans E. Soit L une forme linéaire, définie dans un sous-espace vectoriel M de E. Pour que L puisse être prolongée en une forme linéaire continue L^* positive, définie dans E, il faut et il suffit que l'ensemble $L(M \cap (V + P)$ soit borné inférieurement pour au moins un voisinage V de 0 dans E.

linéaire L^* continue et positive sur $C(K)$.

Nous nous limitons dans ce qui suit au principe du balayage sur des mesures $\mu \in G$ à support compact $S\mu$. Pour le principe du balayage faible il est possible d'indiquer une autre condition nécessaire et suffisante.

THÉORÈME 9. - Soit $\mu \in G$ une mesure à support compact $S\mu$, K un ensemble compact de capacité positive. Pour que le principe du balayage faible relatif à K soit possible, il faut et il suffit qu'il existe pour tout ensemble compact $S \subset E$ un nombre $M(S)$ tel que l'on ait pour tout $T'\lambda \subset D_K$ et tout $x \in S$.

$$|T'\lambda(x)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)|$$

Soit μ une mesure à support compact $S\mu \subset S$. Pour faciliter la démonstration nous admettons qu'il existe entre $h \in D(K)$ et $\lambda \in F_K$ une relation biunivoque. Soit $h = W(\lambda) \in D(K)$. Alors $\lambda = W^{-1}(h)$ est une application linéaire unique. Considérons maintenant sur F_K la forme linéaire

$$\lambda \to L^*(h) = \int T\mu \; d\lambda = \int T'\lambda \; d\mu \quad .$$

Avec $\lambda = W^{-1}(h)$ on a

$$h \to L(h) = L^*(W^{-1}(h)) = \int T'\lambda \; d\mu \quad ,$$

$h \to L(h)$ est aussi une application linéaire.

Nous montrons maintenant que la condition indiquée est nécessaire. Supposons que le principe du balayage faible soit possible. Alors on a pour toute μ à support compact $S\mu$ une mesure ν située sur K , telle que

$$\int (T\mu - T\nu) \; d\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \int T'\lambda \; d\mu = \int T'\lambda \; d\nu$$

pour toute $\lambda \in F_K$. Il en résulte

$$h \to L(h) = \int T'\lambda \; d\mu = \int T'\lambda \; d\nu \quad .$$

On a

$$h \to L(h) = \int T'\lambda \; d\nu = \int h \; d\nu^* \quad ,$$

où $h \to \int h \, d\nu^*$ est la forme linéaire continue produit par ν sur $C(K)$ et h la restriction de la fonction $T'\lambda$ sur K . Donc $h \to L(h) = \int h \; d\nu^*$ est une forme linéaire continue sur $D(K)$. Il en résulte pour toute $h \in D(K)$

$$|L(h)| \leq M(\mu) \, \|h\| \quad .$$

Cette relation vaut en particulier pour toute $\mu = \varepsilon_y$. Soit μ_y

la mesure déterminée par le principe de balayage faible

$$T\,\varepsilon_y(x) = T\,\mu_y(x) \quad \text{à peu près partout dans } K .$$

Alors nous avons

$$|L(h)| = \left|\int T'\lambda \; d\mu_y\right| = \left|\int T'\lambda \; d\varepsilon_y\right| = |T'\lambda(y)|$$

ou

$$|T'\lambda(y)| = \left|\int T'\lambda \; d\mu_y\right| \leq M(\mu_y) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)| = M(\mu_y)\,\|h\|$$

on a

$$M(\mu_y) = \sup_{|T'\lambda(x)| \leq 1, x \in K} \left|\int T'\lambda \, d\mu_y\right| \leq \left|\int T'\lambda_0 \, d\mu_y\right| + \varepsilon$$

$$= \left|\int T'\lambda_0 \, d\varepsilon_y\right| + \varepsilon \leq |T'\lambda_0(y)| + \varepsilon$$

où $T'\lambda_0$ est un élément approprié de D_K , pour lequel on a $|T'\lambda_0(x)| \leq 1$ pour tout $x \in K$.

Puisque $|T'\lambda_0|$ est continu sur l'ensemble compact S par conséquent également borné, on a

$$M(\mu_y) \leq M(S) \quad \text{pour tous } y \in S .$$

En vertu de cette relation résulte pour tout $T'\lambda \in D_K$

$$|L(h)| = |T'\lambda(y)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)|$$

ou

$$|T'\lambda(x)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)| \quad \text{pour tout } x \in S .$$

La condition indiquée est aussi suffisante. Soit

$$\sup_{x \in S} |T'\lambda(x)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)|$$

Alors nous considérons la relation

$$|L(h)| = \left|\int T'\lambda \; d\mu\right| \leq \|\mu\| \sup_{x \in S\mu} |T'\lambda(x)| \leq \|\mu\|\, M(S\mu) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)|$$

ou

$$|L(h)| \leq \|\mu\|\, M(S)\, \|h\| \quad .$$

L'application linéaire $h \to L(h)$ est bornée sur $D(K)$. Il en résulte la continuité de $h \to L(h)$ relativement à la topologie forte de $D(K)$.

D'abord nous considérons le cas $\bar{D}(K) = C(K)$. Alors

$$h \to L(h) = \int h \, d\nu^*$$

est une mesure sur $C(K)$ et par suite $f \to \int f \, d\nu$ avec $\int h \, d\nu^* = \int f \, d\nu$, où $f \in \mathcal{R}(E)$ se présente un prolongement de $h \in C(K)$, est une mesure sur $\mathcal{R}(E)$. Par cela nous obtenons pour $T'\lambda \in D(K)$

$$L(h) = \int T'\lambda \, d\mu = \int T'\lambda \, d\nu$$

ou

$$\int (T\mu - T\nu) \, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F_K \, .$$

En vertu de la proposition 8, on a

$$T\mu(x) = T\nu(x) \quad \text{à peu près partout sur} \quad K \, .$$

Dans le cas $\bar{D}(K) \neq C(K)$ toute forme linéaire $h \to L(h)$ continue sur $D(K)$ peut être prolongée selon le théorème de Hahn-Banach (N. BOURBAKI [5], p. 69) à une forme linéaire $h \to L'(h)$ continue sur $C(K)$, telle que

$$L(h) = L'(h) \quad \text{pour tout} \quad h \in \bar{D}(K) \quad \text{et} \quad \|L\| = \|L'\| \, .$$

Par cela nous avons réalisé la connexion avec les expositions précédentes.

Dans le cas $\bar{D}(K) \neq C(K)$ la mesure ν n'est en général pas déterminée d'une manière unique. Il existe sur $C(K)$ une forme linéaire continue $h \to \alpha^*(h)$, telle que $\alpha^*(h) = 0$ pour tout $h \in \bar{D}(K)$ (N. BOURBAKI [5], p. 70). On a cette relation spécialement aussi pour tout $h \in \bar{D}(K)$ ou

$$\alpha^*(h) = \int T'\lambda \, d\alpha = \int T\alpha \, d\lambda = 0 \, .$$

Nous ajoutons cette relation à l'équation

$$\int (T\mu - T\nu) \, d\lambda = 0$$

et obtenons

$$\int (T\mu - T(\nu + \alpha)) \, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F_K \, ,$$

$\nu + \alpha$ est dans ce cas également une solution de ce problème.

Par exemple on peut exiger en plus du principe de balayage faible, que pour toute $\mu \geq 0$ il faut déterminer une $\nu \geq 0$. Dans ces considérations le problème en question peut être unique également $\bar{D}(K) \neq C(K)$.

Nous exigeons en outre du noyau, qu'il satisfasse à l'axiome A_5. Il satisfait donc maintenant aux axiomes A_1, A_2' et A_5. Pour le principe de balayage faible (positif) nous exigeons que, pour toute μ soit déterminée une $\nu \geq 0$, placée sur K, telle que sur K on ait

$$T\mu(x) = T\nu(x) \quad \text{à peu près partout.}$$

Nous obtenons le théorème suivant.

THÉORÈME 10. - Pour que le principe de balayage faible (positif) soit possible, il faut et il suffit que $T'\lambda(x) \geq 0$ $(T'\lambda \in D_K)$ pour tout $x \in K$ entraîne $T'\lambda(x) \geq 0$ dans tout l'espace E.

D'abord nous supposons que le principe de balayage faible (positif) soit satisfait. Alors on a pour toute $\mu \geq 0$ une $\nu \geq 0$, placée sur K, telle que

$$T\mu(x) = T\nu(x) \quad \text{à peu près partout sur } K .$$

Cette relation est équivalente à

$$\int (T\mu - T\nu)\, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute } \lambda \in F_K \quad \text{ou} \quad \int T'\lambda \, d\mu = \int T'\lambda \, d\nu .$$

On a cette relation spécialement pour $\mu = \varepsilon_x$. Il en résulte

$$\int T'\lambda \, d\varepsilon_x = \int T'\lambda \, d\mu_x = T'\lambda(x) \qquad (\nu = \mu_x) .$$

En vertu de $\mu_x \geq 0$ et $T'\lambda(x) \geq 0$ sur K nous obtenons forcément

$$T'\lambda(x) = \int T'\lambda \, d\mu_x \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in E .$$

La condition indiquée est également suffisante. Comme pour la démonstration du théorème 9 nous considérons sur $D(K)$ la forme linéaire

$$h \to L(h) = \int T'\lambda \, d\mu .$$

Soit $S \subset E$ un ensemble compact, $T'\lambda \in D_K$ avec $\sup\limits_{x \in K} |T'\lambda(x)| \leq 1$ sur K.

Selon l'axiome A_5 il existe pour tout nombre $a > 1$ une $T'\lambda_0 \in D_K$, telle qu'on a $T'\lambda_0(x) \geq a$ sur K. Considérons $T'\lambda_0 - T'\lambda$. Sur K nous avons

$$T'\lambda_0(x) - T'\lambda(x) \geq 0 \quad \text{et en outre} \quad S_{(\lambda_0 - \lambda)} \subset K .$$

D'après l'hypothèse il s'ensuit

$$T'\lambda_0(x) - T'\lambda(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in E$$

ou

$$0 \leq T'\lambda(x) \leq T'\lambda_0(x) \leq M(S) \quad \text{sur } S .$$

Si $\sup\limits_{x \in K} |T'\lambda(x)| = A > 0$, nous considérons le potentiel $T'\lambda_1$, où $\lambda_1 = \frac{\lambda}{A}$. Pour $T'\lambda_1$ on a

$$\sup_{x \in K} |T'\lambda_1(x)| = \frac{1}{A} \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)| \leq 1 \quad .$$

Il en résulte

$$\sup_{x \in S} |T'\lambda_1(x)| = \frac{1}{A} \sup_{x \in S} |T'\lambda(x)| \leq M\ (S)$$

ou

$$\sup_{x \in S} |T'\lambda(x)| \leq M\ (S)A = M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)|$$

Maintenant les conditions du théorème 9 sont réalisées. On a pour tout $T'\lambda \in D_K$

$$\sup_{x \in S} |T'\lambda(x)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)| \quad .$$

Donc on a pour toute $\mu \geq 0$ au moins une mesure de support dans K telle que

$$T\mu(x) = T\nu(x) \text{ à peu près partout sur } K .$$

Il faut encore démontrer qu'il existe au moins une $\nu \geq 0$. D'après l'hypothèse il résulte pour tout $T'\lambda \in D_K$ du $T'\lambda(x) \geq 0$ sur K toujours $T'\lambda(x) \geq 0$ dans tout l'espace E . On en déduit pour $h \in D_K$ avec $h \geq 0$ toujours

$$h \to L(h) = \int T'\lambda \, d\mu \geq 0 \quad .$$

La forme linéaire $h \to L(h)$ est positive. Dans le cas $\bar{D}(K) = C(K)$ tout est démontré. $h \to L(h) = \int h \, d\nu^*$ est alors une forme linéaire positive (continue) sur $C(K)$. Désignons par ν la mesure appartenant à ν^* , nous obtenons, comme dans le théorème 9, la relation

$$T\mu(x) = T\nu(x) \text{ à peu près partout sur } K ,$$

où ν est positive.

Egalement dans le cas $\bar{D}(K) \neq C(K)$ il est possible de prolonger toute forme linéaire positive $h \to L(h)$ sur $D(K)$ selon la proposition 9 à une forme linéaire positive $h \to \int h \, d\nu^*$ sur $C(K)$.

Employant le théorème 9 il résulte une autre condition nécessaire et suffisante pour le principe de balayage faible. Pour démontrer que la condition est suffisante, on emploie un théorème sur les espaces vectoriels topologiques, qui résulte du

théorème de Hahn-Banach. Ce théorème est le suivant (N. BOURBAKI [5], p. 70) :
Soit X un espace localement convexe, Y un sous-espace fermé de X, et soit $Y \neq X$. Alors il existe pour tout $x_0 \in X \setminus Y$ une forme linéaire $L \neq 0$ continue sur X, pour lequel on a

$$L(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in Y \quad \text{et} \quad L(x_0) = 1 \quad .$$

Le théorème de Hahn-Banach est fondamental pour la méthode développée, particulièrement pour le principe de balayage faible. L'auteur pense qu'à l'aide de la "forme géométrique" du théorème de Hahn-Banach (N. BOURBAKI [5], p. 69) il est possible d'interpréter "géométriquement" le principe de balayage faible sur un espace localement convexe convenable.

Nous nous bornons dans les considérations suivantes au balayage d'une masse ponctuelle. Soit ε_{x_0} la masse unité placée au point x_0, $K \subset E$ un ensemble compact de capacité positive, $K_0 = K \cup \{x_0\}$,

$$D_0(K_0) = \left\{h : h(x) = T'\lambda(x) \;,\; x \in K_0 \;,\; T'\lambda \in D_K\right\} \quad ,$$

$$B_{x_0} = \left\{x : \Phi(x, x_0) = T\varepsilon_{x_0}(x) \neq 0 \;,\; x \in K\right\} \quad ,$$

$$h_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x = x_0 \\ 0 & \text{pour} \quad x \in K \end{cases}$$

On a $h_0 \in C(K_0)$.

THÉORÈME 11. - Soit $K \subset E$ un ensemble compact de capacité positive, Φ un noyau possédant la propriété que pour tout $x_0 \in E \setminus K$ l'ensemble B_{x_0} est de capacité positive. Pour que le principe de balayage faible pour la masse unité placée au point $x_0 \in E \setminus K$ soit possible, il faut et il suffit que la fonction h_0 ne soit pas un élément de $\bar{D}_0(K_0)$, c'est-à-dire $\bar{D}(K_0) \neq C(K_0)$.

Nous démontrons, d'abord, que la condition mentionnée est nécessaire. Supposons possible le principe de balayage faible pour le noyau Φ. Alors on a pour toute ε_{x_0} une mesure μ_{x_0} située sur K telle que

$$\int T'\lambda \; d\varepsilon_{x_0} = \int T'\lambda \; d\mu_{x_0} \quad \text{pour toute} \quad \lambda \in F_K \; .$$

Nous démontrons que, dans ce cas, h_0 n'est pas un élément de $\bar{D}_0(K_0)$. Supposons $h_0 \in \bar{D}_0(K_0)$. Alors il existe une suite (h_n) de $D_0(K_0)$ convergente uniformément vers h_0. On a selon la définition $h_n(x) = T'\lambda_n(x)$ pour tout $x \in K_0$, $T'\lambda_n \in D_K$. De

$$\|h_n - h_0\| = \sup_{x \in K_0} |h_n(x) - h_0(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty$$

on a en vertu de $h_0(x) = 0$ pour $x \in K$

$$\sup_{x \in K} |h_n(x)| = \sup_{x \in K} |T'\lambda_n(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty \quad .$$

Nous considérons la condition nécessaire et suffisante indiquée dans le théorème 9

$$\sup_{x \in S} |\lambda(x)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda(x)| \quad .$$

Posons $S = \{x_0\}$ et nous obtenons

$$|T'\lambda_n(x_0)| \leq M(S) \sup_{x \in K} |T'\lambda_n(x)| \quad .$$

Il en résulte $T'\lambda_n(x_0) \to 0$ ou

$$h(x_0) = \lim_{n \to \infty} T'\lambda_n(x_0) = 0 \quad .$$

Cela représente cependant une contradiction avec $h_0(x_0) = 1$, donc on a $h_0 \notin \bar{D}_0(K_0)$.

Cette condition est également suffisante. Pour la démonstration nous employons un théorème résultant du théorème de Hahn-Banach (Voir les remarques avant le théorème) D'après l'hypothèse la fonction $h_0 \in C(K_0)$ n'est pas un élément de $\bar{D}_0(K_0) \subset C(K_0)$ Donc $\bar{D}_0(K_0) \neq C(K_0)$. On a alors une forme linéaire $\alpha^* \neq 0$ continue sur $C(K_0)$ (N. BOURBAKI [5], p. 70), telle que

$$\alpha^*(h) = 0 \quad \text{pour} \quad h \in \bar{D}_0(K_0) \quad \text{et} \quad \alpha^*(h_0) = 1 \quad .$$

Soit α la mesure correspondante α^*, $\alpha^*(h) = \alpha(f) = \int f d\alpha$, où h est la restriction de $f \in \mathcal{K}(E)$. De $\alpha^*(h_0) = \int f_0 \, d\alpha = 1$ il résulte $x_0 \in S_\alpha$. La démonstration se fait indirectement. Supposons $x_0 \notin S_\alpha$. Il en résulte $\alpha^*(h_0) = \int f_0 \, d\alpha = 0$ à cause de $S_\alpha \subset K$ et $f_0(x) = 0$ pour $x \in K$. Après construction on a cependant $\alpha^*(h_0) = 1$. Cela est une contradiction, donc on a $x_0 \in S_\alpha$. Maintenant nous démontrons qu'on a également $S_\alpha \cap K \neq \emptyset$. D'après l'hypothèse concernant Φ, B_{x_0} est de capacité > 0. Il existe donc une $\lambda_1 \in F^+$ avec $\lambda_1 \neq 0$, $S_{\lambda_1} \subset B_{x_0} \subset K$ et

$$\int T\varepsilon_{x_0} \, d\lambda_1 = \int T'\lambda_1 \, d\varepsilon_{x_0} = T'\lambda_1(x_0) \neq 0 \quad .$$

(Voir la démonstration de la proposition 2).

Supposons $S_\alpha = \{x_0\}$. Après construction de α^* nous avons

$$\alpha^*(h) = \int f \, d\alpha = 0 \quad \text{pour toute fonction} \quad h \in \bar{D}_0(K_0) .$$

Cette relation existe également pour toute $h \in D_0(K_0)$, où selon la définition de h on a $h(x) = T'\lambda(x)$ et $T'\lambda \in D_K$.

Il en résulte

$$\alpha^*(h) = \int T'\lambda \, d\alpha = 0 \quad \text{pour tout} \quad T'\lambda \in D_K .$$

De $S_\alpha = \{x_0\}$ on obtient de plus

$$0 = \int T'\lambda \, d\alpha = A \int T'\lambda \, d\varepsilon_{x_0} = AT'\lambda(x_0) \quad \text{pour tout} \quad T'\lambda \in D_K .$$

Selon les explications précédentes il existe cependant $T'\lambda_1 \in D_K$ avec $T'\lambda_1(x_0) \neq 0$. La relation $S_\alpha = \{x_0\}$ n'est pas possible, donc on a $S_\alpha \cap K \neq \emptyset$. Le support de α se trouve sur K et $\{x_0\}$. Nous décomposons α en

$$\alpha = A\varepsilon_{x_0} - \mu_{x_0} , \quad S\mu_{x_0} \subset K .$$

De $1 = \alpha^*(K_0) = \int f_0 \, d\alpha = Af_0(x_0) = A$ il résulte $A = 1$ et

$$\alpha = \varepsilon_{x_0} - \mu_{x_0} .$$

La mesure μ_{x_0} n'est pas forcément > 0. Soit $T'\lambda \in D_K$. Nous trouvons

$$\int T'\lambda \, d\alpha = \int T\alpha \, d\lambda = \int (T\varepsilon_{x_0} - T\mu_{x_0}) \, d\lambda = 0 \quad \text{pour tout} \quad T'\lambda \in D_K ,$$

ou

$$T\varepsilon_{x_0}(x) = T\mu_{x_0}(x) \quad \text{à peu près partout sur} \quad K .$$

Nous pouvons encore donner une condition suffisante pour le principe du balayage faible. On a le théorème suivant.

THÉORÈME 12. - <u>Le principe de balayage faible est possible (pour la masse unité), lorsque</u> $\bar{D}_0(K_0) \neq C(K_0)$ <u>et</u> $\bar{D}(K) = C(K)$.

En vertu de $\bar{D}_0(K_0) \neq C(K_0)$ il existe une forme linéaire $\alpha^* \neq 0$ continue sur

$C(K_0)$, telle qu'on a pour tout $h \in \bar{D}_0(K_0)$ la relation $\alpha^*(h) = 0$ (N. BOURBAKI [5], p. 70). Pour $h \in D_0(K_0)$ nous obtenons

$$(*) \qquad \alpha^*(h) = \int T'\lambda \, d\alpha = \int T\alpha \, d\lambda = 0 \quad .$$

Il faut que $x_0 \in S_\alpha$. Sinon, soit $x_0 \notin S_\alpha$. Alors on a en vertu de $S_\alpha \subset K$ pour f continue arbitraire la relation

$$\int f \, d\alpha = \int f \varphi_K \, d\alpha \quad ,$$

où φ_K est la fonction caractéristique. Il existe pour toute $h' \in C(K)$ en vertu de $\bar{D}(K) = C(K)$ une suite $(T'\lambda_n)$, $T'\lambda_n \in D_K$, telle qu'on a

$$h'(x) = \lim_{n \to \infty} T'\lambda_n(x)$$

uniformément sur K.. Alors $(\varphi_K T'\lambda_n)$ est convergent uniformément vers $\varphi_K f$. Il en résulte de ($*$) pour toute h $C(K_0)$

$$\alpha^*(h) = \int f \, d\alpha = \int \varphi_K f \, d\alpha = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_K T'\lambda_n \, d\alpha = \lim_{n \to \infty} \int T'\lambda_n \, d\alpha$$

ou en vertu de $\int T'\lambda_n \, d\alpha = 0$

$$\alpha^*(h) = 0$$

Nous avons $\alpha = 0$, ce qui représente une contradiction.

x_0 est un point isolé, il faut que α soit de la forme

$$\alpha = A \varepsilon_{x_0} - \mu'_{x_0} \quad .$$

Pour toute $h \in D_0(K_0)$ nous obtenons selon ($*$)

$$\alpha^*(h) = \int T'\lambda \, d\alpha = \int T\alpha \, d\lambda = \int (AT\varepsilon_{x_0} - T\mu'_{x_0}) \, d\lambda = 0$$

pour tout $T'\lambda \in D_K$. On en déduit $(\frac{1}{A}\mu'_{x_0} = \mu_{x_0})$

$$T\varepsilon_{x_0}(x) = T\mu_{x_0}(x) \text{ à peu près partout sur } K \text{ .}$$

Nous indiquons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{D}(K) = C(K)$. Le noyau Φ est supposé satisfaire aux axiomes A_1 et A'_2.

THÉORÈME 13. - <u>Soit</u> $K \subset E$ <u>un ensemble compact de capacité</u> > 0 . <u>Pour que</u> $\bar{D}(K) = C(K)$, <u>il faut et il suffit que les conditions suivantes relatives à</u>

<u>deux mesures</u> ≥ 0 μ_1 <u>et</u> μ_2

1° $S\mu_1 \subset K$, $S\mu_2 \subset K$

2° $T\mu_1(x) = T\mu_2(x)$ <u>à peu près partout sur</u> K,

<u>entraînent</u> $\mu_1 = \mu_2$.

La relation $T\mu_1$ et $T\mu_2$ correspondant à peu près partout sur K, est équivalente à

$$\int (T\mu_1 - T\mu_2)\, d\lambda = 0 \quad \text{pour toute } \lambda \in F_K .$$

Nous démontrons maintenant la nécessité des conditions indiquées. Soit $D(K)$ dense dans $C(K)$, c'est-à-dire $\bar{D}(K) = C(K)$. Selon l'hypothèse on a

$$\int (T\mu_1 - T\mu_2)(d\lambda_1 - d\lambda_2) = \int T\mu\, d\lambda = \int T'\lambda \ d\mu = \mu^*(h) = 0 \qquad ,$$

pour toutes les $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; λ_1, $\lambda_2 \in F_K^+$; et $\mu = \mu_1 - \mu_2$, $S\mu \subset K$. Ici h est la restriction de $T'\lambda$ sur K et μ^* la forme linéaire correspondant à la mesure μ. Soit $f \in \mathcal{K}(E)$. Nous obtenons alors

$$\int f\, d\mu = \int f\, d\mu - \int T'\lambda\ d\mu = \mu^*(h_1) - \mu^*(h) = \mu^*(h_1 - h) \qquad ,$$

où h_1 est la restriction de f sur K. Il en résulte

$$\left|\int f\, d\mu\right| = \left|\int (f - T'\lambda)\ d\mu\right| = |\mu^*(h_1 - h)| \leq \|\mu^*\|\, \|h_1 - h\|$$

En vertu de $\bar{D}(K) = C(K)$ on a

$$\mu(f) = \int f\, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } f \in K(E)$$

ou $\mu = 0$, $\mu_1 = \mu_2$.

Les conditions indiquées sont également suffisantes. Pour toutes mesures positives μ_1, μ_2 suffisantes aux conditions 1° et 2°, soit toujours $\mu_1 = \mu_2$. Supposons $\bar{D}(K) \neq C(K)$. Alors il existe une forme linéaire α^* continue sur $C(K)$, telle que $\alpha^* \neq 0$ et $\alpha^*(h) = 0$ pour tout $h \in \bar{D}(K)$. Pour $h \in D(K)$ nous obtenons

$$\alpha^*(h) = \int T'\lambda\ d\alpha = \int T\alpha\ d\lambda = \int (T\alpha_1 - T\alpha_2)\ d\lambda = 0$$

D'après l'hypothèse il en résulte $\alpha_1 = \alpha_2$ ou $\alpha^* = 0$. Cela représente cependant une contradiction avec $\alpha^* \neq 0$.

REMARQUE. - Ce théorème est valable également pour tout l'espace E. La condition indiquée est alors nécessaire et suffisante pour que $\overline{D} = C$, si le noyau Φ satisfait aux axiomes A_1, A_2 et A_4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANGER (Gottfried). - Stetige Potentiale und deren Verwendung für einen Neuaufbau der Potentialtheorie, Dissertation, Dresden 1957.

[2] ARSOVE (M. G.). - Functions of potential type, Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 526-551.

[3] BAUER (H.). - Über die Fortsetzung positiver Linearformen, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-nat. Kl., 1957, p. 177-190.

[4] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Éléments de Mathématique, 13).

[5] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 1-2. - Paris, Hermann, 1953 (Act. scient. et ind., 1189 ; Éléments de Mathématique, 15).

[6] BOURBAKI (Nicolas). - Espaces vectoriels topologiques, Chapitres 3-5. - Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1229 ; Éléments de Mathématique, 18).

[7] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Le théorème de convergence en théorie de potentiel, J. Madras Univ., Sect. B, t. 27, 1957 (Centenary Number), p. 277-286.

[8] CARTAN (Henri). - Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, 2e série, t. 22, 1946, p. 221-280.

[9] CHOQUET (Gustave). - Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1606-1609.

[10] CHOQUET (Gustave). - Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, Suites de potentiels, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 244, 1957, p. 1707-1710.

[11] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Modèles finis en théorie du potentiel, J. Anal. math. Jérusalem, t. 5, 1956/57, p. 77-135.

[12] CHOQUET (G.) et DENY (J.). - Aspects linéaires de la théorie du potentiel, Théorème de dualité et applications, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 243, 1956, p. 764-767.